

大角散乱と Quark Potential

伊藤大介、森健寿(埼玉大、理工)

(概要)

先に、我々は p-p の大角散乱の角分布をその Born 近似として記述する深さ数 Bev かつ原点で regular な potential が存在することを指摘した。此の論文では、quark 間の potential は此の potential の特性を持つものであると考え、素粒子内部で quark が同型の平均 potential 内を運動するものと仮定すれば一粒子励起による質量準位は内部角運動量 (spin) J 及び動径方向振動の量子数 n について近似的に一次な質量公式：

$$M_{n,J} = M_0 + A\sqrt{J(J+1)} + B(n + \frac{1}{2})$$

で与えられることを示す。此の結果は大角散乱の potential と Chew-Frautschi の plot の間の関係を示唆する。

§1 序論

p-p の大角散乱の角分布は、周知の如く O'rear の実験式¹⁾

$$S(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{CMS} = A e^{-2a P_T} \quad (1-1)$$

で極めて見事に再現される（但し $S = 4E_0^2$, E_0 は重心系の入射 energy, A は energy, 角度に無関係な定数、 $a \approx \frac{1}{2} m_\pi$ ）。

以前に我々は²⁾この角分布を Born 近似として与えるような potential を導いた。それは次のようにして得られるものである。Yukawa potential の Fourier 表示：

$$\frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{ik \cdot r}}{k^2 + \mu^2} d^3 k$$

-480-

伊 藤 · 森

IC変換 : $\vec{r} \rightarrow \vec{A}$, $\vec{k} \rightarrow -\vec{r}$, $\mu \rightarrow a$ (相反性の原理) を行え
ば

$$\frac{e^{-aA}}{A} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\vec{A} \cdot \vec{r}}}{r^2 + a^2} d^3 r$$

で両辺を a で微分して A を momentum transfer と考えれば e^{-aA} は potential

$$V(r) = \frac{V_0 a^4}{(r^2 + a^2)^2} \quad (1-2)$$

の行列要素として得られ、故に微分断面積は $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim e^{-2aA}$ となり $A \approx P_T$ のはん
いで (1-1) は (1-2) の Born 近似として得られる。¹⁾

$$\frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \sqrt{\frac{M}{E E_0}} e^{-ip'_1 \cdot \vec{r}} \sqrt{\frac{M}{E E_0}} e^{-ip'_2 \cdot \vec{r}'} \sqrt{\frac{M}{L^3 E_0}} e^{ip'_2 \cdot \vec{r}} \sqrt{\frac{M}{L^3 E_0}} e^{ip'_1 \cdot \vec{r}'} \\ \times \frac{V_0 a^4}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + a^2)^2}$$

によつて行列要素 M を求め

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi L^3}{v_r} |M|^2 \frac{L^3 p_0^2}{(2\pi)^3 v_r}, \quad v_r \equiv \frac{2p_0}{E_0}$$

によつて微分断面積を計算すれば

$$s \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\pi M V_0 a^3}{4} \right)^2 e^{-2aA} \quad (1-3)$$

が得られる。第一図はこれを $V_0 = 3 \text{ BeV}$, $\frac{1}{2a} = 1.24 m_\pi$ として plot したもの
である。

本質的なことは、Coulomb potential が原点で singular なことが大角散乱の断面積を大きくし Rutherford の実験を説明したのとは反対に、我々の得た potential (1-2) が原点で regular なことが p-p 大角散乱の断面積を著しく減衰させ Orear の実験式を再現することで此の間の事情は J.J.Thomson の原子模型の場合に似ている。此の様を原点で regular な potential は単純な local field interaction からは期待できない。このことは potential の源がひろがりをもつこと又は交換される場が non-local であ

