Separable Non-local Field and Condensation Model (1)

伊　藤　大　介（埼玉大理工）

1　Separable Non-local Field

前論文では一般非局所場方程式

$$\left.\begin{aligned} &\left[-i\frac{\partial}{\partial s}+M_n^2(P,\xi_1p_1\cdots\xi_np_n)\right]\psi_n(P,\xi_1\cdots\xi_n,s)=0 \\ &-i\frac{\partial\psi_n}{\partial s}=(P^2+M^2)\psi_n\,,\qquad (n=0\ (\text{局所}),\ 1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

の系で、Mass Operator M_n^2 が特に調和振動子に分解される場合

$$M_n^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(p_i^2+\omega q_i^2-3\omega) \tag{2}$$

を考えたが、ここではこれを更に一般化した

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial s}+\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}^2(\xi_i,p_i)\right]\psi_n(P,\xi_1\cdots\xi_n,s)=0 \tag{3}$$

のように、Mass Operator が Separable な場合を考える。この場合にもこの系が連続体を内蔵する非局所場と同等であるという前論文の結論はそのまま成り立つことが示される。即ち $\phi(\xi)$, $\phi^*(\xi)$ を

$$[\phi(\xi),\phi^*(\xi')]=\delta^3(\xi-\xi'),\qquad [\phi,\phi]=[\phi^*,\phi^*]=0 \tag{4}$$

を満足する Operator とし、汎函数

$$\psi(P,\phi^*,s)=\psi_0(Ps)+\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\xi_1\cdots d^3\xi_n\frac{\phi^*(\xi_1)\cdots\phi^*(\xi_n)}{\sqrt{n!}}\psi_n(P,\xi_1\cdots\xi_n s), \tag{5}$$

を導入すれば、$\psi(P\phi^*s)$ が運動方程式

$$i\frac{\partial\psi(P\phi^*s)}{\partial s}=[\mathfrak{M}^2,\psi(P\phi^*s)] \tag{6}$$

を満足することは前論文の場合と全く同様にして示される。但し

$$\mathfrak{M}^2=\int\phi^*(\xi)\,\mathfrak{M}^2(\xi p)\,\phi(\xi)\,d^3\xi \tag{7}$$

で、これは内部連続体のMass Operator である。また

$$L_\lambda = \int \phi^*(\xi)\,(\xi \times p)_\lambda\, \phi(\xi)\, d^3\xi \tag{8}$$

は

$$[L_\lambda, L_\mu] = i\,\epsilon_{\lambda\mu\nu} L_\nu\,, \qquad (\lambda\mu\nu) = (123) \tag{9}$$

を満足し

$$[L_\lambda, \psi(P\phi^* s)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\xi_1 \cdots d^3\xi_n \frac{\phi^*(\xi_1)\cdots\phi^*(\xi_n)}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \times p_i)_\lambda \psi_n(P, \xi_1 \cdots \xi_n s) \tag{10}$$

であるから、これは連続体の全角運動量である。

2 Condensation Model

Mass Operator $\mathfrak{M}^2(\xi p)$ の固有値問題

$$\mathfrak{M}^2(\xi p)\, f_N(\xi) = \omega_N\, f_N(\xi) \tag{11}$$

によって定義される完全直交系 $f_N(\xi)$ を用いて $\phi(\xi)$ を展開すれば

$$\phi(\xi) = \sum_N a_N f_N(\xi) \tag{12}$$

の a_N, a_N^* は

$$[a_N, a_{N'}^*] = \delta_{NN'}\,, \qquad [a_N, a_{N'}] = [a_N^*, a_{N'}^*] = 0 \tag{13}$$

を満足し、Droplet の Mass Operator 及び角運動量は

$$\mathfrak{M}^2 = \int \phi^*(\xi)\, \mathfrak{M}^2(\xi p)\, \phi(\xi)\, d^3\xi = \sum_N \omega_N a_N^* a_N \tag{14}$$

$$L_\lambda = \sum_{NN'} a_N^* L^\lambda_{NN'} a_{N'}\,, \qquad L^\lambda_{NN'} \equiv \int f_N^*(\xi)(\xi \times p)_\lambda f_{N'}(\xi)\, d^3\xi \tag{15}$$

となる。従って "One particle state" $\psi(Pa^*)|0\rangle$ に対する Schrödinger 方程式は

$$[P^2 + M^2 + \sum_N \omega_N a_N^* a_N]\,\psi(Pa^*)|0\rangle = 0 \tag{16}$$

となり

$$a_N = \frac{p_N - i\omega_N q_N}{\sqrt{2\omega_N}}, \quad a_N^* = \frac{p_N + i\omega_N q_N}{\sqrt{2\omega_N}} \tag{17}$$

