

Polarization of Quark Vacuum and Color Confinement. (I)

埼玉大・理 伊藤大介

(1981年2月7日受理)

よく知られているように、真空の分極は“荷電”を遮蔽するが、Loop の中間状態がある条件を満足するならば、真空の引算により遮蔽の裏返しとして反誘電性が導かれ、連続理論でありながら格子理論と平行した Confinement 機構が生ずることを示す。

1. Fermion loop と Pauli 原理

Lorentz かつ Gauge 不変な loop と、その Stokes 面積分

$$\exp i g \oint_{\partial W} A_\lambda dx_\lambda = \exp i g \int_W F_{\lambda\mu} df_{\lambda\mu} \quad (1-1)$$

は Gauge 場の理論で重要な役割を演ずるが、同じ Loop は

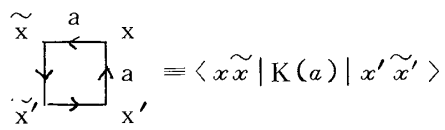
$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, \tilde{x}, t) = \left[\frac{(\mathbf{p} - g \mathbf{A}(x))^2}{2m} + g A_0(x) + \frac{(\tilde{\mathbf{p}} + g \mathbf{A}(\tilde{x}))^2}{2m} - i g A_0(\tilde{x}) \right] \psi, \quad (1-2)$$

で記述される粒子対の波動関数の、図 1 に対応する propagation の path-integral 表現

$$\psi(x, \tilde{x}, t) = \int [dx] [d\tilde{x}] \times \exp i \left[\int_0^t \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{\tilde{x}}^2) - g \oint A_\lambda dx_\lambda \right] \psi(x_0, \tilde{x}_0, t), \quad (1-3)$$

にも現われ、Loop は量子力学的には粒子対の propagation の歴史に対応する path-functional, その Stokes 面積分は図 2 の漁網で表わされる系の歴史の path-functional である。その網目 (plaquette) には

Micro Kernel



$$\equiv \langle x, \tilde{x} | K(a) | x', \tilde{x}' \rangle$$

$$\propto \exp i \left[\frac{m(\tilde{x} - \tilde{x}')^2}{2a} + g A_0(\tilde{x}) \right] \exp i \left[\frac{m(x - x')^2}{2a} - g a \cdot \mathbf{A}(x) \right] \quad (1-4)$$

$$\times \exp i \left[\frac{m(x-x')^2}{2a} - g A_0(x) \right] \exp i \left[\frac{m(x'-\tilde{x})^2}{2a} + g \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}(x') \right]$$

が対応し、特に $x = \tilde{x}$, $x' = \tilde{x}'$ のとき A_λ を含む Loop 項は消え、Kinetic part のみが残る。従って逆回りの2枚の plaquette が重なる時

$$\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \left[\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \text{ から Loop は消え, Kinetic Part のみ残る} \quad (1-5)$$

2粒子が同種 Fermion のとき, Micro Kernel

$$\langle x_1 x_2 | K(a) | x'_1 x'_2 \rangle = - \langle x_1 x_2 | K(a) | x'_2 x'_1 \rangle \quad (1-6)$$

は反対称化されており, $x_1 = x_2$, $x'_1 = x'_2$ で確率振巾が消える。従って同じ向きに回る2枚の plaquette が重なる

$$\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \left[\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \text{ を1つでも含めば確率振巾への寄与 = 0 である。} \quad (1-7)$$

2 Wilson loop と分極密度

(4-1) - 面内にある Wilson loop は

$$\begin{aligned} -g \int_W F_{41} dx_4 dx_1 &= \int_W g E_1(x_0 x_1 0 0) dx_0 dx_1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx_2}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx_3}{a} \int_W \mathbf{E}(x) \cdot (g \mathbf{e}^{(1)}) dx_0 dx_1 \\ &\equiv \int_W \mathbf{E}(x) \cdot \frac{g \mathbf{e}^{(1)}}{a^2} d^4 x \end{aligned} \quad (2-1)$$

とかくことができる。 $\mathbf{e}^{(1)}$ は1-方向の単位ベクトルで

$$\mathbf{P}_W(x) \equiv \frac{g \mathbf{e}^{(1)}}{a^2} = \frac{g \mathbf{a}}{a^3} \quad (2-2)$$

