Dynamical Action of Self-Energy

− Interquark Force and Confinement −*)

伊　藤　大　介（埼玉大・理）

1. Introduction :

点 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$ に点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots \cdots, Q_N$ があって，

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0 \tag{1}$$

とする。この関係及び Q_i を変えることなく，これらを1点 $\vec{R}$ に会合させれば（図1），点電荷は実質的に中和消滅したことになるから，空間到る処 $\vec{r}$ で電界 $\mathbf{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$ は消滅すべきであり，系の静電エネルギー

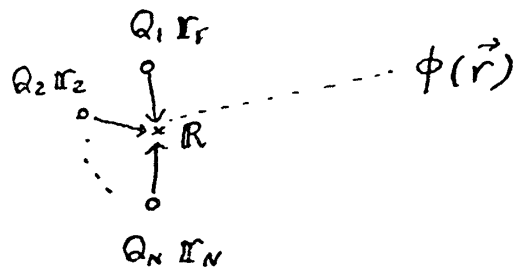

図　1

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}^2\, dv = -\frac{1}{2}\int dv\, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r}) \tag{2}$$

も零となるべきである。ϕ は

$$-\triangle\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) Q_i \tag{3}$$

の解

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_i|} Q_i = \sum_{i=1}^{N} V(\vec{r} - \vec{r}_i)\, Q_i \tag{4}$$

であるから，$\vec{r}_i \to \vec{R}$ で $\phi(\vec{r})$ は確かに

$$\phi(\vec{r}) \to V(\vec{r} - \vec{R}) \sum_{i=1}^{N} Q_i = 0 \tag{5}$$

となる。(3), (4) を (2) に代入すれば

---

*) この論文は 1977. Dec. 12. 日大の研究会で話したことをまとめたものである。同研究会で議論して下さった方々に感謝致します。

1) V(0) は無限大なので，この Compensation で Ambiguity をさけるには，先づ $V(\vec{r})$ の Fourier 表示を切断したもの $V_K(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^K k^2 dk\, V(k) \frac{\sin kr}{kr}$ を用い，Compensation を行った上で Cut off　$K \to \infty$ とすればよい。

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Q_i\, V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\, Q_j \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i^2\, V(0) + \sum_{i>j}^{N} Q_i Q_j\, V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{7}$$

となるが，すべての点電荷を1点 $\vec{R}$ にあつめれば

$$U \to \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i^2 + \sum_{i>j}^{N} Q_i Q_j\right] V(0) = \frac{V(0)}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i\right)^2 = 0 \tag{8}$$

となり，これも確かに零になる。[1] 但し，ここで (7) 式に現われるPotentialの原点の値：

$$U_{\mathrm{self}} \equiv \frac{V(0)}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i^2 \tag{9}$$

が重要な役割を演じている。V(0) は無限大なので通常無意味な自己作用として系のエネルギー (7) から省かれている。しかし，これを省いてしまうと，すべての点電荷が1点に集中消滅した後にも場のエネルギーは (8) のように零にはならなくなる。点電荷が集中消滅したとき，場のエネルギーも零になるべきことを要請するなら，(7) から $V(0)/2 \cdot \Sigma\, Q_i^2$ を勝手に省いてはならない。引去るならむしろ (1)を用いて，無撞着的に，

$$U = \frac{V(0)}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i\right)^2 + \sum_{i>j}^{N} Q_i Q_j \left[V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - V(0)\right] \tag{10}$$

$$= -\sum_{i>j}^{N} Q_i Q_j \left[V(0) - V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right] \tag{11}$$

とすべきである。

次に (7) で，すべての $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \to \infty$ とおけば，$V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \to 0$ となるから

$$U \to U_{\mathrm{self}} = \frac{1}{2} V(0) \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 \tag{12}$$

となる。これは各点電荷が互に無限に離れたときにももち得る静電エネルギーであるから，点電荷の静電自已エネルギーの和である。従って (8) は，点電荷が1点に集中消滅するとき，自已場と共に静電自已エネルギーも消滅することを示している。このことから，(7) で通常省かれている $\frac{1}{2}V(0)\,\Sigma\, Q_i^2$ を残すことは，単にエネルギーの Normalization を変えるというだけでなくて，次のような描像を可能ならしめることになる。