とおけば (16)は

$$[P^2 + M^2 + \frac{1}{2} \sum_N (p_N^2 + \omega_N^2 q_N^2 - \omega_N)] \psi(P, q) | 0 > = 0, \tag{18}$$

となる。これはOscillatorを内蔵する非局所場である。

$N \equiv (n, \ell, m)$とし、特に$n=0$, $\ell=0, 1$が低エネルギーレベルであるとすれば、ϕ-核子がこれらLower Levels に Bose Condensation を起した方が系のエネルギーを低くするから、観測される粒子は、このようなCondensed State に対応するであろう。そしてこれらのCondensed States は

$$E^2 \psi(E, q) | 0 > = [M^2 + \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 - \omega_0) + \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2 - \omega)] \times$$
$$\times \psi(E, q) | 0 >, \tag{19}$$

で記述される。但し $q^2 \equiv \sum_{m=-1}^{+1} q_{01m}^2$ などとおいた。

また、このState の角運動量は

$$L = \sum_{m,m'} a_m^* a_m \int Y_{1m}^* (\hat{\xi}) (\xi \times p) Y_{1m'} (\hat{\xi}) d\Omega \tag{20}$$

で記述され、これに

$$Y_{1m}(\hat{\xi}) \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\hat{\xi} \cdot e_m), \quad \begin{cases} e_{+1} \equiv (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0) \\ e_0 \equiv (0, 0, 1) \\ e_{-1} \equiv (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0) \end{cases} \tag{21}$$

を代入して積分すれば

$$L = \frac{1}{i} a^* \times a = q \times p \tag{22}$$

が得られる。依って、問題は附加条件

$$L^2\psi(E,q)|0>=\ell(\ell+1)\psi(E,q)|0>$$
$$L_3\psi(E,q)|0>=\quad m\quad\psi(E,q)|0> \tag{23}$$

のもとで (19) を解くことになる。これは本質的には3次元調和振動子を極座標で解くことであって、その解としてMass Formula

$$E^2=M^2+n_0\,\omega_0+2\omega(2n_r+\ell) \tag{24}$$

が得られる。

このようなRising Trajectoryが得られるのは、Bose Condensed SystemがOscillator的であることによるもので、内部力の性質、例えばそれが非常に深いPotentialで記述されるものでなければならぬとか、Hoock の法則に従うものでなければならぬとかいうこと、とは無関係である。どんな粒子でもTrajectoryがlinearであるのは、その原因がこのような一般的なものであることを示唆していると解すべきではないだろうか？

3 Possible inner Bose Spinorと南部、高林模型

Droplet の Mass Operator $\mathfrak{M}^2$ が Bose 統計に従う Spinor

$$[q_\tau(\xi),q^*_\omega(\xi')]=\delta_{\tau\omega}\delta^3(\xi-\xi'),\quad \text{Others}=0 \tag{25}$$

で量子化される場合

$$\mathfrak{M}^2=\int q^*_\tau(\xi)\ \ \mathfrak{M}^2_{\tau\omega}(\xi,p)\,q_\omega(\xi)\,d^3\xi \tag{26}$$

を考えよう。Bose Spinorは異議もあろうが、Bose Condensation を問題にするためにはやむを得ぬ仮定であり、また内部空間ではSpinと統計の関係に導く基礎も疑わしいかも知れないというのが一つのExcuseでもある。

この場合もMass Operatorの固有値問題

$$\mathfrak{M}^2_{\tau\omega}(\xi,p)\,f^N_\omega(\xi)=\omega_N\,f^N_\tau(\xi) \tag{27}$$

で定義される完全系で $q_\tau(\xi)$ を展開すれば

$$q_\tau(\xi)=\sum_N q_N f_\tau^N(\xi) \tag{28}$$

の q_N, q_N^* は

$$[q_N, q^*_{N'}]=\delta_{NN'}, \qquad \text{Others}=0 \tag{29}$$

を満足し、Droplet の Mass Operator，角運動量は

$$\mathfrak{M}^2=\sum_N \omega_N q_N^* q_N \tag{30}$$

$$J=\int q^*(\xi)(\xi\times p+\frac{\sigma}{2})q(\xi)d^3\xi$$

$$=\sum_{NN'} q_N^* q_{N'}(L_{NN'}+\frac{\sigma_{NN'}}{2}) \tag{31}$$

となる。但し $L_{NN'}+\dfrac{\sigma_{NN'}}{2}\equiv\int f_N^*(\xi)(\xi\times p+\dfrac{\sigma}{2})f_{N'}(\xi)d^3\xi$