大角散乱と Quark Potential

-481-

ることなどの可能性を考えることを我々に要請する如く思われる。事実、核子間の相互作用を Yukawa³⁾、Markov⁴⁾、Takano⁵⁾ 等の non-local field にて媒介されるものと仮定すれば上と類似な而も <<relativistic>> な potential が得られ上と同程度に実験事実を説明できることを以前に示した。⁶⁾ 此理論は又 Yukawa が以前に指摘した³⁾ ようにひろがりを持つた粒子間の相互作用とも解釈することもできる。⁷⁾

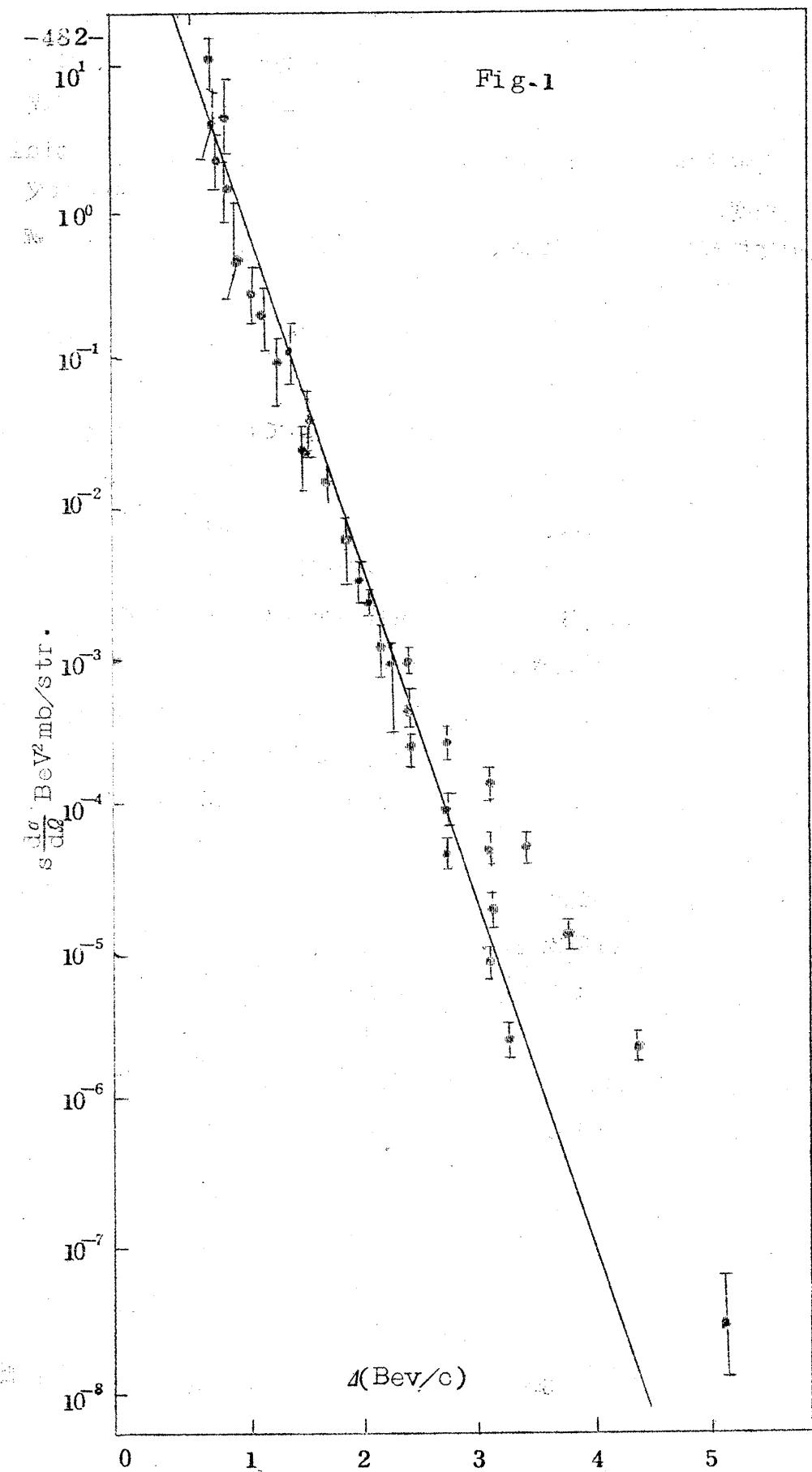
さて、核子や中間子が quarks の複合系であると仮定した場合、例えば核子間相互作用は Fig. 2a) のようなものであろうが、これが Fig. 2b) のように local boson の交換で記述できるのは二核子が充分離れていて Fig. 2a) の交換される quark-antiquark 系の重心波が充分何回か振動できる場合であろう。

