Phenomenological Mass Operator Approach to the Internal Structure of Particles

伊　藤　大　介（埼玉大理工）
E.W.Carriere（ルイジアナ州立大）

1. Introduction

粒子の性質をその内部構造によるものと考えてこれを分析しようとするとき、最も正統的なApproachは、粒子を既知又は仮設的粒子の複合系と考え、場の量子論によつて取扱うことであろうが、これは相対論的Bound State Problem の解決という困難な問題に導く。現在この問題は2体のLadder近似であるB.S. 方程式でさへ、非現実的な簡単な特例を除いてその解が得られていない。この方法によつて現実の実験事実を軽快に分析出来るようになるには更にこの理論の発展を待たなければならないであろう。

ところが一方に於ては粒子の内部構造に関する知識を提供していると思はれる実験資料が急激に増加しつつある。これらを粒子の内部構造との密接な関連に於て於て統一的に分析整理出来る、より有効で軽快な理論的な枠が欲しい時である。特に内部に関しては、その力学まで含めて未知として、実験事実に基いてこれらを決定して行こうという現象論的な立場からは、暫定的でもよいから直接内部構造に結びつく現象整理の枠が欲しい処である。S- 行列の方法も観測される事実を現象論的に関係づける点では、この考へにとつても有用な方法であり得るが内部構造との結びつきが必づしも直接的でなく、適用にも限界があるように思はれる。

そこで、ここではもう一つのApproachの方法としてMass Operatorの方法を考えることにする。構造ある系が素粒子の如く振舞うには、その状態ψが非斉次Lorentz 群（I.H.L.G.）の既約表現によつて変換されるものでなければならない。即ちψはI.H.L.G.のCasimir Operators の固有状態

$$\left.\begin{array}{l} P_\mu^2 \psi = -\mathfrak{M}^2 \psi \\ \\ w_\mu^2 \psi = J(J+1)\psi \\ \\ w_3^2 \psi = M\psi \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}1)$$

でなければならない。ここでMass Operator $\mathfrak{M}$は4次元空間に於ける系の重心運動方向

$$n_\mu \equiv P_\mu / \sqrt{-P^2} \qquad (1\text{-}2)$$

及び内部力学変数(相対座標ξ_μ, その共役運動量p_μ. etc.) の函数であり得る。ここで若し$\mathfrak{M}$が与えられれば、(1-1)の第1式

$$[P_\mu^2 + \mathfrak{M}^2(n_\mu, p_1\xi_1, p_2\xi_2, \cdots, p_N\xi_N, \zeta)]\psi(x_\mu, \xi_1 \cdots \zeta) = 0, \qquad (1\text{-}3)$$

は重心静止系 $n_\mu = (0.0.0.1)$ では

$$[-\frac{d^2}{ds^2} + \mathfrak{M}^2(\bar{p}_1\bar{\xi}_1, \bar{p}_2\bar{\xi}_2, \cdots\cdots)]\psi(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\cdots\cdots; s) = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

となり、これは系の固有時sを•時間的発展•のParameterとする内部運動方程式となり、ψが(Mass Operator)^{2}の固有値$(M_\lambda - i\Gamma_\lambda/2)^2$の固有状態の一つ

$$\psi_\lambda(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots; s) = e^{\pm i(M_\lambda - i\frac{\Gamma_\lambda}{2})s}\, u_\lambda(\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2\cdots\cdots) \qquad (1\text{-}5)$$

であれば

$$(M_\lambda - \frac{i\Gamma_\lambda}{2})^2 u_\lambda(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots) = \mathfrak{M}^2 u_\lambda(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots) \qquad (1\text{-}6)$$

は内部構造をきめる4次元的固有値問題となり、これにより、粒子のMass LevelやForm Factorが決まると共に、(1-3)は系の重心運動に関する Klein-Gordon の方程式

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \chi_\mu^2}+\left(M_\lambda-i\frac{\Gamma_\lambda}{2}\right)^2\right]\psi_\lambda=0 \qquad (1.7)$$

