ハドロンの表現

林　　憲　二（東大教養）
白藤孟志（埼玉大理工）
松本秀樹（東大教養）

"The axiomatic basis of theoretical physics cannot be extracted from experience but must be freely invented."

A.Einstein

最近、伝統的な場の理論にとつて代ろうとする色々な試みが提出されています。ここでは主に無限成分場の方法に焦点をあてて現在の状況を概観し併せてその内包する問題点を整理してみよう。

い

高エネルギ現象論でレジ仮説は寵愛されているようです。実際それが第一近似としてかなり成功していることがウイン会議の報告に記されています。[1)]歴史的には非相対論の範囲で束縛状態と共鳴状態を統一的に把える「複合系の表現」として確立されましたが、相対論的な描像、特にその力学的な基礎は明らかではありません。現象論の分野では前方散乱に対するポアンカレ群の等方群（ロレンツ群）による対称性を積極的にとり入れてレジ極を分類し、実験解析に成果をあげているのが最近の進歩の一つでありましよう。[2)]しかし理論的に複素角運動量を把握しようとする試みはそれに較べて立遅れています。例えば交叉回路に対するポアンカレ群の等方群、即はち三次元ロレンツ群による展開定理はウニテル表現の主系列の上に限られているため現実の散乱振幅を扱うことができません。[3)] 核子・パイ中間子の荷電交換散乱の実験結果はウニテル表現のすぐわきの非ウニテル表現に属する複素角運動量を必要とするからであります。このような、交叉回路での相対論的な部分波分析は当然のことながら運動学的枠組みとしては大いに有用であつてもポテンシヤル散乱の力学的条件やガリレ

イ群による分析などを勘案しますとレジ理論とは深いかかわりあいをもつているとは思われません。もつとも複素角運動量の非相対論的な基礎にのつとつて相対論的な理論をきづくことは、ハドロン系のレジ軌跡が戻らずにほぼまつすぐ無限に伸びていることからみて大変難しい訳であります。考えようによつてはそうした脈絡をたどる必要はさらさらなくて相対論的な枠組みから出発する立場もありましようし、或いはより機能的に、単に複素角運動量を用いた模型をとるむきもありましよう。その他にも似かよつた考え……… 三次元回転群の局所表現や複素ポアンカレ群によつて複素角運動量を把える……… がありますがいずれも物理的にみて難点があります。なにはともあれ、レジ極を所与として受け入れるのに抵抗を感じるむきは今迄の質量とスピンによる「素粒子の分類」を今一度根本から考えなおさねばならないのは当然であります。

ではどうすればレジ仮設は謂ゆる場の理論の枠におさまるのでしようか。「老兵は死なずただ消えるのみ」なのでしようか。散乱振幅のレジ極近似は通常の極近似の修正と見做せないことはないのですが、「レジ粒子」は大変不思議なもので、時間的な運動量に対しては一連の束縛・共鳴状態をみんなまとめて表はし、空間的な運動量に対しては非物理的な「スピン」をもつています。もつともまさにこの点にレジ型散乱振幅の漸近形が普通の粒子交換によるものと著しく相違している理由が秘められているのは周知の通りです。ポアンカレ群の既約表現として場を定義する今迄の方法では質量とスピンは互いに独立に与えることができる訳ですから、散乱振幅のボルン近似の漸近形は力学的なものではなく、単に場のスピン固有値によつて規定されているにすぎません。両者を同等の資格で扱うには、例えば場の引数として座標ばかりではなくスピン変換をも加えればよいでしよう。これは従来の場がミンコウスキ空間の一点で定義されていたため、その運動量は中間状態で自由に変わることができるのに反してスピンは殆んど固定されているという「困難」を排除してゆく態度であると共に、他方拡がりのあるものから点に移行する極限で方向の自由度、つまり四次元オイラ角による自由度は保存させることにも対応していますから、質量準位を導く試みとも結びついているといえます。もつとも二点場のように重心・相対の両座標を導入してもよい訳ですから質量とスピンを並行して取扱う方法は一意的でないことは明らかであります。この点に関してはのちにもう一

度触れる予定です。さて少し以前に色々なスピンの粒子を無限個交換するとレジ型散乱振幅が得られるのではないかというお話しがありました。[4] これを一発のボルン近似で実現するには交換される場が複合系……つまりハドロン的な質量準位をもつ無限のスピン多重項……を表現していると考えれば宜しいでしよう。更にワトスン・ゾマフエルト変換を許す形状因子が与えられる必要がありますが、現状はどうでしようか。

