有限温度ＲＰＡ方程式の拡張と巨大共鳴におけるエントロピー効果

埼玉大・理　田辺孝哉

Abstract

An extended form of the thermal random phase approximation (ETRPA) equation is derived by applying the variational principle to the grand potential. The ETRPA equation is a realization of the desirable formalism which is exact within the framework of the random phase approximation (RPA) at finite temperature ($T \neq 0$), and smoothly goes to the RPA equation in the limit of $T \to 0$. It describes an interplay between the collective excitations and the entropy effect. The ETRPA matrix precisely cincides with the stability matrix for the thermal Hartree-Fock-Bogoliubov (THFB) solution. The entropy effect is associated with the fluctuation of the occupation numbers in each single-particle (or quasiparticle) level determined by the mean field equation (i.e. the THFB equation). Based on a simple model, it can be shown that the entropy effect causes some shifts of excitation energies of the ph, pp and hh configurations, and it may slightly affect the temperature-dependent evolution of the giant resonance shape.

§1. 緒　論

原子核構造を記述するための現在の微視的理論とその取り扱い方法、特に、平均場近似を基礎とした励起状態の記述法が本当に正しいものであるか、その検証の対象として高く励起された原子核状態を考えることができる。その目的のためには、温度ゼロ（$T=0$）では通常の式と一致することが保証される必要であり、その点でもＨＦＢ理論とそれに基づくＲＰＡの有限温度版は自然な拡張である。近年、有限温度原子核上に励起される巨大共鳴、特に、^{120}Sn 等の Sn 同位核 [1-6] や ^{208}Pb[7,8] を中心に E1 巨大共鳴（ＧＤＲ）の励起エネルギー及び幅の温度依存性に関するかなりの実験的情報が得られている。興味深い特徴は、温度に伴って共鳴幅が急激な増大し、^{120}Sn に見られる例では、$kT = 5$MeV で幅が飽和し、より高温で減少に転じる。共鳴エネルギー中心はあまり温度にはよらない。但し、実験的に系のエネルギーを確定し、それから温度を決定する際に不確定が伴う [9]。

共鳴エネルギーと幅の温度依存性を巨視的模型に基づいて核変形の量子及び熱揺動から説明する試みがれてきたが、変形度にわたる平均を取る際に、確率分布と自由エネルギーを適宜選んで物理量をフィットさせ得たとしても [10-13]、その物理的な意味は必ずしも明確なものとはならない。その理由は、共鳴幅の温度依存についての正しい解釈は、温度を導入した微視的理論、ＲＰＡ（ＴＲＰＡ）方程式に基づくべきものだからである。実際、準粒子像でのＴＲＰＡには、粒子ー孔 (ph) 励起の他に、粒子ー粒子 (pp) 及び孔ー孔 (hh) 励起が自動的に含まれる [14-16]。この事実を具体的に示すのが Phonon Damping Model (PDM) による計算結果である [17-18]。ＰＤＭは doorway としての 1^- と 2^+ phonon を導入し、それ等が Woods-Saxon potential に従う単一粒子準位にある核子と結合する模型である。$T=0$ のＧＤＲの強度分布を合わせるパラメータを用いると、^{120}Sn 及び ^{208}Pb に見られるＧＤＲのエネルギー、幅の温度依存性、強度分布、生成断面積の全てに亘って実験データを見事に

再現する。その根底にあるのは、有限温度で Fermi 分布が滑らかになることから、pp 及び hh 配位の励起の自由度からの寄与が急激に増大するという微視的機構である。

巨大共鳴の微視的理論としてはＴＲＰＡが有力であるが、ＴＲＰＡにはエントロピーからの寄与が含まれないために、ＴＲＰＡ行列がＴＨＦＢ解 [19-22] の安定性を記述する行列に対応しない [23]。本稿では、この問題がどのように解決されるかを示したい。§2 ではＴＨＦＢ方程式の解の安定性行列を与え、§3 では Thermo Field Dynamics[24,25] を応用することにより、Bloch-Messiah の定理 [26] を有限温度の場合に拡張し、更にＨＦＢに現れる秩序変数を有限温度の場合には、再定義する必要があることを示す [27]。これは、準粒子準位を占有する粒子数の温度効果による揺動に関係する。§4 では、エントロピーを含む熱力学ポテンシャルに変分法を適用して拡張温度ＲＰＡ（ＥＴＲＰＡ）方程式を導出する [28]。§5 では、簡単な模型を用いて、巨大共鳴にエントロピーがどのような影響を及ぼすか推測し、§6 に結論を与える。

§2. 有限温度ＨＦＢ（ＴＨＦＢ）解の安定性

定式化の基礎に有限温度ＨＦＢ（ＴＨＦＢ）を考える [19,20]。厳密な統計演算子 $\hat{W}^{\rm true}$ が与えられれば、熱力学的ポテンシャル（グランド・ポテンシャル）$F^{\rm true}$ とエントロピー $S^{\rm true}$ は

$$F^{\rm true} = < \hat{H}' > - TS^{\rm true}, \quad S^{\rm true} = -k{\rm Tr}(\hat{W}^{\rm true}\ln\hat{W}^{\rm true}) \tag{1}$$

