

## エントロピー効果を記述する厳密な有限温度RPA方程式

埼玉大・理 田辺孝哉

### Abstract

Thermal random phase approximation (TRPA) equation is extended to include entropy effect. This realizes a desirable formalism which is exact within the framework of the RPA at finite temperature. The extended form of the TRPA matrix precisely coincides with the stability matrix for the thermal Hartree-Fock-Bogoliubov (THFB) solution. Extended forms of the completeness condition of the TRPA solutions and the energy-weighted sum rule are given. An importance of the couplings to pp- and hh-configurations is shown by numerical analysis of the temperature-dependence of the Landau splitting width based on a simple microscopic model.

### §1. エントロピー効果を記述するTRPA方程式

Hartree-Fock 方程式の解の安定性行列が、RPA 行列に一致することは広く知られている [1]。しかし、従来の定式化を無批判に受け入れると、有限温度 Hartree-Fock-Bogoliubov (THFB) 方程式の解の安定性行列が、有限温度 RPA 方程式を与える RPA 行列に一致しないことになるについては既に指摘した [2]。この問題を解決するため定式化としては、変分原理を適用する方法を採用すると見通しがよい [3,4,5]。

試行統計演算子

$$\hat{W} = \frac{\exp(-\beta \hat{H}^{\text{eff}})}{\text{Tr} \exp(-\beta \hat{H}^{\text{eff}})}, \quad \hat{H}^{\text{eff}} \equiv \sum_{\mu} E_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} \quad (1)$$

に現れるパラメータについての非ユニタリー変換

$$E_{\mu} \rightarrow E_{\mu} + \delta E_{\mu} \quad (2)$$

を統計演算子についてのユニタリー変換

$$\hat{W} \rightarrow e^{iR} \hat{W} e^{-iR}, \quad R = Q^{\dagger} + Q \quad (3)$$

に併せて適用する。ただし

$$Q^{\dagger} = \sum_{\mu > \nu} (X_{\mu\nu} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\nu}^{\dagger} - Y_{\mu\nu} \alpha_{\nu} \alpha_{\mu}) + \sum_{\mu \neq \nu} Z_{\mu\nu} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\nu}. \quad (4)$$

は準粒子描像での有限温度 RPA (TRPA) 演算子である。 $\delta E_{\mu}$  と微小振幅振動を記述する ( $X_{\mu\nu}$ ,  $Y_{\mu\nu}$ ,  $Z_{\mu\nu}$ ) に関する 2 階の変分を

$$\delta^2 \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{S} \mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)})^{\dagger} \mathbf{M} \mathbf{O} \mathbf{M} (\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)}) \quad (5)$$

のように書き表すことにする。ここに現れる諸行列は以下に定義される。

$$\mathbf{X}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(+)} \\ \delta \mathbf{f} \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(-)} \\ \delta \mathbf{f} \end{pmatrix}, \mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

更に、これ等の部分行列は

$$\mathbf{V}^{(+)} = \begin{pmatrix} X_{\mu\nu} \\ Y_{\mu\nu} \\ Z_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \mathbf{V}^{(-)} = \begin{pmatrix} -Y_{\mu\nu}^* \\ -X_{\mu\nu}^* \\ Z_{\nu\mu}^* \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \delta \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \delta f_\mu \\ \delta f_{\bar{\mu}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。(7)式には変分 $\delta E_\mu$ に対応する分布関数の変化 $\delta f_\mu = -\beta f_\mu(1-f_\mu)\delta E_\mu$ が登場する。ここでの番号付けは、全ての準粒子準位を2組に分類して、 $\mu$ と $\bar{\mu}$ で区別する。この分類法は原理上任意である。例えば、シグナチャー $e^{-i\pi J_x}$ の固有値 $\pm i$ を用いることも一方法である。TRPAメトリック $\mathcal{M}$ の部分行列 $\mathbf{M}$ は通常の

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-f_\mu-f_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -(1-f_\mu-f_\nu) & 0 \\ 0 & 0 & f_\nu-f_\mu \end{pmatrix} \quad (8)$$

