# 独立粒子模型と磁気モーメント

伊藤大介、森　健寿（埼玉大理工）

素粒子がquark の複合系であると仮定し、これを原子核理論に於ける独立粒子模型の場合のように、複合系内では、各々のquark が共通の平均場Potential 内を独立に運動するものと仮定して、Baryon, Meson 及びその励起状態のMass Levelなどを論ずることが、最近 田地、飯塚、永井等の諸氏によつて大規模に展開され、多くの成果が得られて来た。ここでは同じ模型によつてBaryonの磁気モーメントの問題を取扱うことにする。

Quarkは para 統計に従う Dirac 粒子であると仮定し弱い磁界内に於けるそのHamiltonianは

$$\overline{H}=\int\overline{q(\vec{r})}\,[\vec{\gamma}\cdot(\vec{\nabla}-ieQ\overrightarrow{A(\vec{r})})+M]\,q(\vec{r})dv+\overline{H}int \qquad (1)$$

で与えられるものとする。ここで

$$\left.\begin{array}{l} q(\vec{r})\text{ は Fundamental triplet の場；} u,\ d,\ s \\ Q\text{ はその charge ；} \ 2/3,\ -1/3,\ -1/3 \\ \overline{H}int\text{ は quark 間の相互作用Hamiltonian} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

を表わす。Quark の複合系の状態 $|\Psi>$ 及びエネルギー準位Eは Schrödinger 方程式

$$(E-\overline{H})|\Psi>=0 \qquad (3)$$

の解として定まり、この解に対し

$$E=<\Psi|\overline{H}|\Psi> \qquad (4)$$

である。Quark 間の相互作用$\overline{H}int$については詳しいことは何も解つていないが、ここでは、複合系の状態 $|\Psi>$ に対して

$$<\Psi|\overline{H}\mathrm{int}-\int\overline{q(\vec{r})}(-V(\vec{r}))dv|\Psi>\to \mathrm{Minimum}(\approx 0) \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

ならしむようなScalar又はPseudo scalar場$V(\vec{r})$が存在するものと仮定し、これを平均場Potential と呼ぶことにする。

さて、(4)を

$$E=<\Psi|\int dv\,\overline{q(\vec{r})}[\vec{\gamma}\cdot(\vec{\nabla}-ieQ\vec{A})+M-V(\vec{r})]q(\vec{r})|\Psi>$$

$$+<\Psi|\overline{H}\mathrm{int}-\int dv\,\overline{q}(\vec{r})(-V(\vec{r}))\,q(\vec{r})|\Psi>, \tag{6}$$

と書いた場合、上の仮定(5)によつて、第2項は第1項に比べて充分小さいものとして、無視することにする。

次にquark 場の演算子$q(\vec{r})$を

$$[\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}+M-V(\vec{r})]\psi_n(\vec{r})=\epsilon_n\gamma_4\,\psi_n(\vec{r}), \tag{7}$$

で定義される一体問題の

$$\int\overline{\psi}_m(\vec{r})\gamma_4\psi_n(\vec{r})dv=\delta_{mn} \tag{8}$$

で規格化された固有解$\psi_n(\vec{r})$,（物理的には平均場$V(\vec{r})$内に於ける独立粒子の波動函数）で展開し；

$$q(\vec{r})=\sum_n q_n\psi_n(\vec{r}), \qquad \overline{q}(\vec{r})=\sum_n q_n^+\overline{\psi}_n(\vec{r}), \tag{9}$$

これを(6)に代入すれば

$$E\approx\sum_n\epsilon_n<\Psi|q_n^+q_n|\Psi>-$$

$$-ie\sum_{m,n}<\Psi|q_m^+\,Q\,q_n|\Psi>\int\overline{\psi}_m(\vec{r})\vec{\gamma}\,\psi(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})dv. \tag{10}$$