となる。ただし、原子核の問題としては、$\hat{H}'$ は核子数と角運動量に関する拘束条件を課した補助 Hamiltonian

$$\hat{H}' = \hat{H} - \lambda_\pi \hat{Z} - \lambda_\nu \hat{N} - \omega_{\rm rot}\hat{J}_X\,, < \hat{Z} > = Z\,, < \hat{N} > = N\,, < \hat{J}_X > = \sqrt{I(I+1)} \tag{2}$$

を考える。現実の問題では、$\hat{W}^{\rm true}$ の中の $\hat{H}'$ 替わりに、準粒子演算子の双一次形式（必ず対角化できる）を選んで、試行統計演算子

$$\hat{W} = \frac{\exp(-\beta\hat{H}^{\rm eff})}{{\rm Tr}\exp(-\beta\hat{H}^{\rm eff})}, \qquad H^{\rm eff} \equiv \sum_\mu E_\mu \alpha_\mu^\dagger \alpha_\mu \tag{3}$$

を仮定し、E_μ を変分パラメータとする。一方、準粒子を単一粒子演算子に結ぶ一般化 Bogoliubov 変換

$$c_k = \sum_\mu (u_{k\mu}\alpha_\mu + v_{k\mu}^*\alpha_\mu^\dagger), \quad c_k^\dagger = \sum_\mu (v_{k\mu}\alpha_\mu + u_{k\mu}^*\alpha_\mu^\dagger) \tag{4}$$

を通じて、Hamiltonian に変分パラメータ $\{u_{k\mu}, v_{k\mu}, u_{k\mu}^*, v_{k\mu}^*\}$ が導入される。

このようにして得られた近似的な熱力学的ポテンシャル F は、一般に次の Peierls の不等式を満たし、厳密な $F^{\rm true}$ より必ず大きい [20]。

$$F^{\rm true} \le F = {\rm Tr}(\hat{W}\hat{H}') - TS\,, \quad S = -k{\rm Tr}(\hat{W}\ln\hat{W}) \tag{5}$$

この不等式に基づいて変分法を適用することによってＨＦＢ方程式が導かれる [19,20]。その際注意すべきことは、変分の結果として変分パラメータ E_μ は準粒子エネルギーと解釈され、それ等の変分は準粒子数分布関数の変分と以下のように結びつく。

$$\delta f_\mu = -\beta f_\mu(1-f_\mu)\delta E_\mu\,, \quad < \alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu > \equiv f_\mu \delta_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\exp\beta E_\mu + 1} \tag{6}$$

また、単一粒子密度 ρ_{lk} と対相関密度 κ_{kl} の以下の定義を通じて、全ての物理量が温度に依存することになる。

$$
\begin{aligned}
\rho_{kl} &= (\rho^\dagger)_{kl} \equiv < c_l^\dagger c_k > = \left[v^*(1-f)v^{\mathrm{tr}} + ufu^\dagger\right]_{kl}, \\
\kappa_{kl} &= -\kappa_{lk}^* \equiv < c_l c_k > = \left[v^*(1-f)u^{\mathrm{tr}} + ufv^\dagger\right]_{kl}
\end{aligned} \tag{7}
$$

以下のように、一般化 Bogoliubov 変換係数の変分の替わりに、Thouless 変換係数 $\{c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}\}$ を導入する。

$$
\begin{aligned}
&\alpha_\mu \to U\alpha_\mu U^\dagger = \alpha_\mu - \sum_\nu (c_{\mu\nu}\alpha_\nu^\dagger + d_{\mu\nu}\alpha_\nu), \\
&U \equiv \exp\sum_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}(c_{\mu\nu}\alpha_\mu^\dagger\alpha_\nu^\dagger - c_{\mu\nu}^*\alpha_\nu\alpha_\mu) + d_{\mu\nu}\alpha_\mu^\dagger\alpha_\nu)\right], \\
&\delta u_{k\mu} = (v^*c^*)_{k\mu} + (ud)_{k\mu}, \quad \delta v_{k\mu} = (u^*c^*)_{k\mu} + (vd)_{k\mu}
\end{aligned} \tag{8}
$$

