Baryon 磁気モーメントのベクトル模型

伊藤大介、森　健寿(埼玉大理工)

Quark 模型でBaryonの磁気モーメントを計算するには、Baryonの波動函数を作つてMoment Operator を挾めばよいが、この操作はあまり簡単でないので、如何なる次第で$\mu_p/\mu_n=-3/2$などの結果が得られるのか?というようなことに直観的な見通しをつけることがむつかしい。そこで、ここではBaryon の磁気モーメントを、異常ゼーマン効果など初等分光学でおなじみの、直観的なベクトル模型を使つて簡単に求めることを試みよう。(このようなことは、もう誰もが知つていることかも知れぬので、或は筆者等の自己教育的意味かも知れないが)この方法によると、Baryonの磁気モーメントが簡単に求まるばかりでなく、Baryon内部に於けるquark の運動をVisualize することが出来、例えば、$\mu_p/\mu_n=-3/2$ が得られるのにどんなことが効いているのかを調べることや、同じ結果を与えるような、もつと別のModel を探索するのにも役立つかも知れないので、ここで述べてみたいと思う。

Baryon内のPara quark はすべてs-軌道にあるので、Baryonの全角運動量$\vec{J}$は3つのquark の角運動量の和

$$\vec{J}=\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_3 \tag{1}$$

で、表わされこれが運動の恒量である。次にそれぞれのquark のChargeをQ_1, Q_2, Q_3とすれば、Quark の磁気モーメントの合成は

$$\vec{M}=\frac{e}{\mathfrak{M}}(Q_1\vec{S}_1+Q_2\vec{S}_2+Q_3\vec{S}_3)\equiv\sum_{i=1}^{3}\mu_0 Q_i\vec{S}_i \tag{2}$$

で、これは一般に、$\vec{J}$に平行ではないから、系の自転に伴い、constant of motion $\vec{J}$のまわりにFig.1 のような、Precession を行う。従つて、時間的平均に於て、系の磁気モーメント$\vec{\mu}$として観測されるものは、ベクトル$\vec{M}$の$\vec{J}$方向の成分

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{J}\cdot\vec{M}}{J(J+1)}\,\vec{J} \qquad (3)$$

である。(1)，(2)から(3)の大きさ

$$\mu = \frac{\vec{J}\cdot\vec{M}}{J(J+1)}\,|\vec{J}| = \frac{\vec{J}\cdot\vec{M}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} \times \frac{1}{2}, \qquad (4)$$

を計算することによつて、磁気モーメントμを求めるのが ベクトル模型である。

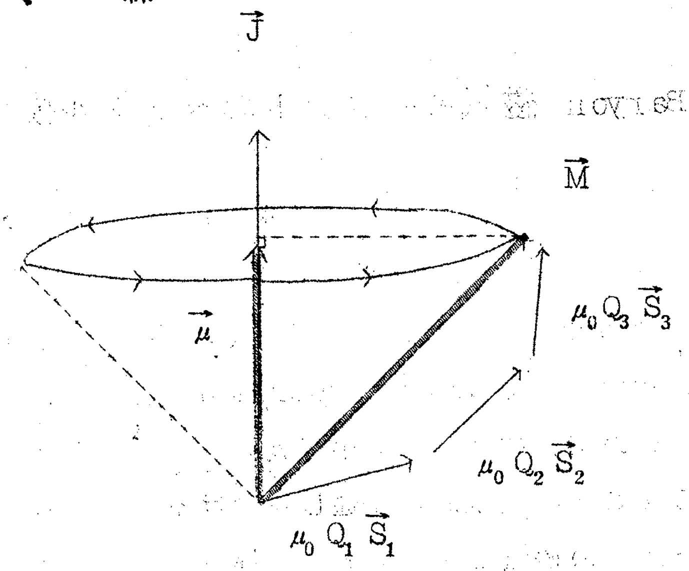


Fig. 1

(A) Proton, Neutron 磁気モーメント：

実例として先づProton. Neutron のMomentを計算してみよう。p，nの組成は(uud)，(ddu)である。ここで、para-quark modelでは、系が2つの同種quark（例えばpの場合の(uu)）を含むとき、波動函数はこれらの入れかえに対して対称であることに注意する。（或は、これをはじめから仮定として考えてもよい） このことは、これら同種2粒子のSpinを合成したものが1であることを意味する。