を得る。ここで

$$N_n\equiv<\Psi|q_n^+q_n|\Psi> \tag{11}$$

はこの複合系内でLevel n にある quark の数を表わす。

従つて(10) の第一項

$$\mathfrak{M} \equiv \sum_n \epsilon_n N_n \tag{12}$$

は、この複合系のMass を与える。（ここで、複合系の重心は原点に静止しているものと仮定している。この仮定は、quark の運動に対する一つの束縛条件になるが、ここでは――― 決してよい近似だとは思わないが――― 多くの独立粒子模型でやつているように、簡単のため、この条件を無視することにする。）(10) の第2項は磁気エネルギーの項で、その構造を見易くするため、電流$\overline{\psi}_m \vec{\gamma} \psi_n$ をGordon分解と類似な方法で、Convection Currentと Spin Current に分解してみる。

そのため、(7)及びそのAdjoint ;

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_j \partial_j \psi_n + (M-V)\psi_n = \epsilon_n \gamma_4 \psi_n \\ &-\partial_j \overline{\psi}_m \gamma_j + \overline{\psi}_m (M-V) = \epsilon_m \overline{\psi}_m \gamma_4 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

のそれぞれに、左及び右から、$\overline{\psi}_m \gamma_i \gamma_4$ 及び $\gamma_4 \gamma_i \psi_n$ を掛けて加え合せれば

$$-\overline{\psi}_m \gamma_4 \gamma_i \gamma_j \partial_j \psi_n +$$

$$+\overline{\psi}_m [\gamma_i \gamma_4 (M-V) - (M-V)\gamma_i \gamma_4] \psi_n = (\epsilon_m + \epsilon_n)\overline{\psi}_m \gamma_i \psi_n \tag{14}$$

が得られる。$V(\vec{r})$ は Scalar 又は pseudo scalar という仮定により、これは $\gamma_i \gamma_4$ と可換であるから、(14) の左辺第2項は零となり

$$(\epsilon_m + \epsilon_n)\overline{\psi}_m \gamma_i \psi_n = -\psi_m^+ \left(\frac{\{\gamma_i, \gamma_j\}}{2} + \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2}\right) \partial_j \psi_n$$

$$+(\partial_i \psi_m^+)\left(\frac{\{\gamma_i, \gamma_j\}}{2} - \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2}\right)\psi_n$$

$$= -\psi_m^+ (\vec{\partial}_i - \overleftarrow{\partial}_i)\psi_n - \partial_j \left(\psi_m^+ \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2} \psi_n\right),$$

が得られる。従つて、電流

$$-ie\bar{\psi}_m\gamma_i\psi_n=\frac{-e}{\epsilon_m+\epsilon_n}\left[\psi_m^+\frac{\overrightarrow{\partial}_i-\overleftarrow{\partial}_i}{i}\psi_n+\partial_j\left(\psi_m^+\frac{[\gamma_i,\gamma_j]}{2i}\psi_n\right)\right] \qquad (15)$$

は Convection Current（右辺第１項）と Spin Current （右辺第２項）に分解される。これを（10）に代入すれば

$$E\approx\sum_n\epsilon_n<\Psi|q_n^+q_n|\Psi>-\sum_{m,n}\frac{e<\Psi|q_m^+Qq_n|\Psi>}{\epsilon_m+\epsilon_n}\times$$

$$\times\int dv\left[\psi_m^+(\vec{r})\frac{\overrightarrow{\partial}_i-\overleftarrow{\partial}_i}{i}\psi_n(\vec{r})A_i(\vec{r})-\psi_m^+(\vec{r})\frac{[\gamma_i,\gamma_j]}{2i}\psi_n(\vec{r})\partial_jA_i(\vec{r})\right] \qquad (16)$$

が得られる。（最後の項で部分積分を行つた）ここで

$$\frac{[\gamma_i,\gamma_j]}{2i}\partial_jA_i=\frac{-1}{2}\frac{[\gamma_i,\gamma_j]}{2i}(\partial_iA_j-\partial_jA_i)=-\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad (17)$$

であること及び磁界$\vec{H}$が一定のとき

$$\vec{A}(\vec{r})=-\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{H}, \qquad (18)$$