$N\equiv(n,\ell,m,s)$ で、最低Level が $n=0$, $\ell=0$ であるとして、特に Bose Spinor がこの最低状態 $f_\tau^S(\xi)$ に Condense しているときは

$$\mathfrak{M}^2=\sum_{s=1}^{2}\omega q_s^* q_s \tag{32}$$

$$J=\frac{1}{2}\sum_{s,t} q_s^* \sigma_{st} q_t \tag{32'}$$

となる。そして問題は

$$(M^2-E^2+\sum_s \omega q_s^* q_s)\psi(Eq^*)|0>=0 \tag{33}$$

を附加条件；

$$J^2\psi(q^*)|0>=J(J+1)\psi(q^*)|0> \tag{34}$$

$$J_3\psi(q^*)|0>= M \psi(q^*)|0> \tag{35}$$

のもとで解くことになる。

恒等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sigma^i_{pq}\sigma^i_{rs}=2\delta_{ps}\delta_{qr}-\delta_{pq}\delta_{rs}$ (36)

と交換関係(29)を用い

$$J^2=(\frac{q_s^* \sigma_{st} q_t}{2})^2=\frac{q_s^* q_s}{2}(\frac{q_t^* q_t}{2}+1) \tag{37}$$

とかくことが出来るから

$$\frac{1}{2} q_s^* q_s \psi(q^*)|0\rangle=J\psi(q^*)|0\rangle \tag{38}$$

をみたす $\psi(q^*)|0\rangle$ は (34) を満足する。これと (35) から、$q_s\equiv\frac{\partial}{\partial q_s^*}$ とおいて

$$\frac{1}{2}(q_1^*\frac{\partial}{\partial q_1^*}+q_2^*\frac{\partial}{\partial q_2^*})\psi(q^*)|0\rangle=J\psi(q^*)|0\rangle$$

$$\frac{1}{2}(q_1^*\frac{\partial}{\partial q_1^*}-q_2^*\frac{\partial}{\partial q_2^*})\psi(q^*)|0\rangle=M\psi(q^*)|0\rangle$$

が得られ、これから

$$\left.\begin{aligned} q_1^*\frac{\partial}{\partial q_1^*}\psi(q^*)|0\rangle=(J+M)\psi(q^*)|0\rangle \\ q_1^*\frac{\partial}{\partial q_2^*}\psi(q^*)|0\rangle=(J-M)\psi(q^*)|0\rangle \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

が得られる。これを解けば、特解

$$\psi_{JM}(q^*)|0\rangle=N_{JM}\, q_1^{*(J+M)}\, q_2^{*(J-M)}|0\rangle \tag{40}$$

が得られる。規格化条件

$$\langle 0|\psi_{JM}^* \psi_{JM}|0\rangle=1 \tag{41}$$

によって N_{JM} を決めれば、見馴れた結果

$$\psi_{JM}(q^*)|0\rangle=\frac{q_1^{*(J+M)} q_2^{*(J-M)}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}}|0\rangle \tag{42}$$

が得られる。これを (33) に代入すれば

$$E_J^2\psi_{JM}(q^*)|0\rangle=(M^2+2\omega J)\psi_{JM}(q^*)|0\rangle \tag{43}$$

となり、Mass Spectrum

$$E_J^2 = M^2 + 2\omega J \tag{44}$$

が得られる。(42)は一般に

$$\psi_{JM}(pq^*)|0> = C^{JM}_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{2J}}(P)\, q^*_{\rho_1} q^*_{\rho_2} \cdots q^*_{\rho_{2J}} |0> , \tag{45}$$

という形にかけるが、これは南部－高林理論でおなじみの波動函数である。

若しMass Operator が

$$\mathcal{M}^2 = \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} \sum_{\tau,\omega=1,2} \int q^{*\alpha}_{\tau}(\xi)\, \mathfrak{m}^{2\alpha\beta}_{\tau\omega}(\xi,p)\, q^{\beta}_{\omega}(\xi)\, d^3\xi , \tag{46}$$

であるような構造をもつDroplet が存在するならば、これからQuark Model が導かれるだろう。そしてその際、Bose Condensation の代りにOkayama Condensation が問題になるかも知れない。我々の目的は、Quark Model のような高エネルギー現象の現象論から生れたいろいろなModel から、逆にここで述べたような形式をたどることによって、内部連続体のMass Operator の構造、そして窮極的には内部構造そのものを知ろうということである。

(Oct. 17. 1969)