とかけば(2-1)は

$$-\int_\omega \mathbf{E}(x) \cdot \mathbf{P}_W(x) d^4 x \quad (2-3)$$

とかける。(2-2)は双極子 $\mathbf{p} = g \mathbf{a}$ の分布による単位体積当りの分極(密度)と考えられるから、(2-3)は Wilson loop 面を包む厚さ a の領域 ω (図3)内での Gauge 場と quark 真空分極の相互作用と解される。[Confinement が問題になる Infra red 領域では、 a が充分小さければその区間で \mathbf{E} の変化は無視できるであろうから、以後 a は定数とし、 $a \rightarrow 0$ としない。定数 a の起源は別に考えることにする]



図1

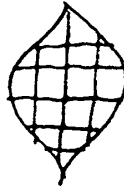


図2

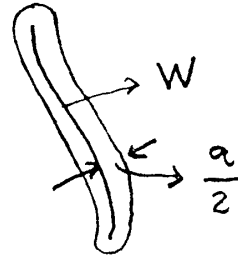


図3

Bare coupling g や \mathbf{E} が非常に大きいと考えられる Confinement 領域では、軽い quark の真空分極も大きいであろう。その分極密度を $\mathbf{P}(x)$ としよう。

3 真空分極と作用する Gauge 場と Confinement

Gauge 場が全空間 V で真空分極 $\mathbf{P}(x)$ と相互作用するとき、真空のエネルギーは (以後 $A_0=0$ Gauge を用いる。)

$$\begin{aligned} E_0 \psi_0 &= H_0 \psi_0 = \int_V d^3v \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \right] \psi_0 \\ &= \left[\int_V d^3v \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{P})^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \int_V d^3v \frac{\mathbf{P}^2}{2} \right] \psi_0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

の最低固有値で与えられる。

次に点 x に quark, 点 \tilde{x} に反 quark を固定したとき、系のエネルギーは

$$E \psi = H \psi = [H_0 + V(x, \tilde{x})] \psi \quad (3-2)$$

の固有値 E で与えられる。 $V(x, \tilde{x})$ は quark 対の位置エネルギーの差で、これは

$$\begin{aligned} V(x, \tilde{x}) &= \int_{\tilde{x}}^x dx_1 g E_1(x_0, x_1, 0, 0) \\ &\doteq \int_{\tilde{x}}^x dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx_2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx_3}{a} \mathbf{E}(x) \cdot (g \mathbf{e}^{(1)}) \\ &\equiv \int_V d^3v \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_W(x) \end{aligned} \quad (3-3)$$

とかける。ここで

$$\mathbf{P}_W(x) = \frac{g \mathbf{e}^{(1)}}{a^2} \quad (x \in W) = 0 \quad (x \notin W) \quad (3-4)$$

但し、 W は x と \tilde{x} を結ぶ線分を包む、(3-3) で定義される、細い領域である。(3-1), (3-4) により (3-2) は

$$\begin{aligned}
 E \psi &= \int_V d v \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{P}_W) \right] \psi \\
 &= \left[\int_V d v \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{P} - \mathbf{P}_W)^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \int_V d v \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right] \psi
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

とかける。

$$\frac{\delta H_0}{\delta \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})} = \frac{\delta H_0}{-\delta \mathbf{E}(\mathbf{x})} = \Pi(\mathbf{x}) \tag{3-6}$$

とおけば(3-1), (3-5)はそれぞれ

$$E_0 \psi_0 = \left[\int_V d v \frac{\Pi^2 + \mathbf{H}^2(\mathbf{A})}{2} - \int_V d v \frac{\mathbf{P}^2}{2} \right] \psi_0 \tag{3-7}$$

$$E \psi = \left[\int_V d v \frac{(\Pi + \mathbf{P}_W)^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \int_V d v \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right] \psi \tag{3-8}$$

とかける。ここで

$$\psi = e^{i \int_V d v \mathbf{P}_W(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})} \psi_0 = U \psi_0 \tag{3-9}$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned}
 (\Pi + \mathbf{P}_W) U &= \left(\frac{\delta}{i \delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} + \mathbf{P}_W \right) U = U \Pi \\
 \mathbf{A} U &= U \mathbf{A}
 \end{aligned} \right\} \tag{3-10}$$

により(3-8)は

$$E \psi_0 = \left[\int_V d v \frac{\Pi^2 + \mathbf{H}^2}{2} - \int_V d v \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right] \psi_0 \tag{3-11}$$

となる。(3-9), (3-11)から

$$E^{\min} - E_0^{\min} = \int_V d v \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2} - \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right) \tag{3-12}$$

(3-4)により

$$= \int_W d v \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2} - \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right) \tag{3-13}$$

であることがわかる。

特に

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_W(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in w) \tag{3-14}$$