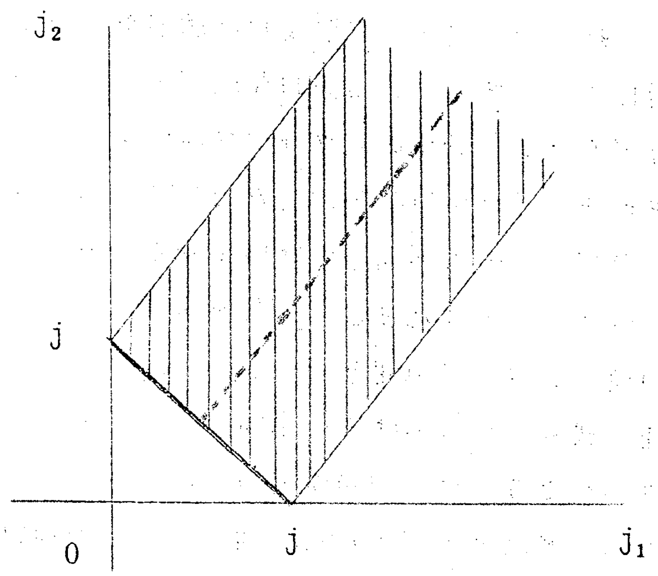
質量とスピンに相関のある無限多重項を記述できることからロレンツ群を部分群として含む非コンパクト群による場の表現が最近注目をあびてきたようです。もつとも上に少し触れましたように内部自由度をもつ場や非局所場などによつても同様のことが可能であります。超収束や流れ代数による和則は結合定数の実数性を保証するためにも、また電磁型形状因子を実験と合はせるためにも在来の方法と違つてロレンツ群のウニテル表現による場という考えを示唆しています。[5] つまりロレンツ群の有限次元(非ウニテル)表現をとりますと形状因子は一般に多項式となりますが、一方無限次元表現をとれば一般に超幾何関数となります。現在まで、ワ・ゾ変換の可能な形状因子は導かれていません。もつとも伝播関数がワ・ゾ変換を可能にしていると考えるむきもあります。多分専ら頂点関数に含まれる運動学的形状因子を導く群論的方法よりも力学的な内部方程式によつて探索する方が道理にもかなう捷径でもありましよう。この意味で今迄行はれてきた無限成分場の方法がボルン近似でレジ型散乱振幅を導くのに苦労しているのも当然といえます。[6]

無限成分場を最初に考えられたのは後に謎の失踪で夭折されたマヨナラ氏であります。もちろん氏の意図は上述のようなものではなく、当時デイラク理論の予言していた反粒子の予言していた反電子がまだ発見されていないとしてそれが現はれないような理論をつくることにありました。謂ゆるマヨナラ方程式は負エネルギ状態をもたず、質量準位が $m/(s+1/2)$ で与えられる無限のスピン多重項を解としています。所で実は論文発表の数ケ月前に陽電子が発見されていたのですがまだロウマにはその情報が届いていなかつたという事情を背景としてその非物理的な質量準位の故か氏の理論はあまり注意をひかれなかつたようです。[7]

数年前に南部氏は質量準位や形状因子を簡単に計算できる模型として無限成

分場の波動方程式を提出されました。[8] まず水素原子を例にとりつつ適当に群を拡張してマヨラナ型とは逆の、高いスピンに対して質量も大きくなる謂ゆる増加型質量準位を与える方程式を案出されたのであります。またすこしく工夫をこらせば空間的な運動量に対する解をもたない模型も可能であることを示されました。一般的にいつてあるスピン場を記述するとき下の図から明らかなように斜線の範囲内でどの内部ロレンツ群の既約表現を用いてもよい筈です。図で座標軸に接している点に対応する表現(j,0) 及び(0,j) は三次元回転群の下でも既約であるという特殊な性質のため附加条件なしにスピン j の場を記述できるという便利な点があるので以前に詳しく調べられました。[9] よく慣れ親しんでいるテンソルスピノル形式によるスピン場は図の黒線の中央に対応する表現(j/2,j/2) によつて記述されますが最近伝播関数や散乱振幅のボルン近似などが具体的に調べられています。[10]

これらの方法では常に一つの表現を場に対応させていますがこれには別に深い理由がある訳ではなく非常に多くの表現の直和で場を表はしても一向に差支えない訳であります。例えばスカラ場は図の点線上のすべての非ウニテル表現の直和で与えてもよい筈です。この意味でロレンツ群の非ウニテル(有限次元)表現を無限個加えて場を表現すれば外場、例えば電磁場との相互作用のボルン近似で有理関数型の形状因子が現はれることに着目されたのは南部氏の卓見であります。色々な群を用い



第零図　スピン j を記述できる表現 (j_1,j_2)の範囲；斜線内の整数又は半整数の組

てフロンズデル氏やバルト氏などもほぼこの線に沿つて仕事をされていますが、現状ではまだ実験との比較をする段階にきているとは言い兼ねます。[11]

理論的にも問題がない訳ではなく無限成分場がロレンツ群のウニテル表現に属している場合に限つてもいくつかの「資格審査」を受けた結果、謂ゆる「病幣」が指摘されました。なかでも局所性とスピン・統計の定理との関係はよく知られている有限次元の場合と全く事情が異なつていることがワインベルク氏の方法[9]を拡張したフエルトマン・マシウズ両氏によつて明らかにされました。[12] 厳密に局所性を要求すると質量の無限縮退というあまり愉快でない結果を避けられないのですから、物理的な質量準位を問題にするかぎり微視的因果律を多少ゆるめて非局所性を導入する必要があるかと思はれます。また無限成分の波動方程式につきものの空間的な運動量に対する解の存在も先の問題と併せて慎重に考えざるをえません。いずれにせよ最終的な結着をつけるにはいま少し時間がかかりそうです。