を与える。

このようにMass Operatorは量子力学に於けるHamiltonianの役割を演じ現象論的なApproach では$\mathfrak{M}^2$を仮定して粒子の個性や相互作用についての実験事実の統一的な記述整理、又は逆に$\mathfrak{M}^2$を経験的に決定することによって、内部力学系に関する描像、力学を得ようと試みるわけである。ここでPhenomenological Mass Operator の方法というのはこのようなApproachの方法を意味する。

これは別に新しいことではなく、(1)のようなLorenlz 群の構造方程式を相対論的力学方程式にしようとする考は既にDirac が提唱している処であり、$\mathfrak{M}^2$を現象論的又は先験的に与えることは湯川先生のNon-local Field Theoryにそのお手本がある。またB.S. 方程式

$$\left[\left\{\left(\frac{P}{2}+p\right)^2+M^2\right\}\left\{\left(\frac{P}{2}-p\right)^2+M^2\right\}-V(\xi)\right]\phi(X,\xi)=0 \qquad (1\text{-}8)$$

も型式的ではあるが

$$(P^2+\mathfrak{M}_+^2)(P^2+\mathfrak{M}_-^2)\phi(x,\xi)=0 \qquad (1\text{-}9)$$

とかけるので、これもMass Operator

$$\mathfrak{M}_\pm^2(n_\mu, p_\mu, \xi_\mu)\equiv(2M)^2+4p_\mu^2-8(n.p)^2\pm 4\sqrt{V(\xi)+4(n\cdot p)^4-4(n\cdot p)^2(p_\mu^2+M^2)} \qquad (1\text{-}10)$$

に関する4次元的固有値問題と見ることが出来る。

このように内部構造の問題では$\mathfrak{M}^2$はHamiltonianの役割を演じ、(1-4)

は4次元的内部状態をきめるSchrödinger方程式に対応するが、この式が"時間的発展"のParameters に関する2階の微分方程式である点、この対応は完全でない。この対応を完全にするためにはこれを1次化し

$$-i\frac{d\psi}{ds}=\mathfrak{M}\psi \tag{1-11}$$

の形にする必要がある。これは、Klein-Gordon 方程式(1-3)を1次化して、Dirac 方程式に相当するものに移ることを意味する。この際P_μ^2 のみならず、Mass Operator自身をも1次化することになる。このようにして我々は(1-3)よりも更に基本的と思はれるSpinor方程式を得ることになる。Dirac の場合と異り、この場合Mass はOperatorなので、これを1次化するために内部自由度に応じて多成分のSpinorの連立方程式が得られる。このようにして1次化されたMass Operatorが内部Hamiltonianに相当するものであり、現象論的にこれを決めることが出来れば、それが内部力学のEffective Hamiltonian であり、その解釈によつて内部構造の描像や力学が得られることになろう。これらについては後節で具体例を示すことにする。

2. Choice of Mass Operator

現象論的Approachでは実験事実とにらみ合せ乍ら$\mathfrak{M}$又は$\mathfrak{M}^2$ をTrial and error で決めることになるが、それでは現在の高エネルギー実験事実はGlobalにはどのようなChoiceをSuggest しているであろうか？ SU_6やQuark Modelによる現象整理、高エネルギー散乱断面積の加算性などは、第零近似として独立粒子模型がよさそうに見える。独立粒子模型から出発出来ることは理論的にも好都合である。IHLG.の表現は自由粒子についてはよく知られているが、相互作用がある場合は一般に困難な問題になる。しかし独立粒子模型は相互作用は考慮に入れても準自由粒子的であるから、問題は容易になる。事実後に述べるようにこの場合系の運動方程式はBargmann Wigner型の方程式になる。

独立粒子模型は高エネルギー反能に対しては良さそうに見えるが、定常状態の問題では粒子のLevel が多く出すぎる。Quark Model ではこれを避ける

ため、One particle excitation等の仮定を行うが、Impulse 近似的な高エネルギー現象の取扱いなら兎に角、定常問題で粒子が1個だけ、それも著るしく高いLevel に励起されていることは考えにくい。しかし現象的には、粒子のMass がTrajectory という1 parameter 集団を作ることから見て、活動している自由度が少いことは確からしい。そこで、高エネルギー現象に対しては独立粒子的構造を示し、而も定常問題では自由度が減少することを統一的に理解するには、定常問題では少数の集団座標のみが重要であると考えるのが自然であろう。粒子のMass が1つの角運動量変数に支配されていることから考え、この集団運動は、独立粒子系全体としての集団廻転であろうと考えられる。