N＝3 の例を考えよう。図2で (a) は点電荷 Q_1, Q_2, Q_3 が1点に重なった状態である。このとき系は1個の中性粒子に等しく，静電界も静電自已エネルギーももち得ない。次に3粒子を引き離すにつれて (b) のように多重極的静電界を生じ，系は静電エネルギーをもつことになる。3粒子を (c) のように互に無限遠に引き離せば，相互作用は消滅するが，各粒子のまわりには自已場が残り，系は無限に大きな自已エネルギー U_{self} をもつことになる。

さてこれがQuark − Gluon 系であったとしたら，Source の中和状態 (a) (後に述べるColor Singlet

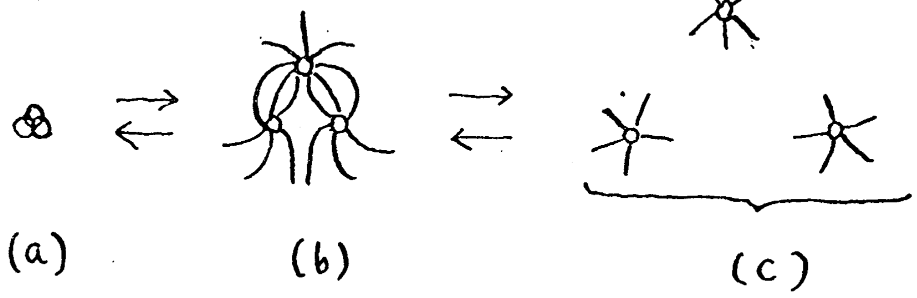

図　2

に相当）から，quark を無限に引き離した状態 (c) に移るには，外部から自已エネルギー U_{self} に相当する無限のエネルギーを供給しなければならない。自已エネルギーの〔Infra よりむしろ Ultraviolet の〕発散が Quark Confinement に一役演ずることが期待される。また高エネルギー状態 (b) にある系が，低エネルギー状態 (a) に戻ろうとする傾向が Quark 振動の復元力となり得ることを示している。このとき無限遠で各粒子の固有定数として，従来それらの質量にくりこまれていた自已エネルギーが，粒子の接近と共に固有場間に干渉消滅が起る結果として，逆に徐々にくり出され，複合粒子の内部運動のエネルギーに転化されることになる。

例えば２粒子系 $Q_1 + Q_2 = 0$ では系の全エネルギーは[2)]

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2) + U = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2) + \frac{V(0)}{2}(Q_1^2+Q_2^2) + Q_1Q_2V(r_1-r_2)$$

$$= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2) - Q_1Q_2[V(0) - V(\vec{r_1}-\vec{r_2})] \qquad (13)$$

となる。Coulomb 場 $V(\vec{r}) = 1/4\pi r$ なら $V(0)$ は無限大であるが，若し図３のような現象論的 Potential

$$V(r) \approx V(0) - V'(0)\, r^2 + \cdots$$
$$V(0) > 0, \quad V'(0) > 0 \qquad (14)$$

を仮定すれば，(13) は

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2) - Q_1Q_2V'(0)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2 \qquad (15)$$

となる。ここで，$0 = (Q_1+Q_2)^2 = Q_1^2+Q_2^2+2Q_1Q_2$,

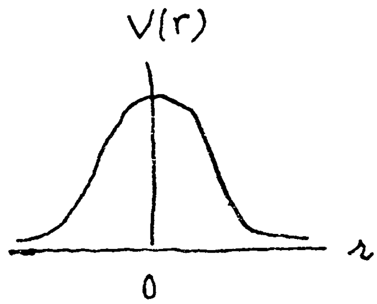

図　3

2）この例については既に述べたことがある。伊藤；素研 (1975).

即ち，$Q_1Q_2=-\frac{1}{2}(Q_1^2+Q_2^2)<0$ であるから，(15)は

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2) + |Q_1Q_2|V'(0)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2 \tag{16}$$

となり，振動の Hamiltonian となる。

3粒子系 $Q_1+Q_2+Q_3=0$ のときも同様にして，

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2) - V'(0)\left[Q_1Q_2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2+Q_2Q_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3)^2+Q_3Q_1(\vec{r}_3-\vec{r}_2)^2\right] \tag{17}$$

が得られる。この場合，若し

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2) + \frac{-V'(0)}{3}(Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3Q_1)\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2+(\vec{r}_2-\vec{r}_3)^2+(\vec{r}_3-\vec{r}_1)^2\right] \tag{18}$$

