# Linear Trajectory and Oscillation of Cloud Mesons (2)

伊　藤　大　介（埼玉大理工）
E.W.Carriere（ルイジアナ洲立大）

(4) 前回はBaryonのExcited StatesのTrajectaryがlinearであることをCloud Mesons の集団的振動の結果として理解することを試みた。その際、見通しをよくするため、neutral pseudo scalar meson のp-wave cloud だけを考え、先づTrajectoryがlinearであることを示した。次に考えなければならないのはCharge空間に関する問題である。Nucleon のExcited Statesだけをみても、Spin とIsospin の間に著るしいCorrelationが見られるが、このような関係がCloud mesons の振動から期待出来るかどうか問題にしよう。

ここでも見通しをよくするためにModelは出来るだけ簡単にし、Iso vector のpseudo scalar meson のp-wave cloud だけを考えることにしよう。前回の(4)式に対応して

$$E^2\psi = [M^2 + M\int dv\{\pi_\alpha^2(\vec{r}) + \phi_\alpha(\vec{r})(\mu^2 - \Delta)\phi_\alpha(\vec{r}) - 2\phi_\alpha(\vec{r})V_{\alpha\beta}(\vec{r})\times$$

$$\times\phi_\beta(\vec{r})\}]\psi \qquad (15)$$

から出発することにしよう。p-waveのみを考えることにし、適当な直交系 $u_n(r)$ を用いて

$$\phi_\alpha(\vec{r}) \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sum_n \frac{q_{\alpha n}\cdot r}{r}\frac{u_n(r)}{r}$$

$$\pi_\alpha(\vec{r}) \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sum_n \frac{p_{\alpha n}\cdot r}{r}\frac{u_n(r)}{r} \qquad (16)$$

とおけば、(15) は

$$E^2\psi = [M^2 + M\sum_{mn}\{p^2_{\alpha n}\delta_{mn} + q_{\alpha m}\cdot q_{\alpha n}\times$$

$$\times\int_0^\infty dr\, u_m(r)(\mu^2 - \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r^2})u_n(r) -$$

$$-2q_{\alpha mi}\, q_{\beta nj}\int_0^\infty dr\, u_m(r)\, V^{\alpha\beta}_{ij}(r) u_n(r)\}]\psi \qquad (17)$$

となる。

ここでPotential $V^{\alpha\beta}_{ij}(r)$の形が問題になる。その可能性はいろいろあろうし、一般的な考察が必要であろうが、ここでは簡単のためmeson が1個の場合に($3/2$, $3/2$) state で引力を与えるものだけをとることにしよう。そうすれば$V^{\alpha\beta}_{ij}(r)$は次のような形をとることになる。

$$V^{\alpha\beta}_{ij}(r) = (\delta_{\alpha\beta} + \frac{\tau\cdot T_{\alpha\beta}}{2})(\delta_{ij} + \frac{\sigma\cdot L_{ij}}{2})V(r) \qquad (18)$$

ここで**T**,**L**はMeson 場のIsospin 及びspin Operatovs

$$(T^1_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (T^2_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (T^3_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(19)$$

$$(L^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (L^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (L^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

である。(18) を(17) に代入すれば

$$E^2\psi = [M^2 + M\sum_{mn}\{p^2_{\alpha n}\delta_{mn} + q_{\alpha m}\cdot q_{\alpha n}\times$$

$$\times\int_0^\infty dr\, u_m(r)(\mu^2 - \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r^2} - 2V(r))u_n(r) -$$

$$-q_{\alpha mi}(\tau\cdot T_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\sigma\cdot L_{ij}\,\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\tau\cdot T_{\alpha\beta}\,\sigma\cdot L_{ij})q_{\beta nj}\times$$

$$\times\int_0^\infty dr\,u_m(r)\,V(r)\,u_n(r)\}]\psi \qquad (20)$$

となる。これはmeson 場の変数についてbi-linearであるがBaryonのspin, isospin とのCouplingがあるので、直交系$u_n(r)$を適当に選んでnormal modeの振動子集団に変換することは困難である。そこで次のようなHartree 近似的な方法で(20)の解の様子を推察することにしよう。先づ$u_n(r)$として、固有値問題

$$(\mu^2-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r^2}-2V(r))\,u_n(r)=\omega_n^2\,u_n(r). \qquad (21)$$

