Collision of Condensed Droplets and Veneziano Amplitude

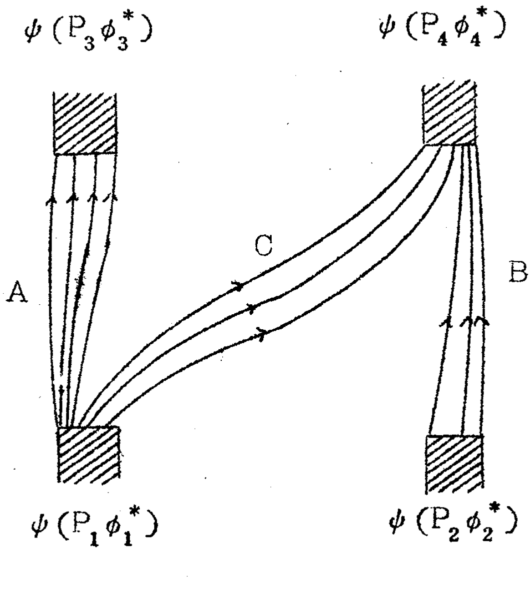
伊　藤　大　介（埼玉大理工）

前論文では量子化された連続体を内蔵する非局所場 $\psi(P,\phi^*)$ で、特に内部場 $\phi(\xi)$ の状態が Mass Operator の最低固有状態 $f_0(\xi)$ に Bose Condensation を起している場合を考え、これから linear Trajectory や、既に考案されたいろいろな構造模型を導き得ることを示した。このとき、場 $\psi(P,\phi^*)$ は内部場 $\phi(\xi)$ を Mass Operator の固有状態 $f_n(\xi)$ で展開した

$$\phi^*(\xi) = \phi^* f_0(\xi) + \cdots\cdots \tag{1}$$

の才1項の振幅 ϕ^* のみで記述される。

さて、ここではこのような Condensed Droplets の散乱を考えよう。$\psi(P,\phi^*)$ は、不特定多数の ϕ －粒子を含むので、衝突の際には図の C －群のような粒子の交換が起る。



ここでは特に、C －群の粒子は t-Channel の一個の Droplet として交換され、A －群と B －群は1団となって s-Channel の一個の Droplet として Propagate するものと仮定すれば、この散乱の散乱振巾は Veneziano 振巾になることを示そう。

2-Droplet Wave Function;

2つの Droplets が存在する状態は

$$\psi(P_1\phi^*)\psi(P_2\phi_2^*)|0\rangle = \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \frac{(\phi_1^*)^{n_1}(\phi_2^*)^{n_2}|0\rangle}{\sqrt{n_1!\,n_2!}}\psi(P_1 n_1)\psi(P_2 n_2) \tag{2}$$

で与えられるが、これは

$$= \sum_{N n_1 n_2} \frac{(\phi_1^*+\phi_2^*)^N|0\rangle}{\sqrt{N!}} \frac{\langle 0|(\phi_1+\phi_2)^N}{\sqrt{N!}} \frac{(\phi_1^*)^{n_1}(\phi_2^*)^{n_2}|0\rangle}{\sqrt{n_1!\,n_2!}}\psi(P_1 n_1)\psi(P_2 n_2), \tag{3}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\phi_1^*+\phi_2^*)^N|0\rangle}{\sqrt{N!}}\left(\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}}\psi(P_1, N-n)\psi(P_2, n)\right)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\phi_1^*+\phi_2^*)^N|0\rangle}{\sqrt{N!}}\psi(P_1 P_2; N) \tag{4}$$

とかくことが出来る。但し

$$\psi(P_1 P_2; N) \equiv \sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}}\psi(P_1, N-n)\psi(P_2, n) \tag{5}$$

は合計N個のϕ -粒子を含む 2-Droplet State で、(2)が

$$\langle 0|\psi^*(P_2\phi_2^*)\psi^*(P_1\phi_1^*)\psi(P_1\phi_1^*)\psi(P_2\phi_2^*)|0\rangle = 1 \tag{6}$$

で規格化されている場合には、(2)と(4)から

$$\sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} |\psi(P_1 n_1)|^2|\psi(P_2 n_2)|^2 = \sum_{N=0}^{\infty}|\psi(P_1 P_2 N)|^2 = 1 \tag{7}$$

が得られるので、$\psi(P_1 P_2 N)$ は規格化された 2-Droplets State であることがわかる。

Propagator of Droplet:

Droplet の Schrödinger 方程式は

$$(P^2+M^2+\omega\phi^*\phi)\psi(P\phi^*)|0\rangle = 0 \tag{8}$$

であるから、その Propagator を

$$\frac{\omega}{P^2+M^2+\omega\phi^*\phi}=\frac{1}{\phi^*\phi-\frac{M^2-s}{\omega}}=\frac{1}{\phi^*\phi+1-\alpha(s)} \tag{9}$$

と定義することが出来る。但し

$$\alpha(s)=\frac{s-M^2}{\omega}+1=(1-\frac{M^2}{\omega})+\frac{s}{\omega}\equiv\alpha(0)+\alpha'(0)s, \tag{10}$$

は Droplet の s-Channel に於けるTrajectory である。t-Channel に於けるTrajectory も

$$\beta(t)=(1-\frac{M^2}{\omega})+\frac{t}{\omega}\equiv\beta(0)+\beta'(0)t \tag{11}$$

で与えられるので、図の C -群の粒子が Droplet として exchange されることは、Propagator

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(\phi_4^{t*})^n|0>}{\sqrt{n!}}\frac{1}{n+1-\beta}\frac{<0|(\phi_1^t)^n}{\sqrt{n!}}+\frac{(\phi_3^{t*})^n|0>}{\sqrt{n!}}\frac{1}{n+1-\beta}\frac{<0|(\phi_2^t)^n}{\sqrt{n!}}\right] \tag{12}$$