このとき、ＴＨＦＢ解の安定性条件は、F の２階変分により以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
\delta^2 F &= \frac{1}{2}\mathbf{V}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{V} > 0 \\
\mathbf{V}^\dagger &= (c_{\mu\nu}^{>*}, c_{\mu\nu}^{>}, d_{\mu\nu}^*, \delta f_\mu), \quad c_{\mu\nu}^{>} \equiv c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}(\mu > \nu), \\
\mathbf{S} &\equiv \begin{pmatrix} A_{\mu\nu,\rho\sigma} & B_{\mu\nu,\rho\sigma} & C_{\mu\nu,\rho\sigma} & E_{\mu\nu,\sigma} \\ B_{\mu\nu,\rho\sigma}^* & A_{\mu\nu,\rho\sigma}^* & C_{\nu\mu,\sigma\rho}^* & E_{\mu\nu,\sigma}^* \\ C_{\rho\sigma\mu\nu}^* & C_{\sigma\rho,\nu\mu} & D_{\mu\nu,\rho\sigma} & E'_{\mu\nu,\sigma} \\ E_{\rho\sigma,\mu}^* & E_{\rho\sigma,\mu} & E'^*_{\sigma\rho,\mu} & F_{\mu,\sigma} \end{pmatrix} \\
A_{\mu\nu.\rho\sigma} &\equiv (E_\mu + E_\nu)(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})(1 - f_\mu - f_\nu) \\
&\quad +4(H_{22})_{\mu\nu\rho\sigma}(1 - f_\mu - f_\nu)(1 - f_\rho - f_\sigma), \\
B_{\mu\nu,\rho\sigma} &\equiv 24(H_{40})_{\mu\nu,\rho\sigma}(1 - f_\mu - f_\nu)(1 - f_\rho - f_\sigma), \\
C_{\mu\nu,\rho\sigma} &\equiv 6(H_{31})_{\mu\nu\sigma\rho}(1 - f_\mu - f_\nu)(f_\sigma - f_\rho), \\
D_{\mu\nu,\rho\sigma} &\equiv (E_\mu - E_\nu)(f_\nu - f_\mu)\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + 4(H_{22})_{\mu\sigma\nu\rho}(f_\nu - f_\mu)(f_\sigma - f_\rho), \\
E_{\mu\nu,\sigma} &\equiv 6(H_{31})_{\mu\nu,\sigma\sigma}(1 - f_\mu - f_\nu), \\
E'_{\mu\nu,\sigma} &\equiv 4(H_{22})_{\mu\sigma\nu\rho}(f_\nu - f_\mu), \\
F_{\mu,\sigma} &\equiv \frac{kT\delta_{\mu\sigma}}{f_\mu(1 - f_\mu)} + 4(H_{22})_{\mu\sigma\mu\sigma}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで注意すべきは、安定性行列 $\mathbf{S}$ の左上の 3×3 のセクターはＴＲＰＡ方程式に対応するが、変分 δf_μ に関係する右と下辺の $E_{\mu\nu,\sigma}, E'_{\mu\nu,\sigma}, F_{\mu,\sigma}$ で表される周縁部が新たに付け加わったことである [23]。

§3. 占有粒子数揺動と秩序変数の再定義

各準粒子準位の占有粒子数の揺らぎ $f_\mu(1 - f_\mu)$ が有限温度での定式化にどのように関与するかを調べるために、一般化密度行列

$$
W_{k\mu} \equiv \begin{pmatrix} u_{k\mu} & v_{k\mu}^* \\ v_{k\mu} & u_{k\mu}^* \end{pmatrix}, \quad W^\dagger W = WW^\dagger = I, \tag{10}
$$

を定義し、一般化 Bogoliubov 変換を

$$W_{k\mu} \equiv \begin{pmatrix} u_{k\mu} & v^*_{k\mu} \\ v_{k\mu} & u^*_{k\mu} \end{pmatrix}, \quad W^\dagger W = WW^\dagger = I \tag{11}$$

と表わす。直ちに分かることは、有限温度では

$$R - R^2 = Wf(1-f)W^\dagger \neq 0, \quad \mathrm{Tr}(Wf(1-f)W^\dagger) = \sum_\mu f_\mu(1-f_\mu) \neq 0 \tag{12}$$

となってしまい、粒子数揺らぎ $f_\mu(1-f_\mu)$ 故に、R は射影演算子とはならない。実際、この場合の R の固有値は、0，1ではなく、$f_\mu, 1-f_\mu$ となる。この結果、Bloch-Messiah 定理の証明法 [26] は成り立たなくなる。この困難は、Thermo Field Dynamics (TFD)[24,25] を援用することによって回避され、少し違った形式の定理が証明され、秩序パラメータが再定義されなければならないことが示される [27]。