で定義される直交系をとれば、(20)は

$$E^2\psi=[M^2+M\sum_{n\alpha}\{p_{\alpha n}^2+\omega_n^2\,q_{\alpha n}^2\}-$$

$$-\sum_{mn\alpha\beta}v_{mn}\,q_{\alpha mi}\Gamma_{ij}^{\alpha\beta}\,q_{\beta nj}]\psi \qquad (22)$$

とかける。但し、

$$v_{mn}\equiv\int_0^\infty dr\,u_m(r)\,V(r)u_n(r) \qquad (23)$$

$$\Gamma_{ij}^{\alpha\beta}\equiv\tau\cdot T_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}+\sigma\cdot L_{ij}\,\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\tau\cdot T_{\alpha\beta}\,\sigma\cdot L_{ij} \qquad (24)$$

ここで次のようなHartree 近似を行つてみよう。(22)を

$$E^2\psi=[M^2+M\sum_{n\alpha}\{p_{\alpha n}^4+(\omega_n^2-\delta\omega_n^2)\,q_{\alpha n}^2\}$$

$$+\{M\sum_{n\alpha}\delta\omega_n^2\,q_{\alpha n}^2-\Sigma v_{mn}(q_m\Gamma\,q_n)\}]\psi \qquad (25)$$

とかき、

$$<\psi,[M\sum_{n\alpha}\delta\omega_n^2\,q_{\alpha n}^2-\Sigma v_{mn}(q_m\Gamma\,q_n)]\psi>=0 \qquad (26)$$

ならしめるような

$$E^2\psi = [M^2 + M\sum_{\alpha n}\{p_{\alpha n}^2 + (\omega_n^2 - \delta\omega_n^2)q_{\alpha n}^2\}]\psi \qquad (27)$$

の解を求めることにしよう。

V(r)が適当であつて(21)が、前回にのべたような安定又は準安定な(簡単のため一つの)Bound Stateの解$\omega_0$, $u_0(r)$を有する場合には、cloud mesonsに対する(27),(26)式は

$$E^2\psi = [M^2 + M\sum_{\alpha}(p_{\alpha 0}^2 + (\omega_0^2 - \delta\omega_0^2)q_{\alpha 0}^2)]\psi \qquad (28)$$

$$\delta\omega_0^2 = \frac{V_{00}}{2M}\frac{\langle\psi, q_{\alpha 0 i}\,\tau\cdot T_{\alpha\beta}\,\sigma\cdot L_{ij}\,q_{\beta 0 j}\,\psi\rangle}{\langle\psi, q_{\alpha 0}^2\psi\rangle} \qquad (29)$$

となる。$\delta\omega_0^2$は相互作用による平均的なlevelのズレで、(28)(29)から自己無撞着的にきまる。ここでわかることは、$\delta\omega_0^2 > 0$のとき、(28)の基底状態の固有値$E^2$は低くなり、これがより安定であるためには、$\delta\omega_0^2$がより大きければよいが、そのためには、(29)からわかるように$\tau$と$T$, $\sigma$と$L$が平行であればよいことである。すなわち、系の最低エネルギー状態では

$$J = L + \frac{1}{2}, \qquad I = T + \tfrac{1}{2} \qquad (30)$$

であることが予想される。($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$) Resonance ではそうなつている。

(5) さて(28)を解くことに移ろう。これは本質的には調和振動子の方程式

$$W\psi = \sum_{\alpha i}\omega\, a_i^{*\alpha} a_i^{\alpha}\psi, \qquad \omega \equiv 2\sqrt{\omega_0^2 - \delta\omega_0^2} \qquad (31)$$