これまでは主として離散的な添字を群表現の指標としてもつ無限成分場のお話しでありましたが連続的な添字をもつ場合も古くから調べられています。多分デイラク氏がロレンツ群のウニテル表現にとりくまれたのが最初でしよう。また連続添字を連続変数とみなして場の引数に格上げする……　といつてはその意図を正確に再現してはいませんが……　試みとして湯川氏により二点場なる概念が提出されました。[13] その後この国では中野氏の剛体模型に始まる種々の模型が内部自由度と関連して導入され詳しく調べられましたが、[14] これら一連の試みのねらいは「一体問題としてどのような自由度が可能か」という点にあつたようです。非局所場理論は最近湯川・片山両氏によつて素領域の量子論という形に書き直されて、南部理論との類似性やマルコフ因果律の導出など注目すべき結果が得られています。[15] 素領域場が第零図の斜線で示した非ウニテル表現すべての直和で表現されている点では先述の南部氏の無限成分場の方法の拡張ないし一般化ともとれますが重要なことは寧ろ素領域の存在を要請することから必然的に生じる時空の非分割性を反映する自由度が場に対する差分方程式に含まれているという特徴的な点にあろうかと思はれます。これを明らかにするのが重要ではないでしようか。尚、高林氏は内部連続変数をもつ群の構造を詳しく検討されて連続変数から離散添字への移行を調べられているようで

す。[16)]

非局所場の導入の際の初心に帰り無限大の自由度の特徴を相互作用に求めてはどうかとの問題提起がレジ仮説と関連して田中氏によつてなされたのはこの理論にとつて一つの転機になつたといえましよう。[17)] その特徴が散乱振幅のレジ的な振舞いとなつて現はれるという仮定から非局所場の量子化はレジ型漸近形が導かれるように行はれるべし……と考えられた訳ですが量子化という以上、基礎的な議論つまり交換関係から問題にすべきでしよう。現状脱出という意図だけでなく、拡がりのある場と「レジ粒子」との関係は若しあるとすればより現実的な模型で探求してもいいのではないでしようか。

以上述べてきたことを要約しますと場の理論での試みは大別して二つの流れがあるといえます。[*)]一つは場の拡がりを本質的なものとして把えてゆく立場であります。これは物理的な直観という点ではすぐれていますが方程式をつくるのもまた解くのもかなりむつかしい。もう一つは無限成分場の方程式を基礎とする立場で、群論的な構成にもとずいていますから解の色々な性質が容易に導かれます。併し水素原子のようにその力学が代数的方法で取り扱うことのできる特殊な場合を除いて力学との関係が明確ではありません。従つてワ・ゾ変換の可能な形状因子はこの方法で導こうとするのはないものねだりかもしれません。併しながら第二の方法が複合系の方程式として伝統的に君臨してきたベエテ・サルピタ方程式のもつ困難を回避することから生れてきたことを想い起すとまず第一の方法との関係がもつと明らかにされる必要があります。特に物理的な無限成分場がもつていると考えられる非局所性が重要な焦点となるでしよう。以下では無限成分場の方法に基づく質量準位、形状因子、ボルン近似などを順を追つて少しく具体的にみることにします。また最後に謂ゆる無限成分場の「病弊」といわれているものを整理する予定であります。

---

*) 最近流れの量子論という新らしい試み……観測可能な流れとその交換関係を基礎とする……が提出されてロレンツ不変性、エネルギの正定値性など量子論としての無撞着性が具体的な模型で確かめられています。[18)]

ろ

まず無限成分場理論の発端となつた質量準位の話から始めます。いで述べましたように、マヨラナ氏は$(\vec{\alpha}\vec{P}+W-\beta M)\psi=0$ に於て、βが正固有値のみを持つことを要求したわけです。[21] このときロレンツ不変な密度$\psi^{+}\beta\psi$は正値定符号ですからウニテル表現となります。上の方程式は、マヨラナ方程式、$(\Gamma_{\mu}P^{\mu}-\kappa)\psi=0$ の形に書き換えられ、ψがロレンツ群のウニテル表現$\{k_0, c\}=\{0, 1/2\}$ 又は $\{1/2, 0\}$に従う時に限り、この方程式は空間反転を含めたロレンツ変換で不変となります。*) 更にΓ_{μ} がロレンツ・ベクトルであることから、

$$\langle s, s_3 | \Gamma_0 | s', s_3' \rangle = (s+1/2)\delta_{ss'}\delta_{s_3 s_3'}$$

が得られ、[22] 時間的運動量$(P_0=\kappa/(s+1/2), \vec{0})$に対する解が存在します。

南部氏によつて指摘されていますように、[8] ハドロン系の性質を解明しようとする時、第一にその力学法則がわからないこと、第二にそれを取扱う数学的方法が十分でないという困難があります。例えば、クオク模型にB·S 方程式を適用しようとしても、クオク間の力学自身が不明であり、さらに方程式ができたとしても、それを解くことは殆どできません。相対論的波動方程式には、粒子の質量とスピンを抜き出して、観測系の変化による粒子の運動状態の変化を記述する運動学的側面とともに、例えば外場と相互作用している粒子を記述する力学的側面があつてしかるべきです。質量、形状因子、散乱断面積などの観測量のみがわかればよいという立場に立てば、内部運動の完全な力学法則から出発することは迂遠な方法といえましよう。そこで、従来のように質量とスピンを始めから独立に与える完全に運動学的な方程式ではなく、方程式自身が力学を含んでいる簡単な模型をとるという中間的な立場から、特に質量準位に重点をおきなんらかの手掛かりを得ようというのが無限成分場理論の注目されてきたゆえんであります。

具体的には、物理状態があるコンパクト群E_0(等方群)によつて特徴づけら

---

*) (j_1, j_2) と$\{k_0, c\}$には次の関係があります：

$k_0=j_1-j_2$, $c=j_1+j_2+1$.