に一致する。ここで、TRPA解の方の安定性と規格化条件

$$\mathbf{X}^{(1)\dagger} \mathcal{M} \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)\dagger} \mathcal{M} \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{X}^{(1)\dagger} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)} = -\mathbf{X}^{(2)\dagger} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(2)} = 1 \quad (9)$$

を拘束条件とする変分を考えることにする。この定式化における留意点は、拡張されたTRPAメトリック $\mathcal{M}$ に含まれる $\sigma_2$ のおかげで、占有粒子数の揺らぎ $\delta \mathbf{f}$ がノルムには寄与しないように工夫されていることである。上の条件にラグランジュ未定計数を掛けて(5)式から引きいて得られる変分条件

$$\delta \left( \frac{1}{2} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{X} - \frac{a}{2} \mathbf{X}^{(1)\dagger} \mathcal{M} \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(2)} - \frac{b}{2} \mathbf{X}^{(2)\dagger} \mathcal{M} \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)} - \omega \mathbf{X}^{(1)\dagger} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)} \right) = 0 \quad (10)$$

から出発すると

$$\mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(1)} \omega, \quad \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)} (-\omega) \quad (11)$$

という、求めていた厳密なTRPA方程式に到達する。(11)式の中の行列 $\mathbf{O}$ は(5)式で定義されたが、その内容を用いてより具体的にTRPA方程式を書いてみると

$$\begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^\dagger & \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \delta \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \delta \mathbf{f} \end{pmatrix} \omega \quad (12)$$

となる。ここに現れる諸行列は、任意の2体相互作用を持つHamiltonianについて以下のよう

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mathcal{B}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma} \\ \mathcal{B}_{\mu\nu\rho\sigma}^* & \mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma}^* & -\mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma}^* \\ \mathcal{C}_{\rho\sigma\mu\nu}^* & -\mathcal{C}_{\rho\sigma\mu\nu} & \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} \end{pmatrix}, & \mathbf{E} &\equiv \begin{pmatrix} 3(H_{31})_{\mu\nu\sigma\sigma} & -3(H_{31})_{\mu\nu\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \\ 3(H_{31})_{\mu\nu\sigma\sigma}^* & -3(H_{31})_{\mu\nu\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^* \\ 2(H_{22})_{\mu\sigma\nu\sigma} & -2(H_{22})_{\mu\bar{\sigma}\nu\bar{\sigma}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F} &\equiv \begin{pmatrix} \frac{kT\delta_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}}{4f_{\bar{\mu}}(1-f_{\bar{\mu}})} + (H_{22})_{\bar{\mu}\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\sigma}} & -(H_{22})_{\bar{\mu}\bar{\sigma}\mu\sigma} \\ -(H_{22})_{\mu\bar{\sigma}\mu\bar{\sigma}} & \frac{kT\delta_{\mu\sigma}}{4f_{\mu}(1-f_{\mu})} + (H_{22})_{\mu\sigma\mu\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{E_\mu + E_\nu}{1 - f_\rho - f_\sigma} (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) + (H_{22})_{\mu\nu\rho\sigma}, & \mathcal{B}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24(H_{40})_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma} &= 6(H_{31})_{\mu\nu\rho\sigma}, & \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{E_\mu - E_\nu}{f_\nu - f_\mu} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + 4(H_{22})_{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (14)$$

この方程式が、温度ゼロの極限で連続的に通常のRPA方程式に移行することは言うまでもない。また、この形式は、対相関相互作用が存在する場合を想定し、準粒子描像で一般的に与えられているが、粒子-孔描像に書き直すのは容易である。

さて、問題のエントロピー効果を調べるために、方程式(12)から、形式上 $\delta f$ を含まない固有値方程式を導き、その固有値・固有ベクトルを $\{\omega_n, \mathbf{V}^{(n)}\}$ と表すと

$$\left[ \Omega + \mathbf{E}(\omega_n \sigma_2 - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{E}^\dagger \right] \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \omega_n, \quad \delta \mathbf{f}^{(n)} = \delta \mathbf{f}^{(-n)} = (\omega_n - \mathbf{F} \sigma_2)^{-1} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{V}^{(n)} \quad (15)$$