ＴＦＤでは、(準) 粒子数演算子 $\{\alpha_\mu, \alpha^\dagger_\mu\}$ に対するコピー $\{\tilde{\alpha}_\mu, \tilde{\alpha}^\dagger_\mu\}$ と温度に依存する真空 $|0(\beta)\rangle$ を消す準粒子演算子 $\{\beta_\mu, \tilde{\beta}_\mu\}$ ($|0(\beta)>= \mathrm{e}^{-G}|0>$) が導入される。

$$\begin{aligned} &\beta_\mu|0(\beta)>= \tilde{\beta}_\mu|0(\beta)>= 0\,; \\ &\alpha_\mu = \mathrm{e}^G\beta_\mu\mathrm{e}^{-G} = \bar{g}_\mu\beta_\mu + g_\mu\tilde{\beta}^\dagger_\mu, \quad \tilde{\alpha}_\mu = \mathrm{e}^G\tilde{\beta}_\mu\mathrm{e}^{-G} = \bar{g}_\mu\tilde{\beta}_\mu - g_\mu\beta^\dagger_\mu, \\ &g_\mu \equiv f^{1/2}_\mu, \quad \bar{g}_\mu \equiv (1-f_\mu)^{1/2} \end{aligned} \tag{13}$$

この結果、全ての統計平均は温度依存真空期待値によって表される。即ち

$$<\hat{O}>= \mathrm{Tr}(\hat{W}\hat{O}) =< 0(\beta)|\hat{O}|0(\beta)> \tag{14}$$

という真空を用いた通常の場の理論の形式に帰着する。このとき、2倍になった粒子数演算子空間に拡張された一般化 Bogoliubov 変換を

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c \\ \tilde{c} \\ c^\dagger \\ \tilde{c}^\dagger \end{pmatrix} &= \bar{W}\begin{pmatrix} \beta \\ \tilde{\beta} \\ \beta^\dagger \\ \tilde{\beta}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \bar{W} \equiv \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}^* \\ \bar{B} & \bar{A}^* \end{pmatrix}, \quad \bar{W}\bar{W}^\dagger = \bar{W}^\dagger W = I \\ \bar{A} &\equiv \begin{pmatrix} u\bar{g} & v^*g \\ -\bar{v}^*g & u\bar{g} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} \equiv \begin{pmatrix} v\bar{g} & u^*g \\ -v^*g & u\bar{g} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

と表せば、この形式での一般化単一粒子密度行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & \bar{\kappa} \\ \bar{\kappa}^\dagger & 1-\bar{\rho}^* \end{pmatrix} \tag{16}$$

は見かけ上、温度0の場合の秩序パラメータの形式

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \bar{B}^*\bar{B}^{\mathrm{tr}} = \begin{pmatrix} \rho & P \\ -P & \rho \end{pmatrix} = \bar{\rho}^\dagger, \quad \bar{\kappa} = \bar{B}^*\bar{A}^{\mathrm{tr}} = \begin{pmatrix} \kappa & Q \\ -Q & \kappa \end{pmatrix} = -\bar{\kappa}^{\mathrm{tr}}, \\ P &= ug\bar{g}v^{\mathrm{tr}} - v^*\bar{g}gu^\dagger = -P^\dagger, \quad Q = ug\bar{g}u^{\mathrm{tr}} - v^*g\bar{g}v^\dagger = Q^{\mathrm{tr}} \end{aligned} \tag{17}$$

を用いて表される。これ等から直ちに

$$\Lambda - \Lambda^2 = 0. \tag{18}$$

という関係が示され、Λは射影演算子となる。式(17)で、ρとκは式(7)で与えられた通常の量であるが、PとQは新たに加わった量で、占有粒子数揺動の効果を記述することは明らかである。

先ず、$\bar{\rho}$と$\bar{\kappa}$は、以下のウニタリー変換によってそれぞれ以下のようにブロック対角形とブロック反対角形に変換することができる。

$$V^\dagger \bar{\rho} V = \begin{pmatrix} \rho + iP & 0 \\ 0 & \rho - iP \end{pmatrix}, \quad V^{\mathrm{tr}} \bar{\kappa} V = \begin{pmatrix} 0 & \kappa - iQ \\ \kappa + iQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\pi/4} & \mathrm{e}^{i\pi/4} \\ \mathrm{e}^{i\pi/4} & \mathrm{e}^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = V^{\mathrm{tr}}, \; V^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\pi/4} & \mathrm{e}^{-i\pi/4} \\ \mathrm{e}^{-i\pi/4} & \mathrm{e}^{i\pi/4} \end{pmatrix} = V^* \tag{19}$$

次いで、エルミート行列$\rho \pm iP$の各々を対角化するウニタリー変換ξとηによって、以下のように対角形を得て、その固有値がh_{kk}と$h_{\bar{k}\bar{k}}$であったとしよう。このとき、式(18)から導かれる関係式$\bar{\rho}\bar{\kappa} = \bar{\kappa}\bar{\rho}^*$は

$$\left[\xi^\dagger(\kappa - iQ)\eta^*\right]_{k\bar{l}} (h_{kk} - h_{\bar{l}\bar{l}}) = 0, \quad \left[\eta^\dagger(\kappa + iQ)\xi^*\right]_{\bar{k}l} (h_{\bar{k}\bar{k}} - h_{ll}) = 0 \tag{20}$$