例えば、protonの中の2つのu-quark のspinの合成は1である。従つて、protonの全角運動量$\vec{J}_p$ は

$$\vec{J}_p = \vec{S}_{u_1} + \vec{S}_{u_2} + \vec{S}_d \equiv \vec{\ell} + \vec{S}_d \qquad (5)$$

但し

$$|\vec{\ell}| \equiv |\vec{S}_{u_1} + \vec{S}_{u_2}| = 1 \qquad (6)$$

で表わされることになる。このことは、protonの波動函数が実際に

$$|p> \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(-2u_\uparrow(1)u_\uparrow(2)d_\downarrow(3) + u_\uparrow(1)u_\downarrow(2)d_\uparrow(3) + u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)d_\uparrow(3))$$

$$= -\frac{2}{3}(u_\uparrow u_\uparrow)d_\downarrow + \frac{1}{3}\frac{u_\uparrow u_\downarrow + u_\downarrow u_\uparrow}{\sqrt{2}} d_\uparrow$$

$$= C_{1,\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}) Y^{m=1}_{l=\frac{1}{2}}(u) Y^{m=-\frac{1}{2}}_{l=\frac{1}{2}}(d)$$

$$+ C_{1,\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}) Y^{m=0}_{l=1}(u) \quad Y^{m=\frac{1}{2}}_{l=\frac{1}{2}}(d)$$

とかけることからもJustify される。

さてこの場合、Momentの合成(2)は

$$\vec{M}_p = \mu_0\left(\frac{2}{3}(\vec{S}_{u_1} + \vec{S}_{u_2}) - \frac{1}{3}\vec{S}_d\right) = \mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{\ell} - \frac{1}{3}\vec{S}_d\right), \tag{7}$$

となる。(5),(7)から$\vec{S}_d$ を消去すれば

$$\vec{M}_p = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\vec{J}_p + \vec{\ell}\right), \quad \left(\mu_0 \equiv \frac{e}{\mathfrak{M}}\right) \tag{8}$$

が得られる。従つて、proton moment μ_p は(4)により

$$\mu_p = \frac{\mu_0}{3/4}\vec{J}_p \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{J}_p + \vec{\ell}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{-\frac{1}{3}\vec{J}_p^{\,2} + \vec{J}_p \cdot \vec{\ell}}{3/4}, \tag{9}$$

となるが、一方

$$\vec{S}_d^{\,2} = (\vec{J}_p - \vec{\ell})^2 = \vec{J}_p^{\,2} + \vec{\ell}^{\,2} - 2\vec{J}_p \cdot \vec{\ell} \tag{10}$$

で、$\vec{S}_d^{\,2} = \vec{J}_p^{\,2} = 3/4$, $\vec{\ell}^{\,2} = \ell(\ell+1) = 2$ であるから

$$\vec{J}_p \cdot \vec{\ell} = 1 \tag{11}$$

である。依つて(9)は

$$\mu_p = \frac{\mu_0}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3/4}\right) = \frac{\mu_0}{2} = \frac{e}{2} \times 1 \tag{12}$$

となる。

次にneutron については、

$$|\vec{\ell}|=|\vec{S}_{d_1}+\vec{S}_{d_2}|=1 \tag{13}$$

$$\vec{J}_n=\vec{\ell}+\vec{S}_u \tag{14}$$

で、Momentの合成は

$$\vec{M}_n=\mu_0\left(-\frac{1}{3}\vec{\ell}+\frac{2}{3}\vec{S}_u\right)=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{J}_n-\vec{\ell}\right) \tag{15}$$

である。従つて

$$\mu_n=\frac{\mu_0}{2}\,\frac{\frac{2}{3}J_n^2-J_n\cdot\ell}{J_n^2} \tag{16}$$

となるが、この場合にも(10),(11)と同様にして、$J_n\cdot\ell=1$であることが示されるから

$$\mu_n=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times\left(\frac{-2}{3}\right) \tag{17}$$