れる対称性を持つており、その質量の縮退の構造はE_0のある表現の集合Sで表わされているとします。さらに、そのS全体がE_0を含む大きい群G_0のある既約表現になつていると仮定します。E_0には勿論内部回転を表わすSO(3)が含まれていなくてはなりません。物理状態が張る空間は、観測可能量と関係のある遷移演算子などを含めた場合、更に大きな群Gの代数に対しても不変だと仮定します。例えば、水素原子の縮退は三次元角運動量$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$の他に、レンツ・ベクトル$\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{p}\times\vec{L}-\vec{L}\times\vec{p})-\vec{r}/r$を導入することにより、SO(4)の構造を持つことは周知の通りです。さらに、その波動関数の空間はSO(4.1)の既約表現になつており、二重極遷移演算子をも含めると、SO(4,2)の既約表現になることもわかつています。[19] 相対論的な場合にはGに内部ロレンツ群を含めねばなりませんから、Gは非コンパクト群となり、演算子としてはロレンツ変換の生成演算子$S_{\mu\nu}$の他に、確率密度流を定義するベクトルΓ_μを含んでいる必要があります。前述のマヨナラ氏の例ではE_0=SO(3), G_0 SO(3.1), G=SO(3.2) となつています。

南部氏は水素原子を参考にしつつ、E_0=SO(4), G_0=SO(4.1), G=SO(4.2)となる模型をつくりました。[8] 表現空間は $S_{\pm k}=\sum_J\oplus D(\frac{J}{2}\pm\frac{k}{2},\frac{J}{2})$ $(=\sum_J\oplus\{\phi_J^{J\pm k}$: スピノル表現$\})$で、SO(4.2)の生成演算子は、ボソン演算子を用いて、

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$2M_{ij}=\epsilon_{ijk}(a^+\sigma_k a+b^+\sigma_k b)$$

$$2M_{4i}=a^+\sigma_i a-b^+\sigma_i b$$

$$2M_{0i}=a^+\sigma_i cb^+-bc\sigma_i a$$

$$2M_{5i}=-i(a^+\sigma_i cb^++bc\sigma_i a) \tag{1}$$

$$2M_{54}=a^+cb^+-bca$$

$$2M_{40}=-i(a^{+}cb^{+}+bca)$$

$$2M_{50}=(a^{+}a+b^{+}b+2)\equiv N \quad .$$

によつて与えられます。マヨラナ型の最も簡単な方程式

$$[\Gamma_{\mu}P^{\mu}+\kappa(\Gamma_{4}-\alpha)]\psi=0 \tag{2}$$

$$\Gamma_{\mu}=M_{5\mu},\quad \Gamma_{4}=M_{54},\quad \alpha,\kappa\ \text{は常数}$$

を考えます。空間反転で不変なように、以後k＝0の場合のみ考えます。

$$P_{\alpha}=(P_{\mu},-\kappa),\quad \Gamma_{\alpha}=M_{5\alpha}\quad(\alpha=0,1,2,3,4)$$

と定義しますと上の方程式は

$$[\Gamma_{\alpha}P^{\alpha}-\alpha\kappa]\psi=0 \quad .$$

と書き換えられます。但し計量は(1,-1,-1,-1,-1) です。

i) $P_{\mu}^{2}=m^{2}>\kappa^{2}$ のとき。

$$P_{\alpha}=(m,\vec{0},-\kappa)\rightarrow(\mathrm{sgn}(m)\sqrt{m^{2}-\kappa^{2}},\ \vec{0},\ 0)$$

即ち

$$\psi=e^{-i\eta M_{04}}\phi,\qquad \tanh\eta=\kappa/m$$

の変換により ϕ の方程式

$$[\mathrm{sgn}(m)\sqrt{m^{2}-\kappa^{2}}\,\Gamma_{0}-\alpha\kappa]\phi=0 \tag{3}$$

が得られ、質量準位は

$$m=|\kappa|\,\mathrm{sgn}(n\alpha)(1+\alpha^{2}/N^{2})^{1/2}$$

によつて与えられます。

ii) $P_{\mu}^{2}=m^{2}<\kappa^{2}$ のとき。

i）と同じように、変換

$$\left.\begin{array}{l} P_\alpha \rightarrow (0, \vec{0}, \pm\sqrt{\kappa^2 - m^2}) \\ \text{によつて、} \\ [\pm\sqrt{\kappa^2 - m^2}\ \Gamma_4 - \alpha\kappa]\ \phi = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

が得られます。Γ_4 は非コンパクト演算子ですから、その固有値は連続的になり、従つて質量準位は $-\infty < m^2 < \kappa^2$ となります。

これは減少型質量準位であり、加えて正負エネルギ非対称です。南部氏は更にSO(4,2) のウニテル表現とデイラク場との直積を考え、正負対称な水素原子型スペクトルと正定値確率密度を与え、かつ空間的解を持たぬ波動方程式を作つています。