を与えるので、

$$\left[\xi^\dagger(\kappa - iQ)\eta^*\right]_{k\bar{k}} \equiv t_{k\bar{k}}, \quad \left[\eta^\dagger(\kappa + iQ)\xi^*\right]_{\bar{k}k} \equiv t_{\bar{k}k} = -t_{k\bar{k}} \tag{21}$$

以外の全ての行列要素$\left[\xi^\dagger(\kappa - iQ)\eta^*\right]_{k\bar{l}}$及び$\left[\eta^\dagger(\kappa + iQ)\xi^*\right]_{\bar{k}l}$が0となる。更に、同じ式(18)は関係式$\bar{\rho}\bar{\kappa} - \bar{\rho}^2 = \bar{\kappa}\bar{\kappa}^*$を与えるので

$$t_{k\bar{k}} = -t_{\bar{k}k} = \sqrt{h_{kk}(1 - h_{kk})} \tag{22}$$

を示すことができる。このようにして定義された新しい秩序パラメータh_{kk}、$t_{k\bar{k}}$がそれぞれρ_{kk}、$\kappa_{k\bar{k}}$に替わるべきものである。これ等の量に対応して、有限温度でのカノニカル基底が改めて定義される。

§4. 変分法による拡張有限温度ＲＰＡ（ＥＴＲＰＡ）方程式の導出

有限温度ＲＰＡ方程式を導出するために、準粒子像でのＲＰＡ演算子を

$$Q^\dagger = \sum_{\mu > \nu} (X_{\mu\nu} \alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu^\dagger - Y_{\mu\nu} \alpha_\nu \alpha_\mu) + \sum_{\mu\nu} Z_{\mu\nu} \alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu \tag{23}$$

とおいて、統計演算子に対する以下のウニタリー変換と非ウニタリー変換を施すことにする。

$$\begin{aligned} \hat{W} \to \hat{W}' &= \mathrm{e}^{iR} \hat{W} \mathrm{e}^{-iR}, \quad R = Q^\dagger + Q, \\ E_\mu \to E_\mu &+ \delta E_\mu \end{aligned} \tag{24}$$

この方法で２次の変分を計算すると

$$\delta^2 F = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^\dagger = (X_{\mu\nu}^*, Y_{\mu\nu}^*, Z_{\mu\nu}^*, \delta f_\mu) \tag{25}$$

となり、ここに現れた行列 S は式 (9) の安定性行列に一致する。ＴＲＰＡメトリック

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1-f_\mu-f_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -(1-f_\mu-f_\nu) & 0 \\ 0 & 0 & f_\nu-f_\mu \end{pmatrix} \tag{26}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{S}\mathbf{X} &\equiv (\mathbf{X}^{(1)}+\mathbf{X}^{(2)})^\dagger \mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}(\mathbf{X}^{(1)}+\mathbf{X}^{(2)}), \\ \mathcal{M} &\equiv \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(+)} \\ \delta\mathbf{f} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(-)} \\ \delta\mathbf{f} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

と表すことにする。ただし、

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(+)}=\begin{pmatrix} X_{\mu\nu} \\ Y_{\mu\nu} \\ Z_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(-)}=\begin{pmatrix} -Y^*_{\mu\nu} \\ -X^*_{\mu\nu} \\ Z^*_{\nu\mu} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{f}=\begin{pmatrix} \delta f_\mu \\ \delta f_{\bar\mu} \end{pmatrix} \tag{28}$$

を定義した。ここに、全ての準粒子状態を 2 組に分けて、各組から 1 つずつを選んで μ と $\bar\mu$ と名づけた。例えば、シグナチャー $e^{-i\hat{J}_x}$ の固有値 $\pm i$ によって状態を 2 組に分けて考えればよい。これ等の準備の後に、ＴＲＰＡ解の安定性条件と規格化の類推から次の仮定を行ってみる。

$$\text{Ansatz I}: \mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}=\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}=0, \mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}=\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}=1 \tag{29}$$

試行統計演算子 $\hat{W}$ と変化を与えた $\hat{W}'$ に対応する熱力学ポテンシャルの差 $\Delta F = F(\hat{W}')-F(\hat{W})$ から、式 (29) の 3 条件の各々に Lagrange 未定乗数 $a/2$、$b/2$、$\hbar\omega$ を掛けて引いたものについての変分条件

$$\delta\Big(\Delta F-\frac{a}{2}\mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}-\frac{b}{2}\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}-\hbar\omega\mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}\Big)=0 \tag{30}$$

から

$$\begin{aligned} &(1-a)\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}+(1-b)\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)} \\ &\qquad =(\hbar\omega\mathcal{M}-\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M})\mathbf{X}^{(1)}-(\hbar\omega\mathcal{M}+\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M})\mathbf{X}^{(2)} \end{aligned} \tag{31}$$

