Continuum Analogue of Lattice Gauge Theory

埼玉大・理　伊藤大介

バネで結ばれたquark，特に Bose Quark は，いわゆる C－数定理によって，$\Delta I=1/2$ が Parity の最大非保存から導かれることもあって，石田さん達によってこの10年間，精力的に発展させられ，最近では漸近自由性まで含められるようになった。この Model 最大の困難は，バネの力がこの理論自身から導かれないことである。これは Gauge 理論も同罪で，可能性が期待されながらも，純 Yang–Mills 理論から Confinement は未だ導かれていない。ところがCreutz等による格子模型のシミュレーションによれば，漸近自由性と Confinement がこの模型の中に連続的に共存しているようである。連続理論では仲々成功しない Confinement の試みが，格子理論では可なり一般的に成功するのは，格子に於ける Confinement の機構の中に，格子の特性を超えた Confinement 独特の機構が現われており，連続理論にもそれに対応する機構が存在するのではないかと思わせる。 Lattice から何を抽象し，何を捨象したものが，それであるか？　格子の Confinement 機構のまねをして，連続理論からとに角 String potential を導き出してみせるには，どこをまね，どこを捨たらよいか？　これについては別に述べたので，今回はその結果からはじめよう。研究会では間に合わず，現象論的な話をしたが，その時話したことよりも，話したかったことを述べさせて頂きたいと思います。

反誘電真空の現象論的記述： Confinement 領域では bare coupling が大きいので軽い quark の真空は強く分極し，その pair 密度を $\mathbf{P}(x)$ とする。この真空の Hamiltonian を

$$H_0=\int_V dv\,\frac{(\mathbf{E}-\mathbf{P})^2+\mathbf{H}^2}{2} \tag{1}$$

と仮定する。但し $A_0=0$，$\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{A}}$ なる Gauge を用いる。 V は全空間を表わす。この真空に， quark pair

$$H_p=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p}-g\mathbf{A})+\beta m+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\tilde{\mathbf{p}}+g\tilde{\mathbf{A}})+\tilde{\beta}m \tag{2}$$

がもち込まれたとする。 Bloch–Nordsieck にならい，赤外領域では，α，βは，古典速度$\mathbf{v}$，$\sqrt{1-v^2}$ で近似できるものとすれば，

$$\begin{aligned}H_p=&\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}+m\sqrt{1-v^2}+\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+m\sqrt{1-\tilde{v}^2}\\&-g(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{A}})\end{aligned} \tag{3}$$

となる。 pair が（4－1）面上に Wilson–loop を描くとき

D. ITO; Dept. of Phys., Saitama Univ.

$$\int g(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{A}})\,dt=g\int(A_1\,dx_1-\tilde{A}_1\,d\tilde{x}_1)$$

$$=g\oint_{\partial W}A_1\,dx_1=-g\int dt\int_{\tilde{x}}^{x}\dot{A}_1(x_1\,0\,0\,t)\,dx_1 \tag{4}$$

$$=+g\int E_1(x_1,\,0,\,0,\,t)\,dx_1\,dt$$

とかけるから，

$$H_p=\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}+\sqrt{1-v^2}\,m+\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+\sqrt{1-\tilde{v}^2}\,m-\int gE_1\,dx_1 \tag{5}$$

とかける。赤外領域で $\mathbf{E}(x)$の変化が烈しくないとき，aは小さな定数として

$$-\int gE_1\,dx_1=-\int_{\tilde{x}}^{x}dx_1\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx_2\,dx_3}{a^2}\mathbf{E}(x)\cdot\mathbf{e}_1$$

$$\equiv\int_V dv\,\mathbf{E}(x)\cdot\mathbf{P}_W(x) \tag{6}$$

とかける。但し，

$$\mathbf{P}_W(x)=\frac{g}{a^2}\mathbf{e}_1\quad(x\in W)\quad=0\quad(x\notin W) \tag{7}$$

Wはxと$\tilde{x}$を結ぶ線分を距離 $a/2$ で包む領域とする。本来は

$$\mathbf{P}_W(x)=g\,\mathbf{e}_1\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)$$

であるから，aは $\delta(x_2)\,\delta(x_3)$ の高周波切断で，格子理論では格子定数に対応する。

（6）を代入すれば

$$H=H_0+H_p=\int_V dv\left[\frac{(\mathbf{E}-\mathbf{P})^2+\mathbf{H}^2}{2}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}_W\right]$$

$$+\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}+\sqrt{1-v^2}\,m+\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+\sqrt{1-\tilde{v}^2}\,m$$

$$=\int_V dv\,\frac{(\mathbf{E}-\mathbf{P}-\mathbf{P}_W)^2+H^2}{2}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+\tilde{\beta}m$$

$$+\int_V dv\,\frac{\mathbf{P}^2-(\mathbf{P}+\mathbf{P}_W)^2}{2} \tag{8}$$

となる。末項は V－W で零であるから

$$V\equiv\frac{1}{2}\int_V dv(\mathbf{P}^2-(\mathbf{P}+\mathbf{P}_W)^2)=\frac{1}{2}\int_{..} dv(\mathbf{P}^2-(\mathbf{P}+\mathbf{P}_W)^2) \tag{9}$$