角運動量Lで集団回転を行つているMass M，半径a程度の系のエネルギーは$L(L+1)/Ma^2$ であるから linear なTrajectory を示さないがこれは系が剛体的($a=\mathrm{const}$)な場合であつて、系がa^p に比例するエネルギーで凝集しているときは、遠心力とこの凝集力の釣合は

$$U(a)=\frac{L(L+1)}{Ma^2}+\kappa^2 a^p \tag{2-1}$$

が極小のときに保たれ、$\partial U/\partial a=0$ から、釣合の位置を求めれば、

$$a=\left(\frac{2}{pK^2M}\right)^{\frac{1}{p+2}}[L(L+1)]^{\frac{1}{p+2}} \tag{2-2}$$

となり、半径が角運動量と共に変化し、その結果Uの極小値は

$$U_{\min}=\left[\frac{1}{M}\left(\frac{p\kappa^2M}{2}\right)^{\frac{2}{p+2}}+\kappa^2\left(\frac{2}{M\kappa^2p}\right)^{\frac{p}{p+2}}\right]\left(1+\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{p+2}}L^{\frac{2p}{p+2}} \tag{2-3}$$

となる。即ちLの大きな処で$U_{\min}\sim L^{\frac{2p}{p+2}}$であるが、系のMass がUに比例するModelでは実験が示すTrajectory

$$\mathfrak{M}^2=\mathfrak{M}_0^2+\alpha L \tag{2-4}$$

が得られるためには$p=2/3$でなければならぬし、$\mathfrak{M}^2$ がUに比例するModel

の場合にはp＝2，即ち、凝集力がHook の力であればよい。$a^{2/3}$ に比例する凝集力エネルギーは特殊なCloud Modelから得られぬこともないが、平衡点附近では一般にHook の法則による力が現われるので、先づMass Operatorの2乗が内部座標ξの2乗に比例するOscillator Modelから考えはじめるのが自然であろう。$\mathfrak{M}^2$ がUに比例することは直観的でないかも知れないが、これがどのような力学系を表はすかという問題は、後に$\mathfrak{M}^2$ を1次化した上で考えることにする。

Trajectoryの問題に示唆され、我々は先づ$\mathfrak{M}^2$が内部座標ξ_μ 及びそれに共役な運動量p_μ の2次型式で与えられる場合を考えよう。はじめ簡単のため、$\mathfrak{M}^2$は1組のξ_μ, p_μのみによる場合を考える。（1-1）のw_μ^2 がGood Quantum Numberであるような$\mathfrak{M}^2$の一般型は

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_0^2 + a\tilde{p}_\mu^2 + b\tilde{\xi}_\mu^2 + 2h\,\tilde{p}_\mu\tilde{\xi}_\mu + a'\,\bar{p}_\mu^2 + b'\bar{\xi}_\mu^2 + 2h'\,\bar{p}_\mu\bar{\xi}_\mu \tag{2-5}$$

で与えられる。但し

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_\mu &= n_\mu(n\cdot p) \\ \tilde{p}_\mu &= p_\mu - n_\mu(n\cdot p) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \bar{\xi}_\mu &= n_\mu(n\cdot\xi) \\ \tilde{\xi}_\mu &= \xi_\mu - n_\mu(n\cdot\xi) \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

である。系の状態が安定な粒子に対応するためには$\mathfrak{M}^2$は負の固有値をもつてはならない。それには2次型式(2-5) ………………………………………………………………は正値定号であればよい。また(2-5)のGyroscopic terms $\tilde{p}_\mu\tilde{\xi}_\mu$，$\bar{p}_\mu\bar{\xi}_\mu$は適当な正準変換で除去されるので、$n_\mu \equiv (0, 0, 0, 1)$ 系では、^{2}は