他に質量準位を出す試みは色々あります。以下の表でまとめてみました。SO(4,2) の場合には、非相対論の水素原子の代数がそれに従うのを反映して、水素原子型の質量準位が導かれますが、空間的解を除くには、群の拡張や方程式の修正が必要です。

これらの方法は完全に代数的で物理的意味がはつきりしません。B・S方程式を基礎にして内部運動を非相対論的に取扱い、相互作用をクウロン型にとりますと、複合粒子の相対論運動方程式はマヨラナ型方程式に等しくなることが示されています。[20]

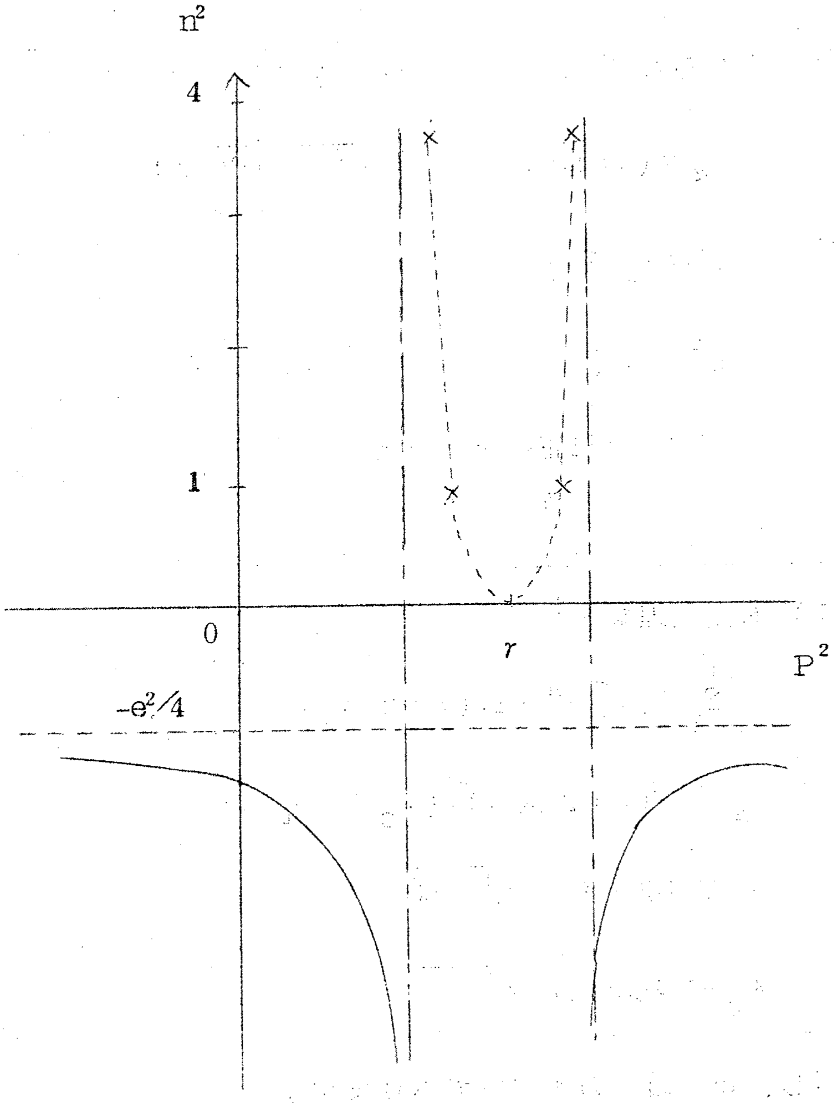
素領域理論では、局所性を越えようというわけですから、場の方程式が差分方程式となる様に、無限成分場理論と比べ根本的な違いがあります。しかし、その差分方程式からマヨラナ方程式が導かれますから、両者は似た性質を持つと考えられます。