と表わしてみる。すると明らかに第1式の左辺第2項がエントロピー効果を記述することが分かるが、その寄与は行列 $\mathbf{E}$ の2次、従って、相互作用の結合定数に関しても2次である。このことから、相互作用が弱い場合は、エントロピー項を摂動論的に扱くと、集団運動的振動モードのエネルギー固有値 $\omega_n$ に小さなシフトを与える。しかし、線形応答関数から強度関数 $S(\omega)$ を求めた場合、その関数形は変わらないので、有限温度原子核に励起された巨大共鳴などの共鳴曲線の温度依存性にはエントロピー効果が大きな影響を与えることはない。従って、この場合に関してはエントロピー項を無視する近似が正当化される。なお、摂動論による扱いについては文献[5]に詳しい。

## §2. 解の完全性とエネルギー和則

TRPA 解の規格直交性は

$$\mathbf{V}^{(m)\dagger} \mathbf{M} [\mathbf{I} + \mathbf{E}(\omega_m - \sigma_2 \mathbf{F})^{-1} \sigma_2 (\omega_n - \mathbf{F} \sigma_2)^{-1} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{M}] \mathbf{V}^{(n)} = \frac{\omega_n}{|\omega_n|} \delta_{mn} \quad (16)$$

となるので、左辺第2項は $m = n$ のとき恒等的に0である。TRPA 解によって決まる TRPA ボソン $Q^{(n)} (= Q^{(-n)\dagger})$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) の交換関係の熱平均は

$$\langle [Q^{(m)}, Q^{(n)\dagger}] \rangle = -\langle [Q^{(m)\dagger}, Q^{(n)}] \rangle^* = \mathbf{V}^{(m)\dagger} \mathbf{M} \mathbf{V}^{(n)} = \frac{\omega_n}{|\omega_n|} \delta_{mn} - \delta \mathbf{f}^{(m)\text{tr}} \sigma_2 \delta \mathbf{f}^{(n)} \quad (17)$$

等となる。任意の一体演算子を $\hat{P} = \sum_{n>0} (a_n Q^{(n)\dagger} + b_n Q^{(n)})$ に展開し、その展開係数を決めてみると

$$\begin{aligned} a_n &= \langle [Q^{(m)}, \hat{P}] \rangle + \sum_{m>0} \langle [Q^{(m)} - Q^{(m)\dagger}, \hat{P}] \rangle \delta \mathbf{f}^{(n)\text{tr}} \sigma_2 \delta \mathbf{f}^{(m)}, \\ b_n &= -\langle [Q^{(n)\dagger}, \hat{P}] \rangle - \sum_{m>0} \langle [Q^{(m)} - Q^{(m)\dagger}, \hat{P}] \rangle \delta \mathbf{f}^{(n)\text{tr}} \sigma_2 \delta \mathbf{f}^{(m)}. \end{aligned} \quad (18)$$

となることが分かる。これ等を用いると、演算子 $\hat{P}$ とHamiltonianとの2重交換子の熱平均について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle [\hat{P}, [H, \hat{P}]] \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n,m>0} (a_m^* \mathbf{V}^{(m)\dagger} + a_m \mathbf{V}^{(-m)\dagger}) \mathbf{M} \Omega \mathbf{M} (a_n \mathbf{V}^{(n)} + a_n^* \mathbf{V}^{(-n)}) \\ &= \sum_{n>0} \omega_n |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m \neq n(\text{all})} a_m^* a_n \mathbf{V}^{(m)\dagger} \mathbf{M} \mathbf{E} (\mathbf{F} - \omega_n \sigma_2)^{-1} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{M} \Omega \mathbf{V}^{(n)} \end{aligned} \quad (19)$$