low energy の核力の場合には、この条件はおそらく近似的に満足され local meson+nucleron form factor がよい近似になつてゐるであろうが momentum transfer が数 Bev/c、衝突係数が非常に小さい high energy の大角散乱の場合、Fig. 2b) の如き local boson field の交換としての近似はよくないであろう。此のようを場合、quark 間の力を場の交換として記述しようと欲すればその場は非局所的であろう。もしそうであれば quark 間の力は遠距離で local boson exchange interaction にて帰着し得るようを non local field exchange interaction であろう。Yukawa-Markov interaction と言うのは特に此様な条件を満たす相互作用である。此様な観点により、我々が大角散乱の現象論から到達した Yukawa-Markov potential 又はその模型化ともみるべき potential (1-2) を近距離に於ける quark 間の potential と仮定することにしよう。

近距離に於ける quark 間の力が (1-2) の如きものであるなら核子の内部にて存在する quark 間の力もおそらくこれに類似のものであろう。原子核の Independent Partide Model のような描像が成立する場合には、此様な quark 間の力に起因する平均 potential も

$$V(r) = \frac{-|V_0|b^4}{(r^2+b^2)^2} \quad (1-6)$$

の如きものであろう。 $|V_0|$ は 3BeV 程度、 $b \gtrsim a (= 1/48 m_\pi)$ であろう。此



大角散乱と Quark Potential

-483-

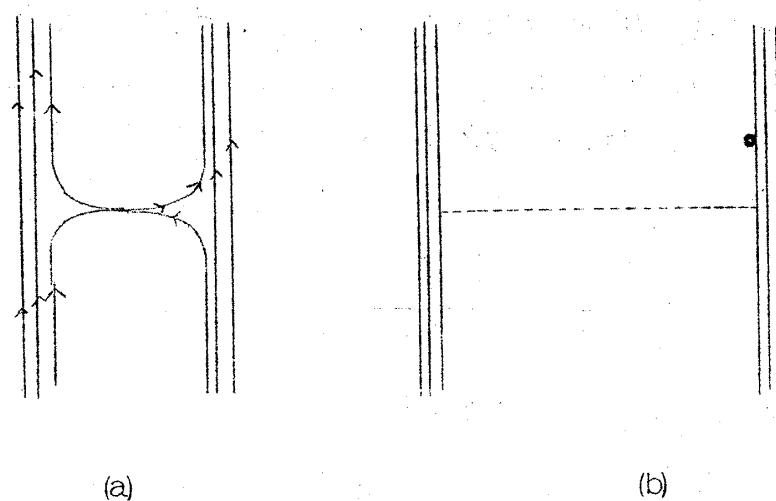


Fig. 2

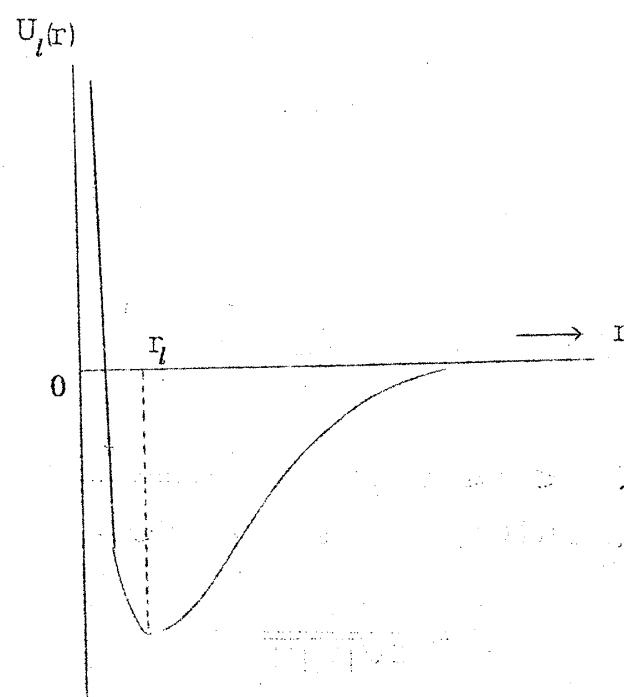


Fig. 3

-484-

伊 藤 ・ 森

様な平均 potential 内を運動する quark は如何なる energy level を与えるであろうか？量子力学的取扱いは次節に廻し、此處では大雑把に前期量子論であたつて見よう。これが良い近似であることは次節に述べる。

簡単のため Bohr の円軌道を考える。遠心力と引力の釣合いの条件
(M_q は quark の <<mass>>)

$$\frac{M_q v^2}{r} = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4|V_0|b^4 r}{(r^2 + b^2)^3} \quad (1-7)$$

より quark の運動量 $p = M_q v$ を求めれば

$$p = 2\sqrt{|V_0|M_q} b^2 r(r^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}$$

故に角運動量の量子条件 (Bohr の量子条件) は