第一表　質量準位を与える模型

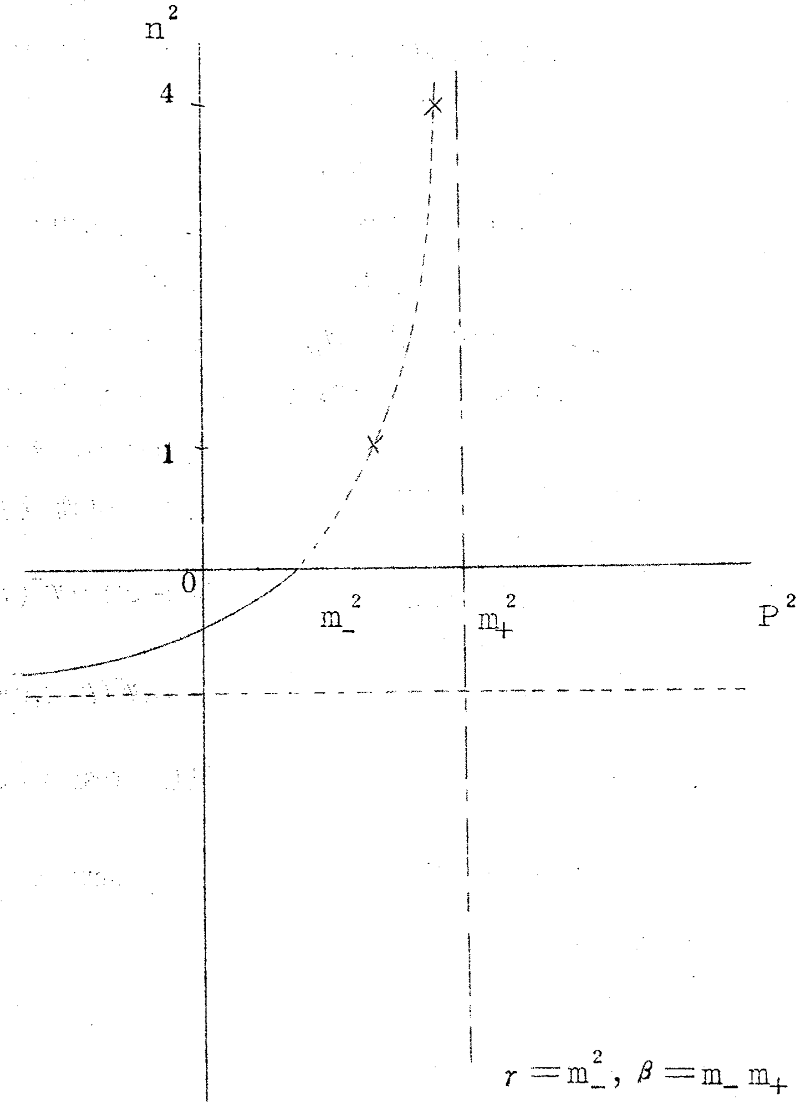
群と表現	方程式及び質量準位
SL(2, C) $\{0, \tfrac{1}{2}\}$ 又は $\{\tfrac{1}{2}, 0\}$	1) $(\Gamma_\mu P^\mu - \kappa)\psi = 0$ [21] $m = \kappa/(s+\tfrac{1}{2})$ $P^2 < 0$ では連続スペクトル
SL(2, C) ウニテル表現	2) $(P_\mu \gamma^\mu - m_0 - \tfrac{1}{2} m_1 \sigma_{\mu\nu} S^{\mu\nu})\psi = 0$ [23] $m = m_1(s+\tfrac{1}{2}) \pm \sqrt{(m_0 - m_1)^2 + m_1^2(s(s+1) - c_0 - 3/4)}$ 空間的解存在
SL(2, C) ウニテル表現	3) $(\Gamma_{\mu\nu} P^\mu P^\nu - \kappa^2)\psi = 0$ [24] $\Gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \alpha(\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} S^{\lambda\rho} S_{\lambda\rho} - S^{\mu\lambda} S^{\nu\rho} g_{\lambda\rho})$ $m^2 = \kappa^2/(1 + \alpha s(s+1))$ $P^2 < 0$ では連続スペクトル
SO(4, 2) $\Sigma \oplus D(J/2, J/2)$	4) $(\Gamma_\mu P^\mu + \kappa(\Gamma_4 - \alpha))\psi = 0$ [8] $m = \lvert\kappa\rvert(1 + \alpha^2/N^2)^{1/2}\ \mathrm{sgn}(\kappa\alpha)$ $-\infty < m^2 < \kappa^2$ 連続 5) $(\Gamma_\mu P^\mu + \Gamma_4 P_\mu P^\mu/\kappa - \alpha\gamma_\mu P^\mu)\psi = 0$ [8] $m = \pm\kappa(1 - \alpha^2/N^2)^{1/2}$ $(\gamma^0 = 1)$ $\lvert m\rvert > \kappa$ 連続 $P^2 = 0$

	6) $[\alpha \tau_3 P_\mu \Gamma^\mu + (P^2-\beta)\Gamma_4 + \frac{1}{2} e^2(P^2-\gamma)]\psi = 0$ [24] $\lambda_\alpha = (\lvert\alpha\rvert P_\mu,\ P^2-\beta)/\sqrt{\alpha^2 P^2-(P^2-\beta)^2}$ $n = \lambda_\alpha \Gamma^\alpha$ として $n^2 = e^4(P^2-\gamma)^2/4(\alpha^2 P^2-(P^2-\beta)^2)$ n^2： 分母正のとき離散的 負のとき連続
$\Sigma \oplus \{k_0, c\}$	7) 素領域理論 [15] $[\sum_{\alpha=1}^{4} \lambda_\alpha \epsilon_\mu^\alpha \partial^\mu - i\lambda(\kappa+2n\pi/\lambda)]\Psi_{\kappa+2n\pi/\lambda} = 0$ $P_\mu^2 = \lambda^2(\kappa+2n\pi/\lambda)^2/(\lambda_S c+\lambda_T k_0)^2$ $\lambda_S = \mathrm{sgn}(\lambda_2)\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ $\lambda_T = \mathrm{sgn}(\lambda_0)\sqrt{\lambda_0^2-\lambda_3^2}$