であることを使つて、(16) を

$$E\approx\sum_n\epsilon_n<\Psi|q_n^+q_n|\Psi>-\sum_{mn}\frac{e<\Psi|q_m^+Qq_n|\Psi>}{\epsilon_m+\epsilon_n}\times$$

$$\times\int dv\left[\vec{r}\times\left(\psi_m^+\frac{\overrightarrow{\nabla}-\overleftarrow{\nabla}}{2i}\psi_n\right)+2\left(\psi_m^+,\frac{\vec{\sigma}}{2}\psi_n\right)\right]\cdot\vec{H}$$

$$\approx\mathfrak{M}-\vec{\mu}\cdot\vec{H} \qquad (19)$$

とかくことが出来る。但し、

$$\mathfrak{M}\equiv\sum_n\epsilon_n<\Psi|q_n^+q_n|\Psi>=\sum_n\epsilon_nN_n \qquad (20)$$

は系の Mass,

$$\vec{\mu} \equiv \sum_{m,n} \frac{e<\Psi|q_m^+ Q q_n|\Psi>}{\epsilon_m+\epsilon_n}(\vec{L}_{mn}+2\vec{S}_{mn}) \tag{21}$$

は系の磁気モーメントを与える。ここで

$$\vec{L}_{mn} \equiv \int dv\, \vec{r} \times (\psi_m^+ \frac{\vec{\nabla}-\overleftarrow{\nabla}}{2i} \psi_n) = \int dv\, \psi_m^+ (\vec{r}\times\vec{p})\psi_n, \tag{22}$$

$$\vec{S}_{mn} \equiv \int dv\, \psi_m^+ \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi_n \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{mn} \tag{23}$$

は交換関係

$$\sum_n (L^x_{mn} L^y_{nl} - L^y_{mn} L^x_{nl}) = iL^z_{ml} \tag{24a}$$

$$\sum_n (S^x_{mn} S^y_{nl} - S^y_{mn} S^x_{nl}) = iS^x_{ml} \tag{24b}$$

$$\sum_n (\sigma^i_{mn} \sigma^j_{nl} + \sigma^j_{mn} \sigma^i_{nl}) = 2i\delta_{ij}\delta_{ml} \tag{24c}$$

を満足する。このことは、完全関係

$$\sum_n \psi_n(\vec{r})\psi_n^+(\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{25}$$

を用いて容易に示すことが出来る。$\vec{L}_{mn}$は軌動角運動量、$\vec{S}_{mn}$は Spin 角運動量を表わすことは言うまでもない。

さて磁気モーメントの一般式(21)が求まつたので、次にこれによつて、proton, neutron の磁気モーメントを計算してみよう。proton,neutron は3個のquark よりなる複合系で、3個共s-state のGround state $\psi_{os}$ ($ここでn\equiv(0,s)$とおき、0はground state, sはSpin Suffixを表わす)にあるものと仮定されている。従つて、この場合軌道角運動量$\vec{L}_{00}=0$である。これらのことから(20),(21)の一般式は、

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_p &= \epsilon_0 <p|q_{os}^+ q_{os}|p> = 3\epsilon_0 \\ \mathfrak{M}_n &= \epsilon_0 <n|q_{os}^+ q_{os}|n> = 3\epsilon_0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

及び

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mu}_p&=\frac{e}{2\epsilon_0}<p|q^+_{0s}Q\vec{\sigma}_{ss'}\ q_{s'}\ |p>\\ \vec{\mu}_n&=\frac{e}{2\epsilon_0}<n|q^+_{0s}Q\vec{\sigma}_{ss'}\ \ q_{s'}|n>\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

となる。特にp,nのSpinの方向を"3"- 軸にとれば、

$$\left.\begin{aligned}\mu_p&=\frac{e}{2\epsilon_0}<p|q_0^+Q\,\sigma_3 q_0|p>\\ \mu_n&=\frac{e}{2\epsilon_0}<n|q_0^+Q\,\sigma_3\ q_0|n>\end{aligned}\right\}\qquad(27)'$$

$$<p|q_0^+\sigma_3\ q_0|p>=<n|q_0^+\sigma_3\ q_0|n>=1 \qquad (28)$$

である。(Spin Suffix は省略する。(28) は proton, neutron の spin が"3"- 軸の方向を向いていることを表わすものである)、