で記述される。但し、ϕ^{t*}, ϕ^t は exchange される ϕ -粒子の生成、消滅演算子である。これに反し、A, B 群の粒子が一団となって一つの Droplet として Propagate することは、Propagator

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\phi_3^{*s})^{m-p}(\phi_4^{s*})^p|0>}{\sqrt{(m-p)!p!}}\frac{1}{m+1-\alpha}\frac{<0|(\phi_1^s)^{m-p}(\phi_2^s)^p}{\sqrt{(m-p)!p!}} \tag{13}$$

で記述される。ここで ϕ^{s*}, ϕ^s は A, B 群に属する ϕ -粒子の生成、消滅演算子である。

散乱振幅：

図に対応する散乱振幅は

$$A=\sum_{N,m,n}\psi^*(P_3P_4N)\frac{<0|(\phi_3+\phi_4)^N}{\sqrt{N!}}\sum_{p=0}^{m}\frac{(\phi_3^{s*})^{m-p}(\phi_4^{s*})^p|0><0|(\phi_1^s)^{m-p}(\phi_2^s)^p}{(m-p)!p!(m+1-\alpha)}$$

$$\times\left[\frac{(\phi_4^{t*})^n|0><0|(\phi_1^t)^n+(\phi_3^{t*})^n|0><0|(\phi_2^t)^n}{n!(n+1-\beta)}\right]\frac{(\phi_1^*+\phi_2^*)^N|0>}{\sqrt{N!}}\psi(P_1P_2N) \tag{14}$$

で $\phi_i\equiv\phi_i^s+\phi_i^t$ とおき、ϕ_i^s と ϕ_i^t は独立な場であるとして必要な期待値を計

算することによって得られる。これらは

$$\sum_{p=0}^{m}\frac{<0|(\phi_3+\phi_4)^m(\phi_3^*)^{m-p}(\phi_4^*)^p|0><0|(\phi_1)^{m-p}(\phi_2)^p(\phi_1^*+\phi_2^*)^m|0>}{(m-p)!\,p!}=$$

$$=m!\sum_{p=0}^{m}\frac{m!}{(m-p)!\,p!}=2^m m! \tag{15}$$

$$<0|(\phi_3+\phi_4)^n\frac{(\phi_4^*)^n|0><0|(\phi_1)^n+(\phi_3^*)^n|0><0|(\phi_2)^n}{n!}(\phi_1^*+\phi_2^*)^n|0>=2n!\,, \tag{16}$$

であることから、Aは

$$A=\sum_{m,n}\psi^*(P_3P_4,m+n)\psi(P_1P_2,m+n)\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\frac{2^{m+1}}{(m+1-\alpha)(n+1-\beta)}\,, \tag{17}$$

となる。

さて、Sommerfeld-Watson 変換により、この和を積分で表示すれば

$$A=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C dx\,dy\,\psi_F^*(x+y)\psi_A(x+y)\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}\times$$

$$\times\frac{2^{x+1}}{(x+1-\alpha)(y+1-\beta)}\frac{\pi e^{i\pi x}}{\sin\pi x}\frac{\pi e^{i\pi y}}{\sin\pi y} \tag{18}$$

となる。但し、$\psi_F^*(x+y)\equiv\psi^*(P_3P_4,x+y)$，$\psi_A\equiv\psi(P_1P_2,x+y)$ で、積分路 C は Regge Pole でおなじみのものである。

ここで x+y が大きいとき $|\psi_F^*\psi_A|$ は充分小さいとして " Pole 近似 " を行えば、(18)は

$$A\approx 2^\alpha\psi_F^*(\alpha+\beta-2)\psi_A(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(2+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\frac{\pi e^{i\pi\alpha}}{\sin\pi\alpha}\frac{\pi e^{i\pi\beta}}{\sin\pi\beta}\,, \tag{19}$$

となる。

$$\frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\ \sin\pi\alpha}=\Gamma(1-\alpha) \tag{20}$$

を用いて変形すれば、(19)は

$$A\approx-2^\alpha\psi_F^*(\alpha+\beta-2)\psi_A(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\frac{e^{2\pi i(\alpha+\beta)}-1}{2\pi i}\,, \tag{21}$$

となる。多少余分なFactorがついてはいるが、こうして我々のModel からVeneziano を特徴づける係数

$$\frac{\Gamma(1-\alpha(s))\Gamma(1-\beta(t))}{\Gamma(2-\alpha(s)-\beta(t))} \tag{22}$$

が得られる。しかも $\alpha(s)$, $\beta(t)$ は Droplet の特性として linear である。

Conclusion:

Droplets が衝突して内部 ϕ -物資を exchange する際、exchange される物質自身が一つの Droplet を形成しているという仮定で散乱振幅を計算すれば、Veneziano 振幅が得られる。このModel 自身には改良の余地も多いが、場の理論的なModel からもVeneziano 振幅が導かれる可能性を示すものとして報告した次才である。ここで特に指摘しておくことは、このModel からVeneziano が現われる機構を形式的に見れば

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{1}{(m+1-\alpha)(n+1-\beta)} G(m+n), \tag{23}$$

という単純な式のSommerfeld-Watson 変換の α,β -Pole 近似がVeneziano の式であるということである。したがって、これに帰着するようなModel であるならば、Droplet でなくても Veneziano が得られることになる。

「模型と構造の会」でいろいろ教えて下さった飯塚重五郎さん、宮本米二さんに感謝致します。　　　　(Oct. 28. 1969)