が得られる。この式に左から $\mathbf{X}^{(2)\dagger}$、また $\mathbf{X}^{(1)\dagger}$ を掛け、(29) の最初の 2 条件を用いると

$$\begin{aligned} (1-a)\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)} &= -\mathbf{X}^{(2)\dagger}(\hbar\omega\mathcal{M}+\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M})\mathbf{X}^{(2)}, \\ (1-b)\mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}^{(1)\dagger}(\hbar\omega\mathcal{M}-\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M})\mathbf{X}^{(1)} \end{aligned} \tag{32}$$

が得られる。そこで、次の仮定を設けてみる。

$$\text{Ansatz II}: \quad \mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}=\hbar\omega\mathbf{X}^{(1)}, \qquad \mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}=-\hbar\omega\mathbf{X}^{(2)} \tag{33}$$

この結果として、$a=b=1$ が得られ、また、方程式 (33) の固有値 $\hbar\omega$ が正しく系の励起エネルギーとなることが次のように示される。

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}+\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{O}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}\right)\\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\mathbf{X}^{(1)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(1)}-\mathbf{X}^{(2)\dagger}\mathcal{M}\mathbf{X}^{(2)}\right)=\hbar\omega \end{aligned}\tag{34}$$

この事実はによって、**Ansatz II** が正当化される。結局、目的としていたＥＴＲＰＡ方程式は以下の形式によって与えられる。

$$\begin{pmatrix}\mathbf{\Omega} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E}^\dagger & \mathbf{F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{M} & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}\\ \delta\mathbf{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}\\ \delta\mathbf{f}\end{pmatrix}\hbar\omega,\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\tag{35}$$

ここに現れた行列の定義は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &\equiv \begin{pmatrix}\mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mathcal{B}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\\ \mathcal{B}^*_{\mu\nu\rho\sigma} & \mathcal{A}^*_{\mu\nu\rho\sigma} & -\mathcal{C}^*_{\mu\nu\sigma\rho}\\ \mathcal{C}^*_{\rho\sigma\mu\nu} & -\mathcal{C}_{\rho\sigma\mu\nu} & \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{E}\equiv\begin{pmatrix}3(H_{31})_{\mu\nu\sigma\sigma} & -3(H_{31})_{\mu\nu\bar\sigma\bar\sigma}\\ 3(H_{31})^*_{\mu\nu\sigma\sigma} & -3(H_{31})^*_{\mu\nu\bar\sigma\bar\sigma}\\ 2(H_{22})_{\mu\sigma\nu\sigma} & -2(H_{22})_{\mu\bar\sigma\nu\bar\sigma}\end{pmatrix},\\ \mathbf{F} &\equiv \begin{pmatrix}\frac{kT\delta_{\bar\mu\bar\sigma}}{4f_{\bar\mu}(1-f_{\bar\mu})}+(H_{22})_{\bar\mu\bar\sigma\bar\mu\bar\sigma} & -(H_{22})_{\bar\mu\sigma\bar\mu\sigma}\\ -(H_{22})_{\mu\bar\sigma\mu\bar\sigma} & \frac{kT\delta_{\mu\sigma}}{4f_{\mu}(1-f_{\mu})}+(H_{22})_{\mu\sigma\mu\sigma}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{E_\mu+E_\nu}{1-f_\rho-f_\sigma}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})+(H_{22})_{\mu\sigma\nu\rho},\\ \mathcal{B}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24(H_{40})_{\mu\nu\rho\sigma},\qquad \mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma}=6(H_{31})_{\mu\nu\rho\sigma},\\ \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{E_\mu-E_\nu}{f_\nu-f_\mu}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+4(H_{22})_{\mu\sigma\nu\rho},\end{aligned}\tag{37}$$

$$\mathbf{V}^{\mathrm{tr}}\equiv(X_{\mu\nu},Y_{\mu\nu},Z_{\mu\nu}),\quad \delta\mathbf{f}^{\mathrm{tr}}\equiv(\delta f_\mu,\delta f_{\bar\mu})\tag{38}$$

これ等の式は、準粒子描像で表されているが、対相関が無視できる場合の、粒子ー孔描像の式に焼き直すのは容易である。何れにしても、ＲＰＡの範囲内での厳密な定式化である。

§5. 巨大共鳴におけるエントロピー効果

前節のＥＴＲＰＡ方程式 (34) を、$\delta\mathbf{f}$ を消去した形式に書き直すと

$$\left[\mathbf{\Omega}+\underbrace{\mathbf{E}(\hbar\omega\sigma_2-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{E}^\dagger}\right]\mathbf{M}\,\mathbf{V}=\mathbf{V}\cdot\hbar\omega\tag{39}$$

となり、上式で下にカッコを付けた部分が、エントロピー効果を担う補正を記述する。この補正効果を調べるために、単純化した以下の模型を考える。適当に与えられた単位一粒子準位があり、各準位には２つの状態のみを考え、それ等の軌道のスピンに関しては一切を無視する。２体相互作用を含む Hamiltonian を

$$\hat H=\sum_p\varepsilon_p p^\dagger p-\sum_h\varepsilon_h h^\dagger h+\hat H_{\mathrm{int}},\ \hat H_{\mathrm{int}}=\frac{\chi}{2}:\hat D^2:,\ \hat D\equiv\sum_{kl}g_{kl}c_k^\dagger c_l\tag{40}$$