という恒等式が得られる。一体演算子 $\hat{P}$ として、原子核中での陽子の重心と中性子の重心のずれで表した電気双極子演算子 $\hat{D} = \frac{Z}{A} \sum_{n=1}^N \hat{x}_n - \frac{N}{A} \sum_{p=1}^Z \hat{x}_p$ を持ってくると、等式(19)はTRKエネルギー和則 $\frac{1}{2} \langle [\hat{D}, [V, \hat{D}]] \rangle = \frac{1}{2M} \frac{NZ}{A}$ に帰着する。恒等式(19)自体は、有限温度で成立する一般的なものである。

### §3. 巨大共鳴幅の温度依存性

TRPA 方程式の解が巨大共鳴の共鳴曲線の温度依存性をどのように記述し得るかを調べるために、微視的ではあるが、簡単化されたモデルを導入する。陽子・中性子の区別、角運動量、パリティ、対相関相互作用の全てを無視する。更に、単一粒子準位は等間隔 $\varepsilon_0 = 0.3\text{MeV}$ 、ただし、1ヶ所だけにシェル・ギャップ $\Delta = 6.0\text{MeV}$ の存在を仮定する。相互作用を $H_{\text{int}} = \frac{\chi}{2} : \hat{P}^2 :$  ( $\hat{P} = \hat{P}^\dagger = \sum_{kl(k \neq l)} g_{kl} c_k^\dagger c_l$ ) とする。ここに、形状因子として $g_{kl} = e^{-[(\varepsilon_k - \varepsilon_l)/A]^2} - e^{-[(\varepsilon_k - \varepsilon_l)/B]^2}$ を導入した。全準位数を53、シェル・ギャップの位置を15番目と16番目間の間に選んでみる。線形応答関数 $R = R_0/(1 - \chi R_0)$ を

$$R_0 \equiv 2 \sum_{ph} \frac{g_{ph}^2 (\varepsilon_p - \varepsilon_h) (n_h - n_p)}{\omega^2 - (\varepsilon_p - \varepsilon_h)^2} + \sum_{p_1 p_2} \frac{g_{p_1 p_2}^2 (n_{p_2} - n_{p_1})}{\omega - \varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{p_2}} - \sum_{h_1 h_2} \frac{g_{h_1 h_2}^2 (n_{h_2} - n_{h_1})}{\omega + \varepsilon_{h_1} - \varepsilon_{h_2}} \quad (20)$$

を用いて与え、その虚部から計算した強度関数

$$S(\omega) = -\frac{1}{\pi} \Im R = \frac{\Im R_0}{(1 - \chi \Re R_0)^2 + (\chi \Im R_0)^2} \quad (21)$$

によって巨大共鳴の共鳴曲線を得る。図1は、パラメータを $\chi = 0.1\text{MeV}$ 、 $A = 7.1\text{MeV}$ 、 $B = 5.5\text{MeV}$ に選んだときの各温度 $T = 1.0, 4.0, 7.0, 10.0\text{MeV}$ における共鳴曲線である。なお、フェルミ面をギャップの中央に置くことで、閉殻状態を模型的にとらえた。各温度変化に伴う共鳴幅のランダウ・スプリット幅 (或いは、フラグメンテーション幅) は、ph状態へのダンピングに対応する(19)式の第1項だけを考慮した場合に (図の破線) に比較して、pp (第2項) 及びhh (第3項) の寄与を加えた方が (図の実線)、共鳴幅の増大がより急速となることが分かる。この結果は、我々の準粒子描像での計算[6,7,8]や、PDM模型に基づく計算結果[9,10]を支持するものである。

### 参考文献

- [1] J. D. Thouless, Nucl. Phys. **22**, 78 (1961)
- [2] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Phys. Lett. **B172**, 129 (1986).
- [3] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Nucl. Phys. **A649**, 205c (1999).
- [4] K. Tanabe, Proceedings of Predeal International Summer School "Structure and stability of nucleon and nuclear systems" (Predeal, Romania, August 24-September 5, 1998) (World Scientific, 1999), 104.
- [5] 田辺孝哉, 素粒子論研究 **99**, no. 3, C14 (1999).
- [6] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, Prog. Theor. Phys. **76**, 356 (1986).
- [7] K. Sugawara-Tanabe and K. Tanabe, Prog. Theor. Phys. **76**, 1272 (1986).