$$\frac{2\sqrt{|V_0|M_q} b^2 r^2}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \hbar J, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (1-8)$$

これより定常軌道半径が求まる。これを実際に求めるために

$$r^2 = \frac{\hbar J b}{2\sqrt{|V_0|M_q}} \rho^2 \quad (1-9)$$

と置けば上式は

$$\frac{\rho^2}{\left(1 + \frac{\hbar J \rho^2}{2\sqrt{|V_0|M_q} b}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 \quad (1-10)$$

となる。

分母の係数は、 $b \gtrsim a \approx \frac{1}{2} m_\pi$ により $\frac{\hbar J}{2\sqrt{|V_0|M_q} b} \lesssim \sqrt{\frac{m_\pi}{|V_0|M_q}} \hbar J$ で J が余り大でない時、これは $\ll 1$ である。よって $\rho^2 \approx 1$ 。

$$r^2 \approx \frac{\hbar J b}{2\sqrt{|V_0|M_q}} \ll b^2 \quad (1-11)$$

が定常軌道半径である。此れにより quark の全 energy

$$E = \frac{1}{2} M_q v^2 - \frac{|V_0| b^4}{(r^2 + b^2)^2} = \frac{2|V_0| b^4 r^2}{(r^2 + b^2)^2} = \frac{2|V_0| b^4 r^2}{(r^2 + b^2)^3} - \frac{|V_0| b^4}{(r^2 + b^2)^2}$$

が計算される。 $r^2 \ll b^2$ なる故

$$E \approx \frac{4|V_0|}{b^2} r^2 - |V_0| \approx -|V_0| + 2\sqrt{\frac{|V_0|}{M_q}} \frac{\hbar J}{b} \quad (1-12)$$

N 個の quark が共通の平均 potential 内を運動している系を考えその中 ($N-1$) 個が基底状態にあり、一個が level J にある場合の系の全 energy (Mass) M_J は

$$M_J \approx N(M_q - |V_0|) + 2\sqrt{\frac{|V_0|}{M_q}} \frac{\hbar J}{b} \quad (1-13)$$

で与えられる。 $M_{J=0}$ は系の基底状態の質量で核子の場合は

$$M_q - |V_0| = \frac{M_{J=0}}{N} = \frac{M_N}{3} \approx 0.31 \text{ Bev}$$

$|V_0| \approx 3 \text{ Bev}$ であるから、 $M_q \approx |V_0|$ と考えてよい。従つて上の質量公式は、近似的に

$$M_J \approx M_{J=0} + 2\frac{\hbar J}{b} \approx M_{J=0} + 4m_\pi J \quad (1-14)$$