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_0^2 + a(\mathbf{p}^2 + \nu^2\xi^2) + a'(p_0^2 + \nu'^2\xi_0^2), \tag{2-7}$$

$$a, a', \nu^2, \nu'^2 \geq 0$$

であるとして一般性を失はない。ここで

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A}_\mu &\equiv \tilde{p}_\mu - i\nu\tilde{\xi}_\mu \\ \tilde{A}^*_\mu &\equiv \tilde{p}_\mu + i\nu\tilde{\xi}_\mu\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\bar{A}_\mu &\equiv \bar{p}_\mu - i\nu'\bar{\xi}_\mu \\ \bar{A}^*_\mu &\equiv \bar{p}_\mu + i\nu'\bar{\xi}_\mu\end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

とおけば、(1-3) は

$$[-\Box + \mathfrak{M}_0^2 + \frac{a}{2}(\tilde{A}^*_\mu \tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\mu \tilde{A}^*_\mu) - \frac{a'}{2}(\bar{A}^*_\mu \bar{A}_\mu + \bar{A}_\mu \bar{A}^*_\mu)]\phi = 0, \tag{2-9}$$

となる。これはOscillator 的Bilocal Fieldと同じで、その解はよく知られている。特にそのGround State のForm FactorはGauss分布で、Momentum Transfer t の函数としては、$t \ll m_0^2$ではGauss型、$t \gg m_0^0$ では$1/t$である。その結果Scalar local field exchange による大角散乱をBorn 近似で計算すれば大角散乱の断面積はt^{-6} に比例するというSerber Modelと同じ結果が得られるのが著るしいことである。このことについては後に述べる。

散乱の中間状態に(2-9)で記述される状態が現われるとき、散乱振巾はRegge Pole をもつこともよく知られている。(2-9) に現われる parameter a, a′ は内部振動体のeffective mass に関するparameter であるが、Regge pole に対しては、このparameter は、従来その意味がわからなかつたいわゆる"Scaling parameter" の役割を演ずる。$a = a'$, $\nu = \nu'$ のとき内部振動は球対称、即ちO(4) Symmetricになる。このときRegge Familyは2つの整数で特徴づけられる。これらについては後に述べる。以下簡単のため$a = a' = 1$とする。

3. Linearization

次に§1 の(1-11)式附近で述べた理由により、(2-9) を1次化しよう。それには

$$(\mathfrak{M}_0 - i\gamma\cdot P)(\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P) = \mathfrak{M}_0^2 + P_\mu^2 \tag{3-1}$$

$$\tilde{A}^*_\mu \tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\mu \tilde{A}^*_\mu - \bar{A}^*_\mu \bar{A}_\mu - \bar{A}_\mu \bar{A}^*_\mu =$$

$$=(\gamma\cdot\tilde{A}+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})(\gamma\cdot\tilde{A}^*-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)+(\gamma\cdot\tilde{A}^*+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)(\gamma\cdot\tilde{A}-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}), \tag{3-2}$$

であることに注意する。そうすれば(2-9) は

$$[(\mathfrak{M}_0 - i\gamma\cdot P)(\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P) + \frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})(\gamma\cdot\tilde{A}^*-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}^*+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)(\gamma\cdot\tilde{A}-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})]\psi=0, \tag{3-3}$$

とかけるが、$\gamma\cdot\tilde{A}$, $\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}$ etc. と $\gamma\cdot p$が反可換なので、これは、

$$[\ {}_0 + i\gamma\cdot P + \frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})\frac{1}{\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P}(\gamma\cdot\tilde{A}^*-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}^*+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)\frac{1}{\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P}(\gamma\cdot\tilde{A}-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})]\psi = 0 \tag{3-4}$$

とかける。ここで2つの補助Spinor場 χ_1, χ_2 を導入すれば、この結果は

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P)\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})\chi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}^*+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)\chi_2 = 0\\
&(\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P)\chi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}^*-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*)\psi = 0\\
&(\mathfrak{M}_0 + i\gamma\cdot P)\chi_2 + \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A})\psi = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