とする。交換項を無視する近似では、粒子ー孔描像でのＴＲＰＡ方程式は

$$\left[1-2\sum_{ph} g_{ph}^2 \frac{(\varepsilon_p-\varepsilon_h)(n_h-n_p)}{(\hbar\omega)^2-(\varepsilon_p-\varepsilon_h)^2} - \sum_{p_1p_2} g_{p_1p_2}^2 \frac{n_{p_2}-n_{p_1}}{\hbar\omega-\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}} + \sum_{h_1h_2} g_{h_1h_2}^2 \frac{n_{h_2}-n_{h_1}}{\hbar\omega+\varepsilon_{h_1}-\varepsilon_{h_2}}\right] U = 0 \tag{41}$$

となる。ただし、$U \equiv \mathrm{Tr}(\hat{W}[\hat{D}, Q^\dagger])$ である。従って、強度関数は線形応答関数の虚数部から

$$S(\hbar\omega) = -\frac{1}{\pi}\Im R = \frac{\Im R^0}{(1-\chi\Re R^0)^2+(\chi\Im R^0)^2}, \quad R = \frac{R^0}{1-\chi R^0},$$
$$R^0 \equiv 2\sum_{ph} g_{ph}^2 \frac{(\varepsilon_p-\varepsilon_h)(n_h-n_p)}{(\hbar\omega)^2+(\varepsilon_p-\varepsilon_h)^2} + \sum_{p_1p_2} g_{p_1p_2}^2 \frac{n_{p_2}-n_{p_1}}{\hbar\omega-\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}} - \sum_{h_1h_2} g_{h_1h_2}^2 \frac{n_{h_2}-n_{h_1}}{\hbar\omega+\varepsilon_{h_1}-\varepsilon_{h_2}} \tag{42}$$

によって与えられる。

式 (38) に現れる補正項の中の対角項のみを取って、ph、pp、hh エネルギーのシフトを求めると

$$\varepsilon_p-\varepsilon_h \to \varepsilon_p-\varepsilon_h-\Delta E_{ph},$$
$$\Delta E_{ph} \equiv (n_h-n_p)\left[\sum_{p_1} \frac{v_{p_1pp_1h}^2\gamma_{p_1}+v_{\bar{p}_1p\bar{p}_1h}^2\gamma_{\bar{p}_1}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_{p_1}\gamma_{\bar{p}_1}} + \sum_{h_1} \frac{v_{h_1ph_1h}^2\gamma_{h_1}+v_{\bar{h}_1p\bar{h}_1h}^2\gamma_{\bar{h}_1}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_{h_1}\gamma_{\bar{h}_1}}\right], \tag{43}$$

$$\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2} \to \varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2}-\Delta E_{p_1p_2},$$
$$\Delta E_{p_1p_2} \equiv (n_{p_2}-n_{p_1})\left[\sum_{p} \frac{v_{p_1pp_2h}^2\gamma_p+v_{p_1\bar{p}p_2\bar{p}}^2\gamma_{\bar{p}}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_p\gamma_{\bar{p}}} + \sum_{h} \frac{v_{p_1hp_2p}^2\gamma_h+v_{p_1\bar{h}p_2\bar{h}}^2\gamma_{\bar{h}}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_h\gamma_{\bar{h}}}\right], \tag{44}$$

$$\varepsilon_{h_2}-\varepsilon_{h_1} \to \varepsilon_{h_2}-\varepsilon_{h_1}-\Delta E_{h_1h_2},$$
$$\Delta E_{h_1h_2} \equiv (n_{h_1}-n_{h_2})\left[\sum_{p} \frac{v_{h_1ph_2p}^2\gamma_p+v_{h_1\bar{p}h_2\bar{p}}^2\gamma_{\bar{p}}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_p\gamma_{\bar{p}}} + \sum_{h} \frac{v_{h_1hh_2h}^2\gamma_h+v_{h_1\bar{h}h_2\bar{h}}^2\gamma_{\bar{h}}}{1-(4\hbar\omega)^2\gamma_h\gamma_{\bar{h}}}\right] \tag{45}$$

が得られる。ここに

$$v_{klmn} = \chi(g_{km}gln - g_{kn}g_{lm}), \quad \gamma_k \equiv \beta n_k(1-n_k), \quad n_k = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\varepsilon_F)}+1} \tag{46}$$

という記号を用いた。これ等のシフトは $\hbar\omega$ が特に大きくなければ、エネルギー差を減少させる方向に働くが、$\hbar\omega$ に依ることは興味深い。このシフトは全体として強度分布を僅かに変化させるが、その程度を知るには詳細な計算を要するので、今後の課題である。