となりよく知られている結果が得られる。

(B)　$\Sigma^{\pm}$, $\Xi^{0,-}$ のMoment

$\Sigma^+\equiv(uus)$ であるから、2個のu-quarkの合成スピンを$\vec{\ell}$($\ell=1$)として、

$$\vec{M}_{\Sigma^+}=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{\ell}-\frac{1}{3}\vec{S}_s\right) \tag{18}$$

$$\vec{J}_{\Sigma^+}=\vec{\ell}+\vec{S}_s\ . \tag{19}$$

これらはprotonの場合の(7),(5)と全く同じであるから、同様にして

$$\mu_{\Sigma^+}=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times 1 \tag{20}$$

が得られることは明かである。

$\Sigma^-\equiv(dds)$ であるから

$$\vec{M}_{\Sigma}=\mu_0\left(-\frac{1}{3}\vec{\ell}-\frac{1}{3}\vec{S}_s\right)=-\frac{\mu_0}{3}\vec{J}_{\Sigma^-} \tag{21}$$

である。この場合は計算するまでもなく

$$\mu_{\Sigma^-}=\frac{\mu_0}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times\left(-\frac{1}{3}\right) \tag{22}$$

であることが明らかである。

$\underline{\Xi^0\equiv(uss)}$ この場合にも2個のs-quarkの合成角運動量ℓが1であるとして、

$$M_{\Xi^0}=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{S}_u-\frac{1}{3}\vec{\ell}\right)=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{J}_{\Xi^0}-\vec{\ell}\right) \tag{23}$$

従つて

$$\mu_{\Xi^0}=\frac{\mu_0}{2}\frac{\frac{2}{3}J_{\Xi^0}^2-J_{\Xi^0}\cdot\ell}{J_{\Xi^0}^2}=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times\left(-\frac{2}{3}\right) \tag{24}$$

$\underline{\Xi^-\equiv(dss)}$

$$\vec{M}_{\Xi^-}=\mu_0\left(-\frac{1}{3}\vec{S}_d-\frac{1}{3}\vec{\ell}\right)=-\frac{\mu_0}{3}\vec{J}_{\Xi^-} \tag{25}$$

であるから、これから直ちに

$$\mu_{\Xi^-}=\frac{e}{2}\times\left(\frac{-1}{3}\right) \tag{26}$$

が得られる。

<u>(C) Λ,Σ^0 のMoment</u>

最後にΛとΣ^0であるが、これらは(uds)なる組成をもち、同種quarkが含まれていないので、以上のような簡単な取扱が許されないように見えるが、そうではない。

<u>ΛのMoment</u> Λの中ではudは、Isospin $=0$ の組合せ、$(ud-du)/\sqrt{2}$, で現われなければならない。従つて、u,dの入れかえに対しては反対称である。このことはu,dのspinの合成は零であることを意味する。従つて、

$$\left.\begin{array}{l}\vec{S}_n+\vec{S}_d=0\\[2ex]\vec{J}_\Lambda=\vec{S}_s\end{array}\right\}\qquad(27)$$

である。また

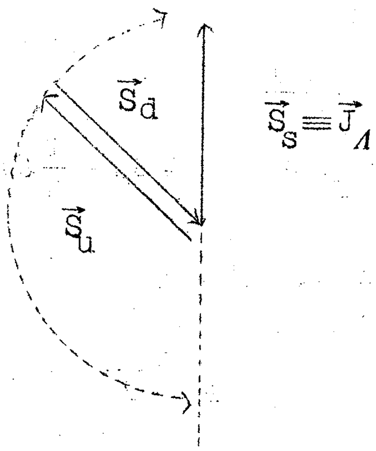
$$\vec{M}_\Lambda=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{S}_u-\frac{1}{3}\vec{S}_d-\frac{1}{3}\vec{S}_s\right)=\mu_0\left(\vec{S}_n-\frac{1}{3}\vec{J}_\Lambda\right)$$

であるから

$$\mu_\Lambda=\frac{\mu_0}{2}\,\frac{-\frac{1}{3}J_\Lambda^2+J_\Lambda\cdot S_u}{J_\Lambda^2}\qquad(28)$$

となる。さて、Fig.2 は、Λ内角運動量の合成関係を示したものである。図2からわかるように、$\vec{S}_u$ と$\vec{S}_d$ の合成は 0 であるから、$\vec{S}_u$ は$\vec{J}_\Lambda$ に対して勝手な方向をとり得るので、$\vec{J}_\Lambda\cdot\vec{S}_n$の時間的平均は零である。従つて(28) は