となり、内部角運動量に一次に依存し準位間隔は、大体 pion mass の 4 倍程度となる。(1-14) は実験事実と矛盾しない傾向にある。他方非相対論的な Regge Trajectory の勾配は、粒子の空間的な拡りを示す径数を R として $\sim R^2/(2J+1)$ であるが、実験事実を説明する波動函数又は potential が Regge 理論の帰結としてすでに決定されている様には思われない。大角散乱の potential がこのように適切な解釈を持たぬ Chew-Frautschi plot 又は Kycia-Reiley plot の理解に緒を与えるならば興味あることである。

§2 量子力学的取扱い

前節で、前期量子論で取扱つた問題を波動力学的に取扱うことにする。平均

-486-

伊 藤 森

場 $V(r)$ 内を運動する quark を非相対論的な Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M_q} \Delta + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (2-1)$$

で記述できるものとする。⁹⁾ 定石通りに $\psi = \frac{x_l(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi)$ とおけば

$$x_l'' + (k^2 - U_l(r)) x_l = 0 \quad (2-2)$$

$$\text{但し } k^2 \equiv \frac{2M_q E}{\hbar^2}, \quad U_l(r) \equiv \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2M_q |V_0| b^4}{\hbar^2 (r^2 + b^2)^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{g^2 b^2}{(r^2 + b^2)} \quad (2-3), (2-4)$$

$$\text{ここで } g^2 \equiv \frac{2M_q |V_0| b^2}{\hbar^2} \gtrsim \frac{M_q |V_0|}{2m_\pi^2 c^2} \gg 1 \quad (2-5)$$

であるから $U_l(r)$ は Fig. 3 のような非常に深い谷を持つた potential である。谷底の座標は

$$\frac{\partial U_l(r)}{\partial r} = -2 \frac{\ell(\ell+1)}{r^3} + 4 \frac{g^2 b^2 r}{(r^2 + b^2)^3} = 0 \quad (2-6)$$

の解であり、これを r_l とすれば

$$\frac{b^2 \frac{\hbar^4}{r_l^4}}{(r_l^2 + b^2)^3} = \frac{\ell(\ell+1)}{2g^2} \ll 1 \quad (2-7)$$

の解で、近似的に

$$r_l^2 \approx \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2g^2}} b^2 = \frac{\hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}}{2\sqrt{M_q |V_0|}} b \quad (2-8)$$

で、これは前節の定常軌道の半径に相等する。potential の底に近い level をしらべるため $U_l(r)$ を r_l の近傍で展開すれば

$$U_l(r) \approx U_l(r_l) + \frac{(r - r_l)^2}{2} U_l''(r_l) + \dots \quad (2-9)$$

第二項迄とれば、Schrödinger 方程式は

$$x_l'' + [k^2 - U_l(r_l) - \frac{(r - r_l)^2}{2} U_l''(r_l)] x_l \approx 0 \quad (2-10)$$

となる。

(2-10) は

$$\frac{d^2\chi_l}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\chi_l \approx 0, \quad \text{但し} \quad \lambda \equiv \sqrt{\frac{2}{U''_l(r_l)}} (k^2 - U(r_l)) \quad (2-11)$$

(2-12)

$$r - r_l \equiv \left(\frac{2}{U''_l(r_l)}\right)^{\frac{1}{4}} \xi \quad (2-13)$$

となり調和振動子の Schrödinger 方程式の解は

$$\chi_l(\xi) = Ae^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi), \quad \lambda = 2n+1 \quad (2-14)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-15)$$

であるから

$$k^2 \cong U_l(r_l) + \sqrt{\frac{U'_l}{2}} (2n+1) \quad (2-16)$$

$$U_l(r_l) = \frac{\ell(\ell+1)}{r_l^2} - \frac{g^2 b^2}{(r_l^2 + b^2)^2} \quad (2-17)$$