を解くことであるが、問題はこれをIsospin 及びSpin 固有状態で解くことにある。それにはPauli-Dancoff等のようにして角変数の分離を行うのが一般的であろうが、この場合にはStrong Coupling Theory の場合のような簡単化が期待出来ないので、初等的な方法で進むことにする。

いま$I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$なるNucleon の«Lsobar»だけを問題にすれば、(30)に

より、T＝0,1なるCloud の状態が問題になる。先づT＝0なるCloud を問題にしよう。一般にcloud のFock 空間は

$$\psi> = F(a_i^{*\alpha})|0> \tag{32}$$

で与えられるが、$a_i^{*\alpha}$ で作られるIsoscalar は

$$\sum_\alpha a_i^{*\alpha} a_j^{*\alpha} \equiv T_{ij}, \quad \sum_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_i^{*\alpha} a_j^{*\beta} a_k^{*\gamma} \equiv S_{ijk} \tag{33}$$

に限られる。ここで$T_{ij}$ は対称テンソル、$S_{ijk}$ はijkについて、Totally antisymmetric, 従つて、meson のps 性と併はせるとこれはScalar量である。依つてT＝0状態のFock Operator $F_0$ $(a_i^{*\alpha})$ は$T_{ij}$ とSの函数

$$F_0(a_i^{*\alpha}) = F(T_{ij}, S) = \sum_{mn} C_{mn} S^m \underbrace{T_{ij} T_{kl} \cdots\cdots T_{yz}}_{n} \tag{34}$$

である。T＝0 Cloud があらゆるmeson の入れかえについて対称であれば、$F_0$はSを含んではならない。従つて(34)は

$$F_0(a_i^{*\alpha}) = \sum_n C_{on} T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz} \tag{35}$$

となる。ここで

$$T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz} \equiv (T_{ij} T_{kl} \cdots T_{yz})_{sym} \tag{36}$$

で$(\ )_{sym}$は ij…yz についての対称化を意味する。

さて、$T^{(2n)}$は$a_i^{*\alpha}$ を2n 個含むので、

$$\sum_{\alpha p} \omega a_p^{*\alpha} a_p^{\alpha} T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz}|0> = 2\omega n\, T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz}|0> \tag{37}$$

従つて、(35)の各項から作られる状態

$$\psi_{2n} \equiv T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz}|0> \tag{38}$$

は固有値W＝2ωn に属する(31)の固有状態である。すなわち、Isospin T＝0のCloud のエネルギーは振動子の偶数Levels 0, 2ω, 4ω, …に限られることになる。

次に状態(38)の角運動量をしらべるため、対称テンソル $T^{(2n)}_{ij\cdots yz}$ から逐次 Trace を分離して行けば その結果は

$$T^{(2n)}_{ijkl\cdots yz}=\left(\sum_{r=0}^{n} Cr\,\underbrace{\delta_{ij}\,\delta_{kl}\cdots\cdots}_{r\text{個}}\,\underbrace{Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots yz}}_{2n-2r}\right)_{sym} \tag{39}$$

とかけるであろう。ここで $Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots yz}$ は $2n-2r$ 階の対称テンソルで $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{i}$ を $2n$ 個含むがTrace はもたない。すなわち、

$$\sum_{p=1}^{3} Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots p\cdots p\cdots yz}=0 \tag{40}$$

$$\sum_{\alpha,p}\omega\,\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{p}\,a^{\alpha}_{p}\,Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots yz}|0\rangle=2\omega n\,Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots yz}|0\rangle \tag{41}$$