とかくことが出来る。このようにして一次化された式

$$(i\Gamma_\mu P_\mu + \mathfrak{M})\Xi = 0 \tag{3-6}$$

が得られる。但し、

$$\Xi \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_0 & \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}+i\gamma_5\gamma\cdot\tilde{A}), & \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}^*+i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}^*-i\gamma_5\gamma_1\bar{A}^*) & \mathfrak{M}_0 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma\cdot\tilde{A}-i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}) & 0 & \mathfrak{M}_0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}7)$$

である。こうして、我々はCoupleした3種のDirac 場の方程式を得る。この方程式の解釈は最後にまわし、$\mathfrak{M}^2$ が何組かの内部変数による場合に(3-4)又は(3-5)を拡張しよう。

N個の粒子が重心のまわりに平均Potential

$$U(\xi) = -|U(0)| + b\tilde{\xi}^2 + b'\bar{\xi}^2 \qquad (3\text{-}8)$$

で束縛されている独立粒子系を考えよう。各粒子は運動量$\frac{P}{N}+p_n$で独立にこの平均potential内を運動している。(3-4) は1個の粒子の外場内での運動方程式とみることが出来るから、この独立粒子系の個々の運動方程式は

$$\Big[i\gamma\cdot\frac{P}{N} + \mathfrak{M}_0 - |U(0)| + \frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}_n + i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n)\times$$

$$\times\frac{1}{i\gamma\cdot P/N + \mathfrak{M}_0 - |U(0)|}(\gamma\cdot\tilde{A}^*_n - i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}^*_n) + \cdots\cdots\Big]\psi = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

で、その解は

$$u_n\left(\frac{P}{N}\right)e^{iP\cdot x/N}\, f_{N_n}(\tilde{\xi}_n \bar{\xi}_n), \quad n = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3\text{-}10)$$

但し、$u_\rho(P)$ はMass $m_0 = \mathfrak{m}_0 - |U(0)|$ なるDirac方程式の解、$f_N(\tilde{\xi}_n \bar{\xi}_n)$ は4次元調和振動子の解である。従つて独立粒子系の波動函数は(3-10)の積

$$\psi_{\rho_1 \cdots \rho_N}(x, \xi_1 \cdots \xi_N) = e^{iP\cdot x} \prod_{n=1}^{N} u_{\rho_n}\left(\frac{P}{N}\right) f_{N_n}(\xi_n) \qquad (3\text{-}11)$$

で与えられこれは

$$\begin{aligned}
&\Big[i\gamma\cdot\frac{P}{N} + m_0 + \frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}_n + i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n)\frac{1}{m_0 + i\gamma\cdot\frac{P}{N}}(\gamma_n\tilde{A}_n^* - i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n^*) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\gamma\cdot\tilde{A}_n^* + i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n^*)\frac{1}{m_0 + i\gamma\cdot\frac{P}{N}}(\gamma_n\tilde{A}_n - i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n)\Big]_{\rho_n\sigma_n} \times \\
&\quad \times \psi_{\rho_1 \cdots \rho_{n-1}\sigma_n\rho_{n+1}\cdots\rho_N}(x, \xi_1, \cdots, \xi_N) = 0, \qquad (3\text{-}12)
\end{aligned}$$

を満足する。ここで$\tilde{A}, \bar{A}, \tilde{A}^*, \bar{A}^* \to 0$ とおけば(内部構造をもたぬ場合)(3-12)式はBargmann-Wignerの方程式にReduceする。(3-12)に左から

$\left[-i\gamma\frac{P}{N} + m_0\right]$ をかければ

$$\left[\left(\frac{P}{N}\right)^2 + m_0^2 + \frac{1}{2}(\tilde{A}_\mu^{*n}\cdot\tilde{A}_\mu^n + \cdot\,\tilde{A}_\mu^n\cdot\tilde{A}_\mu^{*n}) - \frac{1}{2}(\bar{A}_\mu^{n*}\bar{A}_\mu^n + \bar{A}_\mu^n\bar{A}_\mu^{*n})\right]\psi_{\rho_1\cdots\rho_N} = 0$$

$$(3\text{-}14)$$

が得られる。この方程式はSpin Independentであるからψは

$$\psi \approx \psi_{\text{orbit}}\ \chi_{\text{spin, charge}} \qquad (3\text{-}15)$$