は (2-7) により

$$U_l(r_l) \approx -\frac{g^2}{b^2} + \frac{4g^2}{b^2} \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2g^2}} + \dots \quad (2-18)$$

同様に

$$U''_l(r_l) = 6 \frac{\ell(\ell+1)}{r_l^4} - 24 \frac{g^2 b^2 r_l^2}{(r_l^2 + b^2)^4} \approx \frac{12g^2}{b^4} \quad (2-19)$$

故に

$$k_{n,l}^2 \approx -\frac{g^2}{b^2} + \frac{4g^2}{b^2} \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2g^2}} + \dots + \sqrt{24} \frac{g^2}{b^2} \frac{n+\frac{1}{2}}{g} + \dots \quad (2-20)$$

k^2, g^2 の定義を代入して

$$E_{n,l} \approx -|V_0| + 2\sqrt{\frac{|V_0|}{M_Q}} \frac{n\sqrt{\ell(\ell+1)}}{b} + \dots + \sqrt{12} \sqrt{\frac{|V_0|}{M_Q}} \frac{n(n+\frac{1}{2})}{b} + \dots \quad (2-21)$$

-488-

伊 藤 森

故に one particle excitationによる mass level として

$$\begin{aligned} M_{n,l} &\approx M_{0,0} + \frac{2\hbar}{b} \sqrt{\frac{|V_0|}{M_q}} [\sqrt{\ell(\ell+1)} + \sqrt{3}(n + \frac{1}{2})] + \dots \\ &\approx M_{0,0} + \frac{2\hbar}{b} (\sqrt{\ell(\ell+1)} + \sqrt{3}(n + \frac{1}{2})) + \dots \quad (2-22) \end{aligned}$$

が得られる。radial vibrationのlevel spacingはrotational level spacing と同程度で後者は $J \rightarrow \sqrt{\ell(\ell+1)}$ なる点を除き前期量子論の結果に一致する。potential 自身が非常に深いのに反し level spacingは $\frac{2\hbar}{b} \lesssim 4m_\pi = 0.56 \text{ Bev}$ の程度である。

§3 結 論

大角散乱の角分布を与える potential は特に $\sim 1/(r^2+a^2)^2$ でなくても、Coulomb potential や Yukawa potential のような $r=0$ で singular なものから置換 $r \rightarrow \sqrt{r^2+a^2}$ で導かれるようなものであれば大勢を再現出来る。Markov 場から導かれる potential は本質的には Yukawa potential に上の置換を行なつたもの：

$$\frac{e^{-\mu r}}{r} \rightarrow \frac{e^{-\mu\sqrt{r^2+a^2}}}{\sqrt{r^2+a^2}} \quad (3-1)$$

であり、これも大角散乱の大勢を記述し得ることは既に示した。これに反し、前節で示した Mass level が $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ に linear に依存することは potential の形 $1/(r^2+a^2)^2$ に特有の性質ではないかと言う疑問が生じる。大角散乱とこの性質が関連があるならば $V(r^2)$ を singular な potential として $V(r^2+a^2)$ なる型の potential の凡てについて上の結論が成立つべきであろう。少なく共大角散乱を再現できるような $V(r^2+a^2)$ について Mass Level が $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ に linear であることが示される必要があろう。此のことをしてらべるために potential として $-V(r^2+a^2)$ を用いて前節の議論を繰返したとするならば、

$$U_l(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - 2M_q V(r^2+a^2) \quad (2-2)$$

の安定軌道

$$\frac{\partial U_l(r)}{\partial r} = -2 \frac{\ell(\ell+1)}{r^3} - 2M_q V'(r^2 + a^2) \times 2r = 0 \quad (3-3)$$

の上の値が問題になる。定常軌道半径 r_l は

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V(r_l^2 + a^2)|} = \frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V(a^2)|} \frac{V'(a^2)}{V'(a^2 + r_l^2)} = r_l^4 \quad (3-4)$$