- [8] K. Sugawara-Tanabe and K. Tanabe, Phys. Lett. **B192**, 268 (1987).  
 [9] N. D. Dang and A. Arima, Phys. Rev. Lett. **80**, 4145 (1998); Nucl. Phys. **A636**, 443 (1998).  
 [10] N. D. Dang, K. Tanabe and A. Arima, Phys. Rev. **C58**, 3374 (1998); Phys. Lett. **B445**, 1 (1998); Nucl. Phys. **A645**, 536 (1999).

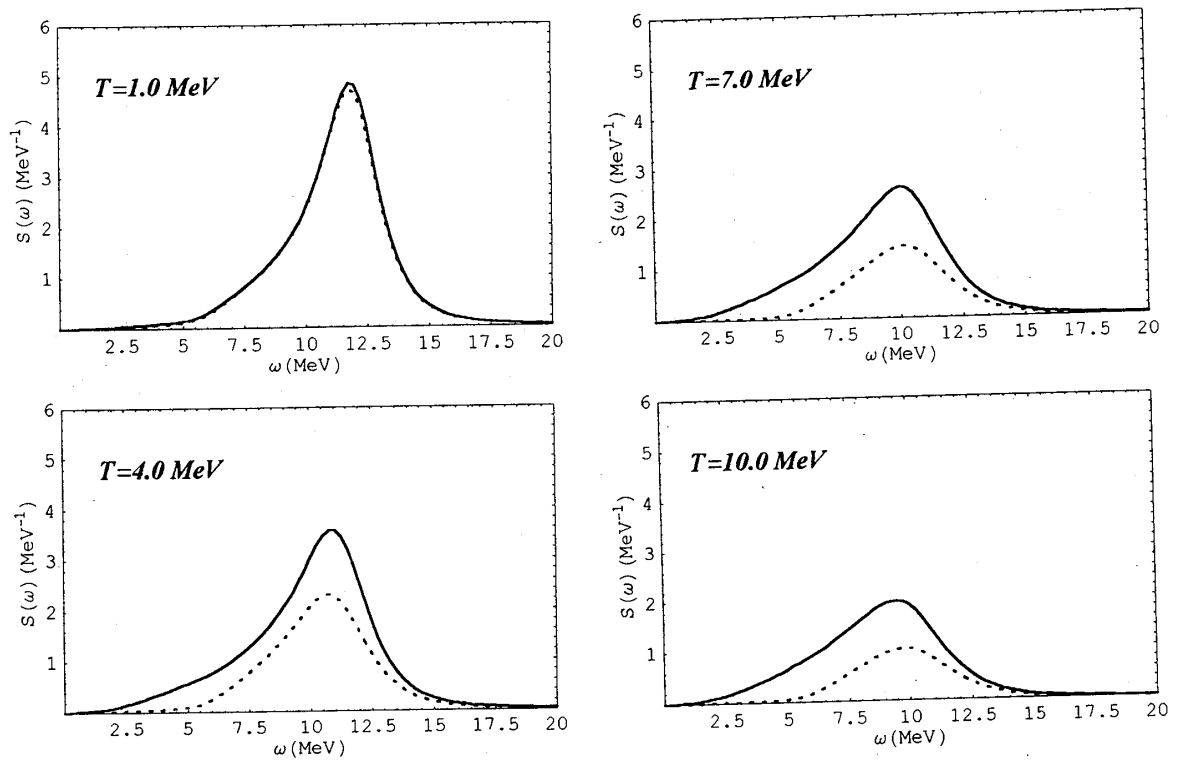


図1 巨大共鳴曲線. 実線にはphの他にppとhhからの寄与が、破線にはphだけの寄与が考慮されている.