さて、よく知られているように、Trace を除いた対称テンソルは廻転群の既約表現によつて変換されるから、(39)の展開はCloud の部分波展開にほかならない。そしてその各項から作られる状態

$$\psi_{n,r}=Y^{(2n-2r)}_{tu\cdots yz}|0\rangle \tag{42}$$

は角運動量

$$L=2n-2r\equiv 2m,\ (m=0,1,2,\cdots,n) \tag{43}$$

の固有状態である。このようにして、(41)と(43)から isospin $T=0$ なるCloud のエネルギー及び角運動量は

$$\begin{aligned} W&=\omega(L+2r),\\ L&=2m, \end{aligned} \tag{44}$$

で与へられ、$r(=0,1,2,\cdots)$ はRadial Vibrationの量子数であることがわかる。

次にIsospin $T=1$の場合を考えよう。この場合にもCloud がMesonの入れかえに対して対称であるとすれば、そのFock operator $F_1(\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{i})$ は一

般に

$$F_1(\overset{*}{a}{}_i^{\alpha})=(\overset{*}{a}{}_i^{\alpha}F_0)_{sym.}=\sum_{n=0}^{\infty}C_nT_{\alpha,ijk\cdots yz}^{(2n+1)} \tag{45}$$

で与えられる。従つて、上と同じ議論をくりかえすことにより、Isopin 1の Cloud のエネルギー及び角運動量は

$$\begin{aligned} &W=\omega(L+2r) \\ &L=2m+1,\ (m=0,1,2\cdots) \end{aligned} \tag{46}$$

で与へられることがわかる。

(6) 以上の結果、(30), (44), (46)を総合すれば、Nucleon のExcited Statesの(Mass)$^2$ 及びspin Jは

$$\begin{aligned} &E^2=M^2+M\omega(L+2r) \\ &J=L+\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{47}$$

で与えられ、

$$L=\begin{cases} \text{even} & \text{for} \quad I=1/2 \\ \text{Odd} & \text{for} \quad I=3/2 \end{cases} \tag{48}$$

である。Radial Vibrationの量子数r=0なる最低Levelsについて、$M^2=0.4(\text{Gev})^2$, $M\omega=1.1(\text{Gev})^2$ とおいた上の結果を実験結果と共に表示したものが次の表である。

| 理論 | | | | 実験 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | I | $J^p$ | $E^2=0.4+1,1L$ | 粒子(Mass) | $E^2$ | I | $J^p$ |
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}^+$ | 0.4 | N(940) | 0.88 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}^+$ |
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}^+$ | 1.5 | Δ(1236) | 1.53 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}^+$ |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}^+$ | 2.6 | N(1688) | 2.85 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}^+$ |
| 3 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{2}^+$ | 3.7 | Δ(1920) | 3.69 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{2}^+$ |
| 4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{9}{2}^+$ | 4.8 | ——— | | | |
| 5 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{2}^+$ | 5.9 | Δ(2420) | 5.81 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{2}^+$ |
| 6 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{13}{2}^+$ | 7.0 | ——— | | | |
| 7 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{15}{2}^+$ | 8.1 | Δ(2850) | 8.12 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{15}{2}^+$ |
| 8 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{17}{2}^+$ | 9.2 | ——— | | | |
| 9 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{19}{2}^+$ | 10.3 | Δ(3230) | 10.4 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{19}{2}^+$ |

我々の結果はN(1400)($I=\frac{1}{2}$, $J^p=\frac{1}{2}^+$, $E^2=1.96$) を除いて、Rosenfeldの表に記載されているPositive Parity のExcited Statesをすべて網羅している。このほかに多数のnegative Parity のExcited Statesがあるが、我々のModelからこれを導くことは出来ない。それはpseudo vecter (p-wave のps meson operator)を組合せて、negative parityのstate を作るのがむつかしいからである。p-waveだけのCloud というのは何れにしても簡単化がひどすぎる。S-wave, d-waveなどを含めるとか、$\pi-\pi$相互作用、特に最近Caruttrers 等が考えている$\pi N' \rightleftarrows \rho\Delta$ などのmechanismがnegative parity の状態に自然な説明を与えるかも知れない。(Feb. 28, 1968)