（但し、類似のものは省いてあります）



第1図(a)　　模型b）の質量準位



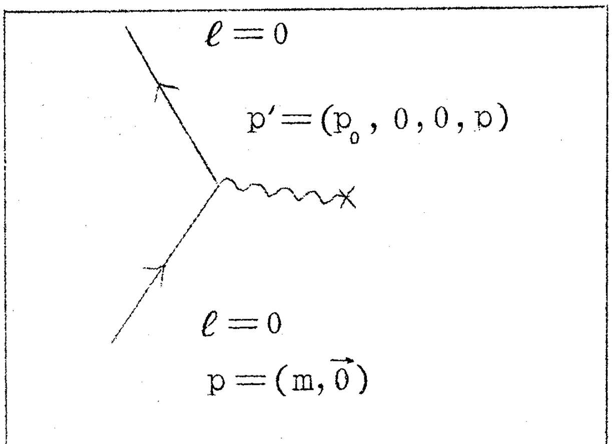
$\gamma = m_-^2$, $\beta = m_- m_+$

$\alpha^2 = (m_+ - m_-)^2$

第一図(b)　　模型 b) の質量準位

さて形状因子に話を進めます。形状因子は一般に運動学的形状因子（群論的に定まる部分）と力学的形状因子（輻射補正又は全体的な力学方程式で定まる部分）との積で表わされます。無限成分場理論が有効性を発揮するのは、一発のボルン近似つまり運動学的部分だけで通常の力学的部分を含むような形状因子（ｔの有限関数）が得られる点にあります。さらに相互作用を局所的かつロレンツ不変な形に容易に導入できることも挙げられます。

簡単のためにスカラ場との相互作用 $\Psi_\alpha^+(x)\Psi_\alpha(x)A(x)$（$A(x)$ はスカラ外場を示す）をとり、無限成分場に含まれるスピン零状態について考えます。[8),24)]



第二図

入射粒子の静止系では形状因子は運動量表示では

$$\left.\begin{aligned} F(p-p') &= (\Psi^+(\ell=0,\vec{p}), \Psi(\ell=0,\vec{0})) \\ &= (\Psi^+(\ell=0,\vec{0})e^{i\epsilon K_3}\Psi(\ell=0,\vec{0})) \\ \text{但し}\quad & \cosh = p_0/m \\ & \sinh\ \epsilon = p/m \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となります。$D(J/2, J/2)$ 表現では

$$F(p-p') = \sinh((J+1)\epsilon)/(J+1)\sinh\epsilon \tag{6}$$

$$= C_J^1(\cosh\epsilon)/(J+1) \tag{6'}$$

C_J^1 はゲエゲンバウエル多項式、

$\cosh\epsilon = 1 - t/2m^2$,　　　$t = (p-p')^2$

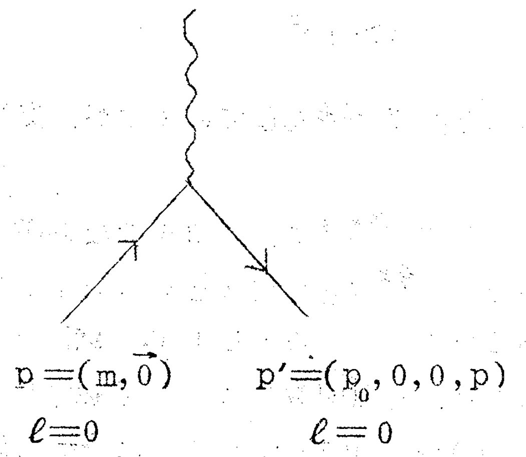
ですから、$F(p-p')$ は t について J 次の多項式となります。しかし、J を解

析的にウニテル表現の領域$(J+1)^2<1$に接続すると、多項式でない形状因子が得られます。例えば$J=-\frac{1}{2}$のときには(6)式は

$$F(p-p')=(1-t/4m^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

となります。

ついでに交叉対称性について触れておきます。第二図を交叉すると第三図となります。



第　三　図

前の式でp_0が負になることに注意すれば、(5)で$\cosh\epsilon=|p_0|/m$となりますから　$\cosh\epsilon=(s/2m^2-1)$, $s=(p-p')^2$とすればよいわけです。s, tを用いて(6), (6′)式を書けば、

$$F_1(t)=\frac{\sinh[(J+1)\sinh^{-1}\{t(t-4m^2)(2m^2)^{-2}\}^{\frac{1}{2}}]}{(J+1)[t(t-4m^2)(2m^2)^{-2}]^{\frac{1}{2}}} \quad (t<0) \tag{8}$$

$$=C_J^1\left(1-\frac{t}{2m^2}\right)/(J+1) \tag{8'}$$

$$F_2(s)=\frac{\sinh[(J+1)\sinh\{s(s-4m^2)(2m^2)^{-2}\}^{\frac{1}{2}}]}{(J+1)[s(s-4m^2)(2m^2)^{-2}]^{\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

$$=C_J^1(s/2m^2-1)/(J+1) \tag{9'}$$

となります。(8′)及び(9′)からF_1, F_2は$F_1(t)=F_2(4m^2-t)$という関係を満たし、Jが整数でない時には、F_1はt＝$4m^2$に、F_2はs＝0に分岐点を持ちます。更にJが非負整数の時には$C^1_J(x)=(-)^J C^1_J(-x)$の関係がありますから、有限次元の場合には、上の結果から、符号だけの違いはありますが、交叉対称性が成立しているようにみえます。符号の違いは場の演算子の荷電共軛の定義をもつとはつきりさせれば消えると考えられます。