が成立つとき, 即ち, quark 対による分極が, 真空分極によって完全に遮蔽されるとき, (3-13)は

$$\begin{aligned}
 E^{\min} - E_0^{\min} &= \int_W d v \frac{\mathbf{P}_W^2}{2} = \int_W d v \frac{g^2}{2 a^4} \\
 &= \int_{\tilde{x}}^x d x_1 \frac{g^2}{2 a^2} = \frac{g^2}{2 a^2} |x - \tilde{x}|
 \end{aligned}
 \tag{3-15}$$

となる。これは quark 対間の String Potential に他ならない。この結果は完全遮蔽 (3-14) のとき残る (3-13) の第 1 項からくるものであり、これは真空の引算に由来するものであるから、真空の引算は、完全遮蔽を裏返して反誘電性ならしめる可能性を示しているといえよう。

Hamiltonian H_0 及び H に導く Lagrangian は

$$L_0 = \int_V d v \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{P})^2 - \mathbf{H}^2}{2} \tag{3-16}$$

$$L = \int_V d v \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{P} - \mathbf{P}_W)^2 - \mathbf{H}^2}{2} \tag{3-17}$$

であるから同じ結果は path-integral

$$\frac{\int [dA] \exp i \int L dt}{\int [dA] \exp i \int L_0 dt} = \exp i \int_{\Omega} d^4 x \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2} - \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}_W)^2}{2} \right) \tag{3-18}$$

からも得られる。 Ω は全 4 次元空間を表わす。Wilson loop 面を距離 $a/2$ で包む空間 (図 3) を ω とすれば、これは完全遮蔽で面積則

$$\exp i \int_{\omega} d^4 x \frac{\mathbf{P}_W^2}{2} = \exp i \frac{g^2}{2 a^4} \int_{\omega} d^4 x = \exp i \frac{g^2}{2 a^2} \int_{\omega} d x_0 d x_1 \tag{3-19}$$

を与える。Wilson-loop 面が時間的曲面のとき、これは String Model でおなじみの形

$$e^{-g^2/2a^2} \int_W d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} \tag{3-20}$$

にかくことができる。

4 格子 Gauge 理論に於ける Confinement 機構との比較

格子 Gauge 理論での Confinement 機構を見易くするため (正確ではないが) Wilson loop の期待値を

$$\begin{aligned}
 \langle e^{iW} \rangle &= \left[\int [dA] \exp \frac{i}{2g^2} \sum_{x_{\lambda\mu}} (1 - \cos F_{\lambda\mu}(x) a^2) \exp \sum_{x \in W} i F_4(x) a^2 \right] \\
 &\quad \div \left[\int [dA] \exp \frac{i}{2g^2} \sum_{x_{\lambda\mu}} (1 - \cos F_{\lambda\mu}(x) a^2) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

とする。 $1/2 g^2$ の 2 次以上を無視する強結合近似では、(4-1) への寄与は Wilson loop 面上の Gauge 場に限られ、この意味で場は伝播性を失う。このとき (4-1) は、

$$\langle e^{iW} \rangle = \sum_{x \in W} \frac{\int [dA] (1 - (e^{iF_{41}a^2} + e^{-iF_{41}a^2})/2g^2) e^{iF_{41}a^2}}{\int [dA] (1 - (e^{iF_{41}a^2} + e^{-iF_{41}a^2})/2g^2)} \quad (4-2)$$

とかける。ここで $e^{iF_{41}a^2}$ が $\downarrow \uparrow$ に対応するなら、 $e^{-iF_{41}a^2}$ は $\uparrow \downarrow$ に対応する。 $\int [dA]$ で残るのは $\downarrow \uparrow$ と $\uparrow \downarrow$ の重なる項のみで、 $\downarrow \downarrow$ と $\uparrow \uparrow$ の重なりや他の項は消える。その結果面積則

$$\langle e^{iW} \rangle = \prod_{x \in W} \left(\frac{1}{2g^2} \right) = \exp \ln \frac{1}{4g^2} \int_W \frac{dx_0 dx_1}{a^2} \quad (4-3)$$

が得られる。(4-2)で $\downarrow \uparrow$ と $\uparrow \downarrow$ の重なりは $\mathbf{P} + \mathbf{P}_W = 0$ に対応する (§2)。即ち Wilson loop の plaquette が格子の plaquette によって完全遮蔽されることが面積則への唯一の寄与となっている。また2つの plaquette の重なるの動き方は §1 の Pauli 原理の場合と平行している。このように格子理論では loop は格子の link に束縛された gauge 場 flux の輪であり、我々の場合には Fermion loop であるが、Confinement の機構は形式上非常によく似ている。