の部分に分離し、ψ_{orbit}はForm Factorを与え、若しQuark Modelをとれば、$\chi_{\text{spin, charge}}$は従来のQuark系のspin charge波動函数となる。次に(3-14)から集団回転を分離してMass Levelを求めねばならぬがその前に電磁相互作用について考える。

4 Electromagnetic Interaction, Magnetic Moment

磁気モーメントを問題にするため、重心静止系で外磁界**H**を記述する電磁場

$A_\mu(x)$ との相互作用を

$$\frac{P_\mu}{N} \rightarrow \frac{P_\mu}{N} - eQ_n A_\mu(x) \qquad (4\text{-}1)$$

によつて導入しよう。但し、eQ_n はn番目の粒子のchargeである。これにより(3-6)に相当する式は

$$\left[i\Gamma_\mu\left(\frac{P_\mu}{N} - eQ_n A_\mu(x)\right) + \mathfrak{M}_N \right]_{\rho_n \sigma_n} \Xi_{\rho_1 \cdots \rho_{n-1} \sigma_n \rho_{n+1} \cdots \rho_N} = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

となり、補助場を消去して

$$\left[i\gamma\cdot\left(\frac{P}{N} - eQ_n A(x)\right) + m_0 + \frac{1}{2}\left(\gamma\cdot\tilde{A}_n + i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n\right)\frac{1}{m_0 + i\gamma\left(\frac{P}{N} - eQ_n A\right)}\left(\gamma\cdot\tilde{A}_n^* - i\gamma_5\gamma\cdot\bar{A}_n^*\right)\right.$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots \right] \psi_{\rho_1 \cdots\cdots \rho_N} = 0, \qquad (4\text{-}3)$$

が得られる。ここで$\tilde{A}_n$, $\bar{A}_n$ はA_n の$n_\mu \equiv \left(\frac{P}{N} - eQ_n A\right)_\mu \Big/ \sqrt{-\left(\frac{P}{N} - eQ_n A\right)^2}$ に垂直及び平行である。これから

$$\left[m_0^2 + \left(\frac{P}{N} - eQ_n A\right)^2 - \frac{e}{N}\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\,Q_n + \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_\mu^{n*}\tilde{A}_\mu^n + \tilde{A}_\mu^n\tilde{A}_\mu^{n*} - \bar{A}_\mu^{n*}\bar{A}_\mu^n - \bar{A}_\mu^n\bar{A}_\mu^{n*}\right)\right]_{\rho_n \sigma_n} \times$$

$$\times \quad \psi_{\rho_1 \cdots\cdots \sigma_n \cdots\cdots \rho_N} = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

が得られる。磁界のみのときは$P_\mu A_\mu = 0$ であるからe^2 の項を無視すれば

$$\left[(Nm_0)^2 + P_\mu^2 - e\sum_n \vec{\sigma}_{\rho_n \sigma_n}\cdot Q_n \vec{H} + \frac{N}{2}\sum_n \left(\tilde{A}_\mu^{n*}\tilde{A}_\mu^n + \cdots\right)\right] \psi_{\rho_1 \cdots \rho_N} = 0. \qquad (4\text{-}5)$$

が得られる。Mass Operatorの固有値M_λ に属する固有状態をψ_λとすれば重心静止系で(4-5)は

$$(E^2 - M_\lambda^2)\psi_\lambda = -e\sum_n \vec{\sigma}_n\cdot\vec{H}\,Q_n\,\psi_\lambda$$

従つて、

$$E \approx M_\lambda - \frac{e}{2M_\lambda} < \psi_\lambda | \sum_n \sigma_n Q_n | \psi_\lambda > \cdot H \qquad (4\text{-}6)$$

となり、この系の磁気モーメント $\vec{\mu}_\lambda$ は

$$\vec{\mu}_\lambda = \frac{e}{2M_\lambda} < \psi_\lambda | \sum_n \sigma_n Q_n | \psi_\lambda > \qquad (4\text{-}7)$$