§6. 結　論

本稿で導出れた拡張有限温度ＲＰＡ（ＥＴＲＰＡ）方程式は厳密に有限温度ＨＦＢ（ＴＨＦＢ）解の安定性行列に対応するもので、ＲＰＡ近似の枠組みで厳密なものであり、本来

の有限温度ＲＰＡ方程式であると考えられる。この方程式はエントロピー効果と温度効果による占有粒子数揺動とが集団運動モードに及ぼす影響を記述する。温度効果によるＥ１巨大共鳴（ＧＤＲ）の幅の急激な増大は、ph 励起の他に、pp 及び hh 配位を通じての励起が温度の増大と共に急速に増えることによるという、微視的な解釈が妥当である。微視的な理論の枠組みでは、幅が一度飽和した後、更に高温では Landau 幅、spreading 幅共にゆっくりと減少に転じることが期待される [28,29,30]。以上の通りであるとすれば、残る課題は、エントロピー効果が巨大共鳴に与える影響を具体的に評価することである。本稿での簡単な模型の場合は、例えば、ph エネルギーのシフトがもたらされ、Landau splitting に多少の影響が生じるが、共鳴の強度分布全体の形状にはそれほど影響しない。しかし、エントロピー効果の問題はＥＴＲＰＡ方程式が正しく記述する筈であるが、その取り扱いは緒についたばかりである。微視的定式化に基づく有限温度に関する最も望ましい計算方法は、先ず、ＴＨＦＢ方程式の自己無撞着解を得て、その単一粒子（準粒子）描像上にＥＴＲＰＡ方程式を解くことである。しかしながら、現在のところ、ＴＨＦＢの自己無撞着解を得た例は、私どもが実行した計算 [19,21,22] の外には未だ存在しないようである。

参考文献

[1] J. J. Gaardhøe, Phys. Rev. Lett. **53**, 148 (1984); Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **42**, 483 (1992).

[2] K. Snover, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **36**, 545 (1986).

[3] D. R. Chakrabarty *et al.*, Phys. Rev. **C36**, 1886 (1987).

[4] G. Enders *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 249 (1992).

[5] A. Bracco *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3748 (1995).

[6] M. Matiuzzi *et al.*, Nucl. Phys. **A612**, 262 (1997).

[7] E. Ramakrishnan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **76**, 2025 (1996); Phys. Lett. **B383**. 252 (1996).

[8] T. Baumann *et al.*, Nucl. Phys. **A635**, 423 (1998).

[9] G. Gevais, M. Thoennessen and W. E. Ormand, Phys. Rev. **C58**, 1377R (1998).

[10] M. Gallardo *et al.*, Nucl. Phys. **A443**, 415 (1985).

[11] Y. Alhassid, B. Bush and S. Levit, Phys. Rev. Lett. **61**, 1926 (1988).

[12] Y. Alhassid and B. Bush, Nucl. Phys. **A509**, 461 (1990); **A531**, 1 (1991); **ibid.**, 39 (1991).

[13] B. Bush and Y. Alhassid, Nucl. Phys. **A531**, 27 (1991). **A531**, 1 (1991).

[14] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Prog. Theor. Phys. **76**, 356 (1986).

[15] K. Sugawara-Tanabe and K. Tanabe, Prog. Theor. Phys. **76**, 1272 (1986).

[16] K. Sugawara-Tanabe and K. Tanabe, Phys. Lett. **B192**, 268 (1987).

[17] N. D. Dang and A. Arima, Phys. Rev. Lett. **80**, 4145 (1998); Nucl. Phys. **A636**, 443 (1998).

[18] N. D. Dang, K. Tanabe and A. Arima, Phys. Rev. **C58**, 3374 (1998); Phys. Lett. **B445**, 1 (1998); Nucl. Phys. **A645**, 536 (1999).

[19] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Phys. Lett. **B97**, 337 (1980).

[20] K. Tanabe, K. Sugawara-Tanabe and H.-J. Mang, Nucl. Phys. **A357**, 20 (1981).

[21] K. Sugawara-Tanabe, K. Tanabe and H.-J. Mang, Nucl. Phys. **A357**, 45 (1981).

[22] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Nucl. Phys. **A390**, 385 (1982).

[23] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Phys. Lett. **B172**, 129 (1986).

[24] Y. Takahashi and H. Umezawa, Collect. Phenom. **2**, 55 (1975).

[25] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo field dynamics and condenced states* (North-Hplland, Amsterdam, 1982).

[26] C. Bloch and A. Messah, Nucl. Phys. **39**, 95 (1962).

[27] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Phys. Lett. **B247**, 202 (1990).

[28] K. Tanabe, Proceedings of Predeal International Summer School *"Structure and stability of nucleon and nuclear systems"*, Predeal, Romania, August 24-September 5, 1998 (World Scientific), in press.

[29] K. Tanabe, Nucl. Phys. **A569**, 27c (1994).

[30] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Nucl. Phys., in press.