Fig.2



$$\mu_\Lambda=\frac{\mu_0}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times\left(\frac{-1}{3}\right).\qquad(29)$$

となる。

<u>Σ^0の Moment</u>　Σ^0内では ud は Isospin$=1$ で現われるはずであるから、ud の入れかえに対しては対称、従つて ud の Spin の合成は

$$|\vec{\ell}|\equiv|\vec{S}_n+\vec{S}_d|=1\qquad(30)$$

でなければならぬ。さて合成モーメント

$$\vec{M}_{\Sigma^0}=\mu_0\left(\frac{2}{3}\vec{S}_n-\frac{1}{3}\vec{S}_d-\frac{1}{3}\vec{S}_s\right),\qquad(31)$$

のうち、ベクトル

$$\vec{N}=\frac{2}{3}\vec{S}_u-\frac{1}{3}\vec{S}_d=\frac{2}{3}\vec{\ell}-\vec{S}_d, \tag{32}$$

はFig.3 のように、Vecter $\vec{\ell}$ のまわりにprecession を行つている。従つて $\mu_0\vec{N}$に$-\frac{1}{3}\vec{S}_s$ を合成したものの、このprecssion に対する時間的平均は、$\mu_0\vec{N}$の平均$\overrightarrow{OA}\equiv\mu_l\vec{\ell}$ に$-\frac{1}{3}\vec{S}_s\equiv\overrightarrow{AB}$を合成した$\overrightarrow{OB}$,即ち

$$<\vec{M}_{\Sigma^0}>\equiv\overrightarrow{OB}=\mu_l\vec{\ell}-\frac{\mu_0}{3}\vec{S}_s, \tag{33}$$

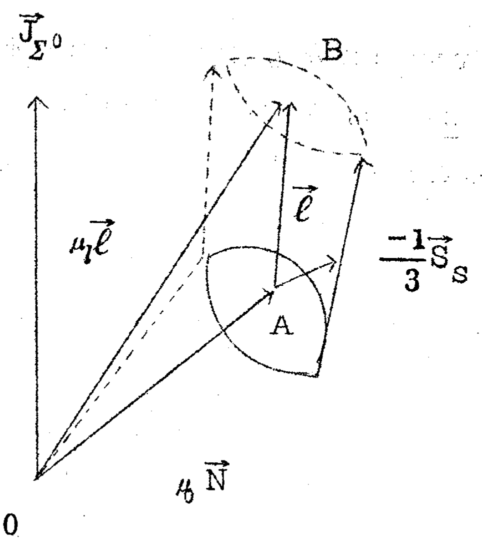


Fig.3

である。但し

$$\mu_l=\mu_0\frac{\ell\cdot N}{\ell^2}=\mu_0\left(\frac{2}{3}-\frac{\ell\cdot S_d}{\ell^2}\right), \tag{34}$$

$(\ell-S_d)^2=S_u^2$ から、$(S_d\cdot\ell)=1$ が得られるので

$$\mu_l=\mu_0\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\mu_0}{6} \tag{35}$$

依つて、

$$<\vec{M}_{\Sigma^0}>=\mu_0\left(\frac{\vec{\ell}}{6}-\frac{\vec{S}_s}{3}\right)=\mu_0\left(-\frac{\vec{J}_{\Sigma^0}}{3}+\frac{\vec{\ell}}{2}\right), \tag{36}$$

が得られる。これから(4)によつてモーメントの大きさを求めれば

$$\mu_{\Sigma^0}=\frac{\mu_0}{2}\frac{J_{\Sigma^0}\cdot\left(-\frac{J_{\Sigma^0}}{3}+\frac{\ell}{2}\right)}{J_{\Sigma^0}^2}=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\left(-\frac{1}{3}+\frac{J_{\Sigma^0}\cdot\ell}{2J_{\Sigma^0}^2}\right)$$

$$=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{e}{2\mathfrak{M}}\times\left(\frac{1}{3}\right), \tag{37}$$

が得られる。

さて、以上のようにして得られた結果はすべて、既に、石田、男沢、下平の

諸氏がOrthodoxな方法で求められたものに完全に一致している。（そけん、Vol. 31 #6, 703.(1965)）同氏等の計算に、このような直感的な描像を附与することが、将来Model の問題を考える上に役立てば幸である。