で与えられる。Mass Formula の与える M_λ が現われる点を除き Quark Model の場合と同じ式が得られる。

5. Model について

次に集団回転を仮定してMass Level を求める問題を取扱う予定であつたが、既に長くなりすぎた上に、この問題は多少計算を要するのと、Model の性質から考えて、これから linear Trajectory が得られることは殆んど自明なので、これは、相互作用の問題と共に次回にまわし、最後に、一次化されたMass Operatorの解釈、特に他のModelとの関係について考察する。

我々は $\mathfrak{M}^2$ を仮定するとき、集団回転する振動子の系というModel を描いたが、既に§1で述べたように、Hamiltonianの自乗に相当するはづの $\mathfrak{M}^2$ についてModelを描くことはためらわれる。ところがこれを1次化した式(3-12)もあるModelをSuggest しているように見える。たとえば、A, A^* をBoson 場と見れば、(3-12)は3種のSpinor場とVector Boson のV±A型相互作用とみられる。Boson 場と異るのは A, A^* はpropagateする場ではなく、従つてその自由場のエネルギー A^*A が1次化された型式には現われてこないことである。この点 A, A^* はSpurion 的である。A, A^* をBoson 場でおきかえたのではこの自由場エネルギーが邪魔してLinear Trajectory が得られない。これが前回のCloud Model のまともな定式化で困つたことである。

自由場のエネルギーに相当するものが現われぬので

$$<\mathfrak{M}> = \mathfrak{M}_0 \qquad (5\text{-}1)$$

であるが、$\mathfrak{M}^2$ の期待値

$$<\mathfrak{M}^2> = \mathfrak{M}_0^2 + <A^* A> \qquad (5\text{-}2)$$

は(5-1)の2乗と異る。従つて1次化された描像では、我々の振動はFluctuation 的である。この点くりこみ理論、特に南部氏の超電導Modelによく似ている。というのは(3-12)の分母を"有理化"すれば

$$\left(m_0 + \frac{i\gamma\cdot P}{N}\right)_{\rho_n\sigma_n}\left(1 + \frac{\frac{N}{2}(\tilde{A}_n^*\tilde{A}_n + \cdots\cdots)}{(m_0 N)^2 + P^2}\right)\psi_{\rho_1\cdots\cdots\sigma_n\cdots\cdots\rho_N} = 0 \qquad (5\text{-}3)$$

が得られる。今迄我々が1次化と云つていたのは形の上のことで、実際は高次化であつたことになる。この式が示すように、我々の理論からMass Spectrumが現われる機構は、Nambu 理論のnon-trivial solution が現われるのと全く同じである。またPais-Uhlembeck 型の式(5-3) はBound Mesonを伴うBaryonのB-S方程式の近似と見ることが出来るかも知れない。

このように1次化された$\mathfrak{M}$についてもあるModel が描けるなら、$\mathfrak{M}^2$についてModel を描くことも発見的手段としては不当ではないだろう。同等にModel が描けるならちがいは、電磁波がFamiliarな人にとつては1階のMaxwell がModel的であるというだけのことになろう。

但し、似てはいても$\mathfrak{M}^2$のOscillator Modelと、$\mathfrak{M}$のvector Boson Model は全く同等ではなく、Boson の自由場エネルギーを捨象しなければ$\mathfrak{M}^2$でのOscillator Modelは得られない。現在いろいろな実験分野の整理から個別的なModel がいろいろ提出されている。そしてこれらのModelはimplicitにはよく似た面を具えている。しかし、それらを比較するのに必要な共通のBaseがなかつたように思はれる。これらは実験事実の一面をよく記述するものであるから、若し共通のBase によつて表現されるならば、互に変換によつて近似的に移り合うものであろう。但し、各Modelは完全でないから互に不要な面を捨象し合わなければ同等にはなり得ないだろう。我々が考えているのは、Mass Operatorをこのような Base として用いようということである。またこのようにして高エネルギー実験を、S-Matrixなどよりも更に直接に内部構造の現象論的決定に役立たせることが出来るであろう。