となる。さて Wilson loop 面上では $\mathbf{P}_W$ は真空分極によって完全遮蔽されると仮定し

$$\mathbf{P}+\mathbf{P}_w=0 \quad (x\in W) \tag{10}$$

とおけば,

$$V=\frac{1}{2}\int_W dv\,\mathbf{P}_W^2=\frac{g^2}{2a^2}\int_{\tilde{x}}^{x}dx_1=\frac{g^2}{2a^2}|x-\tilde{x}| \tag{11}$$

従って

$$H=H_G+\frac{g^2}{2a^2}|x-\tilde{x}|+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+\tilde{\beta}m$$

$$H_G=\int_{V-W}dv\frac{(\mathbf{E}-\mathbf{P})^2+\mathbf{H}^2}{2}+\int_W dv\,\frac{E^2+H^2}{2} \tag{12}$$

となる。これはstringで結ばれたpairに他ならない。この近似ではpairはGauge場ともはや作用しない。String potential (11) に切断aが現われるのは格子理論も同罪で，研究会で話したように，aは切断ではなくてConfinementと漸近自由域の境目を与える長さ $a\sim1/\Lambda$ のような物理量からきまるはずのものである。この理論は真空のエネルギー

$$H_0=\int dv\left[\frac{E^2}{2}-EP\right] \tag{13}$$

と，これに Pair が加わったときのエネルギー

$$H=\int dv\left[\frac{E^2}{2}-E\cdot(P+P_W)\right] \tag{14}$$

の差を問題にするのであるが，例えば

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_W=0$$

のときの特解である Instanton

$$\mathbf{E}_1(x)=-\frac{4\hat{a}^2}{g}\int\frac{d^4x'}{[(x-x')^2+\hat{a}^2]}M_{01}(x') \tag{15}$$

$$\begin{aligned}[M_{\lambda\mu}(x),M_{\nu\omega}(x')]=i\,\delta^4(x-x')[&M_{\lambda\nu}(x)\delta_{\mu\omega}+M_{\mu\omega}(x)\delta_{\lambda\nu}\\ &-M_{\lambda\omega}(x)\delta_{\mu\nu}-M_{\mu\nu}(x)\delta_{\lambda\omega}]\end{aligned} \tag{16}$$

を代入し，

$$P_i(x)=\frac{g}{a^2}M_{oi}(x) \tag{17}$$

と見做して，エネルギー差を計算すれば

$$V=\int_W dx'\int_W dx''\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\frac{4}{[(x'-x'')^2+\hat{a}^2-x_0^2]^2}$$
$$\sim\frac{1}{\hat{a}^2}\left[\sqrt{\hat{a}^2+|x-\tilde{x}|^2}-\hat{a}\right]\sim\frac{|x-\tilde{x}|}{\hat{a}^2} \qquad (18)$$

が得られるが，この場合には切断の $a\to0$ としたが，インスタントンの大きさ $\hat{a}$ が a の代りに現われる。

分極率と Instanton：詳しいことは別に述べる予定であるが，$M_{\lambda\mu}(x)$ が電流代数的関係（16）をみたすとき，（15）は

$$[(\partial_\mu-igA_\mu),\ F_{\lambda\mu}(x)]=0 \qquad (19)$$

の解である。ここで $M_{\lambda\mu}$ は

$$M_{\lambda\mu}=M_{\lambda\mu}^{(1)}+M_{\lambda\mu}^{(8)} \qquad (20)$$

としたときの Color Singlet 部分とみなし，Colored Gluon は $M_{\lambda\mu}^{(8)}$ によって記述されるものとすれば，（15）は密度 $M_{\lambda\mu}^{(1)}$ による双極子場と見做される。

$$M_{\lambda\mu}^{(1)}(x)=\bar{q}^{\alpha}(x)[\gamma_\lambda\gamma_\mu]/2iq^{\alpha}(x)$$

とおき

$$[q^{\alpha}(x),\ q^{\alpha'}(x')]_{\pm}=\delta^4(x-x')\delta_{\alpha\alpha'}$$

を満足するとすれば，これは（16）を満足する。これによって，（15）は quark－反quark 双極子が作る物という意味を一層深く示唆する。（17）式はこの解釈に基くものである。このように Instanton は源のない Gauge 場方程式（19）の解であり乍ら，それ自身，真空に分極の存在を示唆している。

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}$$

が源のない電磁場の方程式を満足しながら，誘電分極 **P** の存在を示唆しているのと似ている。格子理論に於いては格子自身が，実は分極可能な真空の役割をしていたといえるように思われる。