さて、$q_0^+Q\sigma_3 q_0$ をFundamental triplet (2)に展開すれば

$$q_0^+Q\sigma_3 q_0=\frac{2}{3}u_0^+\sigma_3\ u_0-\frac{1}{3}d_0^+\ \sigma_3 d_0-\frac{1}{3}s_0^+\sigma_3\ s_0$$

$$=u_0^+\sigma_3\ u_0-\frac{1}{3}q_0^+\sigma_3\ q_0 \qquad (29a)$$

$$\text{or}\ =\frac{2}{3}q_0^+\sigma_3\ q_0-d_0^+\sigma_3\ d_0-s_0^+\sigma_3\ s_0 \qquad (29b)$$

とかかれる。|p>, |n> の strangeness = 0 であるから

$$s_0^+s_0|p>=s_0^+\ s_0|n>=0 \qquad (30)$$

従つて、(27)-(30) により、

$$\mu_p=\frac{e}{2\epsilon_0}[<p|u_0^+\sigma_3 u_0|p>-\frac{1}{3}<p|q_0^+\sigma_3 q_0|p>]$$

$$=\frac{e}{2\epsilon_0}[<p|u_0^+\sigma_3\ u_0|p>-\frac{1}{3}] \qquad (31\text{-}p)$$

$$\mu_n = \frac{e}{2\epsilon_0}\left[\frac{2}{3}<n|q_0^+\sigma_3 q_0|n> - <n|d_0^+\sigma_3 d_0|n>\right]$$

$$= \frac{e}{2\epsilon_0}\left[\frac{2}{3} - <p|U^+ d_0^+\sigma_3 d_0 U|p>\right]$$

$$= \frac{e}{2\epsilon_0}\left[\frac{2}{3} - <p|u_0^+\sigma_3 u_0|p>\right] \qquad (31\text{-}n)$$

が得られる。但し、$<n|=<p|U^+$, $|n>=U|p>$, $U^+d_0U=u_0$, $U^+d_0^+U=u_0^+$ でUはIsospin を反転するOperator である。従つて $\mu_p$ も $\mu_n$ も共にproton内u-quark spin 密度 $<p|u_0^+\sigma_3 u_0|p>$ で表わされる。(31-p)と(31-n)から

$$\mu_p + \mu_n = \frac{e}{2\epsilon_0} \times \frac{1}{3} \qquad (32)$$

が得られる。$\mu_p$, $\mu_n$ を別々に求めるには $<p|u_0^+\sigma_3 u_0|p>$ を求めねばならぬ。それには $|p>$ の構造を知らなければならない。Charge + 1, Spin + ½, strangeness = 0 のground state にあるquark の3体系のHartree波動函数 $|p\uparrow>$ は一般に

$$|p\uparrow> = (a u_{0\uparrow}^+ u_{0\uparrow}^+ d_{0\downarrow}^+ + b u_{0\uparrow}^+ u_{0\downarrow}^+ d_{0\uparrow}^+ + c u_{0\downarrow}^+ u_{0\uparrow}^+ d_{0\uparrow}^+)|0>$$

で与えられる。$u_{0\uparrow\downarrow}^+$, $d_{0\uparrow\downarrow}^+$ はGround state のu, d-quark の creation operator を表わすこれにSpin のStep-up operator $S^{(+)}$ を作用させたものは当然零になるべきであるから

$$S^{(+)}|p\uparrow> = 0 = (a+b+c)u_{0\uparrow}^+ u_{0\downarrow}^+ d_{0\uparrow}^+ |0>$$

従つて　$a = -(b+c)$

特に $|p\uparrow>$ が $u_0^+$ について対称であるということを要求すれば、

$$b = c$$

依つて

$$a = -2b$$

となり、残る parameter b は規格化の条件

$$<p\uparrow|p\uparrow>=1$$

からきまり、結局

$$|p\uparrow>=\frac{1}{\sqrt{12}}(-2u_{0\uparrow}^{+}u_{0\uparrow}^{+}d_{0\downarrow}^{+}+u_{0\uparrow}^{+}u_{0\uparrow}^{+}d_{0\uparrow}^{+}+u_{0\downarrow}^{+}u_{0\uparrow}^{+}d_{0\uparrow}^{+})|0>, \tag{33}$$