の解であり

$$r_l^2 = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V(a^2)|}} \rho_l^2 \quad (3-5)$$

とおけば ρ_l^2 は、

$$V'(a^2) \sqrt{V' [a^2 + \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V(a^2)|}} \rho_l^2]} = \rho_l^4 \quad (3-6)$$

の解である。 $V'(a^2 + r^2)$ が $r = 0$ の近傍で連続で

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V'(a^2)|}} \ll 1 \quad (3-7)$$

なら $\rho_l^4 \approx 1$ が解である。此の時

$$r_l^2 \approx \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V(a^2)|}} \quad (3-8)$$

従つて

$$\begin{aligned} U_l(r_l) &\approx \sqrt{\frac{2M_q |V(a^2)|}{\ell(\ell+1)}} \ell(\ell+1) - 2M_q V(a^2 + \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2M_q |V'|}}) \\ &\approx -2M_q V(a^2) + 2\sqrt{2M_q |V'(a^2)|} \sqrt{\ell(\ell+1)} + \dots \end{aligned} \quad (3-9)$$

故に

$$E_l \approx -V(a^2) + \sqrt{\frac{2|V'(a^2)|}{M_q}} \sqrt{\ell(\ell+1)} + \dots \quad (3-10)$$

が得られるであろう。以上のような条件をみたす $V(r^2 + a^2)$ であれば、

-490-

伊 藤 森

$1/(r^2 + a^2)^2$ ではなくても $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ に linear に依存する mass level が得られるであろう。

以上の結果が Chew-Frautschi 流の Trajectory と関係があるかどうかは再に立ち入った分析により明かになるであろうが、大角散乱が単に Gibbs 的統計理論のわく内で説明できるものでなく素粒子の構造と関連があれば面白いことである。

(29/12, 1966)

(文 献)

- 1) J.Orea, Phys. Rev. Letters 12, (1964) 112; Phys. Letters 13(1964) 190.

J.V.Allaby et. al., Phys. Letters 23(1966) 389 (此の文献では統計的 compound state に対する疑いを強調しているが 16.9 Bev/c での $67^\circ \sim 90^\circ$ の角分布が精密に測定された。指數函数の定数はそれをもとにして決められた。これは Orea によってなされた $30^\circ \sim 90^\circ$ の data による値より勾配がゆるやかになることを意味する。此處では大勢を見るためにいろいろの入射運動量に対して決められた Orea のものをとることにする。 90° 迄の data を完全に説明するには Lorentz 収縮した potential を考えることが一つの方法である。

- 2) G.A.Armoudian, D.Ito & K.Mori, Nuovo Cimento 37, (1965) 1739

D.Ito, G.A.Armoudian, & K.Mori, Prog. Theoret. Phys. Suppl. Extra Vol. (1965) 62C

- 3) H.Yukawa, Proceedings of the 12th. Conference on Physics, Solvay Institute, 1961

- 4) M.A.Markov, Nuclear Physics 10, (1959) 140
 A.A.Komar and M.A.Markov, Nuclear Physics 12, (1959) 190
 M.A.Markov, Proceedings of the 1960 International Conf. on High Energy Physics, Rochester.

- 5) Y.Takano, Prog. Theoret. Phys. 26, (1961) 304, 27, (1962) 212.

大角散乱と Quark Potential

-491-

- 6) G.A.Armoudian, D.Ito & K.Mori : Nuovo Cimento 38, (1965)
1895.
- 7) ; Nuovo Cimento 38, (1965)
1903.
- 8) 此の形の potential は、これ迄の物理では原子の Thomas-Dirac-Fermi
模型に於ける偏極ポテンシャルと同じ形である。 A.Abrahamson Phys.
Rev. 123, (1961) 538.
- 9) 吾々の立場では非局所性、相反性等も考慮の上で4次元的形式より非相對
論的移行を論ずる必要があるようと思われる。