なる対称化が許されるなら，$Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3Q_1=\frac{-1}{2}(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)<0$ により，(18)は(16)と同様振動の Hamiltonian であることが示される。しかし，このような細工が許されなくても，3点が集中したとき $U=0$，無限に離れたとき $U=U_{self}>0$ が非常に大きいことから，振動的内部運動が起ることは物理的に明らかであろう。

最近素粒子は点状の構成子から成るものと考えられているが，以上の例は点状構成子に不可避な無限大の自巳エネルギーが，逆に構成子自身が自由粒子として無限遠に現われる事を禁止すると同時に無限大の実害を封じ込め，逆に近距離に於ては，自巳エネルギーは内部運動に繰り出され，振動の Potentialとして力学的役割を演ずる可能性を示唆している。

以下この可能性を少し詳しく考えてみることにする。

2. Color Confinement :

Colored Quark $q_c^F(\vec{r})$ 〔$F\equiv(\alpha,i)$ は flavor α, Spin i，C=1.2.3 は Color を表わす〕間の力は Color Octet Gluon によって媒介されるものとし，その effective interaction Hamiltonian を

$$\bar{H}_{int} = \frac{1}{2}\int dv\,dv' \sum_{A=1}^{8} \bar{q}_c^F(\vec{r})\,\gamma_\lambda\,(\lambda_A q^F(\vec{r}))_c\,V(\vec{r}-\vec{r}')\,\bar{q}_{c'}^{F'}(\vec{r}')\,\gamma_\lambda\,(\lambda_A q^{F'}(\vec{r}'))_{c'} \tag{19}$$

としよう。非相対論的近似が許されるものとして(19)を

$$\bar{H}_{int} = \frac{1}{2}\int dv\,dv'\, q_c^{F+}(\vec{r})\,(\lambda_A q^F(\vec{r}))_c\,V(\vec{r}-\vec{r}')\,q_{c'}^{F'+}(\vec{r}')\,(\lambda_A q^{F'}(\vec{r}'))_{c'} \tag{20}$$

で近似し，

$$\bar{H}_0 = \int dv\, q_c^{F+}(\vec{r})\frac{\mathbf{p}^2}{2m}q_c^F(\vec{r}) \tag{21}$$

として，Quark 系の Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\Omega(t)>}{\partial t}=(\overline{H}_0+\overline{H}_{int})\Omega(t)> \tag{22}$$

から3-quark成分をとり出せば

$$\begin{aligned}0&=<0|q^{F_1}_{c_1}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3}(\vec{r}_3)\left(-i\frac{\partial}{\partial t}+\overline{H}_0+\overline{H}_{int}\right)\Omega(t)>\\&=\left(-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2}{2m}\right)<0|q^{F_1}_{c_1}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3}(\vec{r}_3)\Omega(t)>\\&\quad+<0|[\,q^{F_1}_{c_1}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3}(\vec{r}_3),\ \overline{H}_{int}\,]\Omega(t)>\end{aligned} \tag{23}$$

となる。

$$\begin{aligned}&[\,q^{F_1}_{c_1}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3}(\vec{r}_3),\ \frac{1}{2}\int dv\,dv'\,\overset{+}{q}{}^{F}_{c}(\vec{r})\,(\lambda_A q^F(\vec{r}))_c\,V(\vec{r}-\vec{r}')\,\overset{+}{q}{}^{F'}_{c'}(r')\,(\lambda_A q^{F'}(r'))_{c'}\,]\\&=\left[\frac{V(0)}{2}\sum_{i=1}^{3}(\lambda_A^{(i)})^2+\sum_{i>j}^{3}\lambda_A^{(i)}\lambda_A^{(j)}\right]_{c_1c_2c_3,\,c_1'c_2'c_3'}q^{F_1}_{c_1'}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2'}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3'}(\vec{r}_3)\end{aligned} \tag{24}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}&[(\lambda_A^{(1)})^2]_{c_1c_2c_3,\,c_1'c_2'c_3'}\equiv(\lambda_A)^2{}_{c_1c_1'}\,\delta_{c_2c_2'}\,\delta_{c_3c_3'}\\&[\lambda_A^{(1)}\lambda_A^{(2)}]_{c_1c_2c_3,\,c_1'c_2'c_3'}\equiv(\lambda_A)_{c_1c_1'}\,(\lambda_A)_{c_2c_2'}\,\delta_{c_3c_3'}\end{aligned}\right\}\ \text{etc.} \tag{25}$$