が得られる。$u_0^+$ を対角化する表示では、

$$u_0^+\sigma_3 u_0=u_{0\uparrow}^+u_{0\uparrow}-u_{0\downarrow}^+u_{0\downarrow}=u_{0\uparrow}^+\frac{\delta}{\delta u_{0\uparrow}^+}-u_{0\downarrow}^+\frac{\delta}{\delta u_{0\downarrow}^+}, \tag{34}$$

で、これから直ちにわかるように

$$(u_0^+\sigma_3u_0)u_{0\uparrow}^+u_{0\downarrow}^+|0>=0,\quad (u_0^+\sigma_3u_0)u_{0\uparrow}^+u_{0\uparrow}^+|0>=2u_{0\uparrow}^+u_{0\uparrow}^+|0>$$

であることに注意すれば

$$u_0^+\sigma_3u_0|p\uparrow>=\frac{1}{\sqrt{12}}(-2)\times 2u_{0\uparrow}^+u_{0\uparrow}^+d_{0\downarrow}^+|0>$$

従つて、

$$<p\uparrow|u_0^+\sigma_3u_0|p\uparrow>=\frac{(-2)^2}{12}\times 2\times\underbrace{<0|u_{0\uparrow}u_{0\uparrow}u_{0\uparrow}^+u_{0\uparrow}^+|0>}_{=2}$$

$$=\frac{4\times 4}{12}=\frac{4}{3} \tag{35}$$

が得られる。これを(31)に代入すれば、よく知られた結果

$$\mu_p=\frac{e}{2\epsilon_0}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{e}{2\epsilon_0} \tag{36-p}$$

$$\mu_n = \frac{e}{2\epsilon_0}\left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right] = -\frac{e}{2\epsilon_0}\ \frac{2}{3} \qquad (36\text{-}n)$$

が得られる。

ところがMass Formula (26) によれば、$\epsilon_0$ は

$$\epsilon_0 = \frac{\mathfrak{M}_p}{3} = \frac{\mathfrak{M}_n}{3} \qquad (26)'$$

により、系のMass で表わされる。これを(36-p),(36-n)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} \mu_p &= \frac{e}{2\mathfrak{M}_p} \times 3 \\ \mu_n &= -\frac{e}{2\mathfrak{M}_n} \times 2 \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

という望ましい結果が得られる。従つて、この独立粒子模型では、Mass Formula (26) がproton neutron のMass を正しく与えるときは、(37) によつて、同時にモーメントも実験とよく一致する結果を与えることになる。

従来quark model ではquark の磁気モーメントe/2M が現われるため、複合系のモーメントの絶対値を説明するには小さすぎ、いろいろな改善策が提案されていた。このModel では複合系のモーメントの一般式にはquark のMass が陽に現われて来なくて、複合系の量だけが現われている。Quark model のいろいろすぐれたprediction にも拘らず、quark 自身が仲々観測されぬこと、quark 自身の奇妙な属性、prediction の過程の物理的意味が明瞭でないこと或は従来の描像と著るしく異ることなどのため、その実在性に疑問が懐かれている。或は熱素説のように、"保存則"(対称性)の不当な実体化であるかも知れない。熱量が保存する限りに於て、熱素説が与えたすぐれたprediction がエネルギー保存則に解消したように、Quark のすぐれたprediction の奇妙な性質や不可思議なprediction の過程は将来もつと解りやすい素直な理論に解消するかも知れない。このようなとき、quark model のprediction の過程を物理的にうけ入れやすい形に整理すとと共に、quark の異常な性質がなるべく陽に現われてこないように定成化することを試みるのも一つの方法ではないかと思つている。ここでやつたことも、な

るべくそのような方向に向いたという趣旨で試みたことである。

最後にいろいろ議論して下さつた下平孟氏に感謝致します。