であるから，(23)は

$$\begin{aligned}&\left[-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2)+\frac{V(0)}{2}\sum_{i=1}^{3}(\lambda_A^{(i)})^2\right.\\&\left.\quad+\sum_{i>j}^{3}\lambda_A^{(i)}\lambda_A^{(j)}V(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right]_{c_1c_2c_3,\,c_1'c_2'c_3'}<0|q^{F_1}_{c_1'}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2'}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3'}(\vec{r}_3)\Omega(t)>=0,\end{aligned} \tag{26}$$

となる。特に $V(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=V(0)-V'(0)(\vec{r}_i-\vec{r}_j)^2+\cdots$ のとき，これは

$$\begin{aligned}&\left[-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2}{2m}+\frac{V(0)}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_A^{(i)}\right)^2\right.\\&\left.\quad-\sum_{i>j}^{3}V'(0)\,\lambda_A^{(i)}\lambda_A^{(j)}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)^2+\cdots\right]_{c_1c_2c_3,\,c_1'c_2'c_3'}\psi^{F_1F_2F_3}_{c_1'c_2'c_3'}(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,t)=0\end{aligned} \tag{27}$$

但し，

$$\psi^{F_1F_2F_3}_{c_1c_2c_3}(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,t) \equiv \langle 0|\,q^{F_1}_{c_1}(\vec{r}_1)\,q^{F_2}_{c_2}(\vec{r}_2)\,q^{F_3}_{c_3}(\vec{r}_3)\,\Omega(t)\rangle, \tag{28}$$

となる。これは (17) に相当するものである。ここで V(0)／2 の係数

$$C_2 \equiv \Big(\sum_{i=1}^{3}\lambda^{(i)}_A\Big)^2 \tag{29}$$

は2次の Casimir 演算子で，Colorの既約表現に対しては対角的である。特に $c_1\,c_2\,c_3$ に関して完全反対称な $\psi^{F_1F_2F_3}_{[c_1c_2c_3]}(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,t)$，即ち，Color Singlet に対しては $c_2=0$ である。ここでも若し，対称化

$$\Big[-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2}{2m}-\frac{V'(0)}{3}\big(\lambda^{(1)}_A\lambda^{(2)}_A+\lambda^{(2)}_A\lambda^{(3)}_A+\lambda^{(3)}_A\lambda^{(1)}_A\big)\{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2$$

$$+(\vec{r}_2-\vec{r}_3)^2+(\vec{r}_3-\vec{r}_1)^2\}\Big]_{[c],[c']}\psi^{F_1F_2F_3}_{[c']}(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,t)=0 \tag{30}$$

が許されるなら，Color Singlet に対しては

$$0=\frac{1}{2}\big(\lambda^{(1)}_A+\lambda^{(2)}_A+\lambda^{(3)}_A\big)^2=\frac{\lambda^{(1)2}_A+\lambda^{(2)2}_A+\lambda^{(3)2}_A}{2}+\big(\lambda^{(1)}_A\lambda^{(2)}_A$$

$$+\lambda^{(2)}_A\lambda^{(3)}_A+\lambda^{(3)}_A\lambda^{(1)}_A\big)=8\times\mathbf{1}+\big(\lambda^{(1)}_A\lambda^{(2)}_A+\lambda^{(2)}_A\lambda^{(3)}_A+\lambda^{(3)}_A\lambda^{(1)}_A\big) \tag{31}$$

であるから，(30) は、

$$\Big[-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2+\mathbf{p}_3^2}{2m}+\frac{8}{3}V'(0)\{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2+(\vec{r}_2-\vec{r}_3)^2+(\vec{r}_3-\vec{r}_1)^2\}\Big]\psi^{F_1F_2F_3}_{123}=0 \tag{32}$$

となる。たとえ対称化が許されなくても振動的であることは以前に述べた場合と同様である。

数値的に Confinement と Regge Slope ($\sim 1\ \mathrm{GeV}^2$)を両立させるには V(0) を非常に大きく，V′(0) はむしろ小さく選ばねばならない。即ち，深くて広い Potential が必要である。そのような Potential は如何なる機構によって生ずるかは別に考えなければならない。或は長波長の Gluon によるものかも知れない。Ultraviolet 的な Confinement を強調する我々の Formalism は必ずしもこのような Infra 的機構の存在を排除するものではない。 (Dec. 28. 1977).