$J=-\frac{1}{2}$の場合には(8)，(9)は

$$F_1(t)=(1-t/4m^2)^{-1/2} \qquad t<0$$

$$F_2(s)=(s/4m^2)^{-1/2} \qquad s>4m^2$$

となり、ウニテル表現の場合は先に述べた関係はみたしていますが、交叉対称性は成立しないようです。[25]

ウニテル表現へ移行することにより、(7)式のように、多項式でない形状因子を出せることを示しましたが、もう一つの考え方としてスピン零の核子が$D(J/2, J/2)$表現の無限の重ね合わせでできているとします。形状因子はtの無限級数になりますから、収束する限り、有理関数又は超幾何関数となる可能性がでてきます。例えば、$\Psi(J, \ell=0)$を、$D(J/2, J/2)$に属する場の$\ell=0$部分として、

$$\Psi(\ell=0)=\sum_{J=0}^{\infty} a_J \, \Psi(J, \ell=0)$$

$$\alpha=\left[2-\mu^2/m^2+\sqrt{(\mu^2/m^2-4)\mu^2/m^2}\right]/2$$

$$\mu^2/m^2>4, \qquad |a_J|^2/(J+1)=\alpha^J$$

ととれば

$$F(p-p')=\sum_{J=0}^{\infty}|a_J|^2/(J+1)\cdot C^1_J\left(1-\frac{t}{2m^2}\right)$$

$$=\frac{m^2}{\alpha}\,\frac{1}{t-\mu^2}$$

となります。[3]

--------質量準位のところで述べた模型（特にi）の基底状態N＝2）の形状因子を調べておきます。方程式(3)より $\phi(N=2)=\phi_0^0$ ですから、N＝2の静止状態 $\Psi(N=2)$ は

$$\Psi(N=2)=e^{-i\eta M_{04}}\,\phi_0^0 \qquad (\tanh\eta=\kappa/m)$$

によつて与えられます。あとでわかるように無限個の $D(J/2,\ J/2)$ 表現のスピン零部分を重ねた状態になつています。

$$F(p-p')=(\Psi^+(p),\ \Psi(0))$$

$$=(\phi_0^0\ e^{i\eta M_{04}}\ e^{i\epsilon M_{03}}\ e^{-i\eta M_{04}}\ \phi_0^0)$$

ここで、$M_{30}=T_1$, $M_{04}=T_2$, $M_{43}=T_3$ とおきますと、

$$[T_1, T_2]=-iT_3$$

$$[T_2, T_3]=iT_1$$

$$[T_3, T_1]=iT_2$$

のようにSO(2,1) の代数となります。従つて

$$e^{i\eta M_{04}}\ e^{i\epsilon M_{03}}\ e^{-i\eta M_{04}}=e^{i\alpha T_3}\ e^{i\beta T_2}\ e^{i\gamma T_3}$$

と書け、簡単な計算により、

$$\sinh(\beta/2)=\pm\sinh(\epsilon/2)\ \cosh\eta$$

$$\cos\alpha=\pm\sinh(\epsilon/2)\sinh\eta/\cosh(\beta/2)$$

$$\sin\alpha=\mp\cosh(\epsilon/2)/\cosh(\beta/2)$$

$$\cos\gamma=-\cos\alpha,\ \sin\gamma=-\sin\alpha$$

となります。今の場合 $M_{43}=\frac{1}{2}(a^+\sigma_3 a-b^+\sigma_3 b)$ であり ϕ_0^0 に作用すると零で

すから、$(\phi_0^0\ e^{i\beta M_{04}}\ \phi_0^0)$ がわかればよいことになります。

$M_{04}=(-i/2)(a^+cb^++bca)$ ですから

$X^+=a^+cb^+,\ X^-=-bca$ とすると

$K_1=(X^++X^-)/2,$

$K_2=(X^+-X^-)/(2i)=M_{04},$

$K_3=N/2$

が再び三次元ロレンツ群の代数をみたします。カシミル演算子は

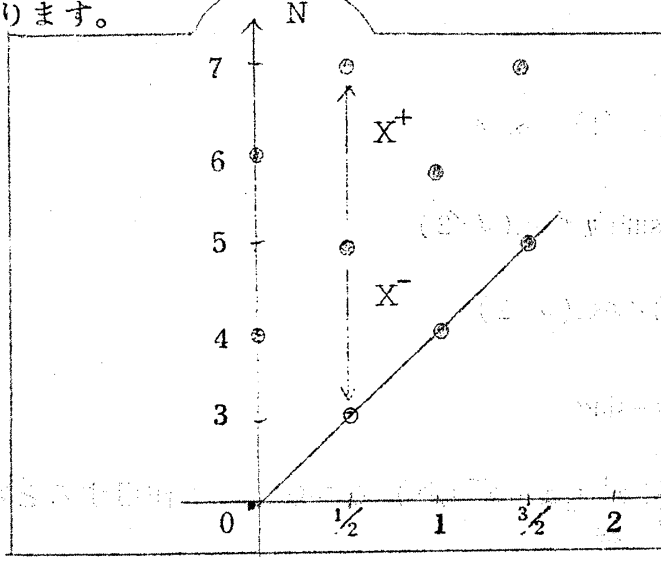
$$Q=K_1^2+K_2^2-K_3^2$$

$$=-(a^+\sigma_k a+b^+\sigma_h a)^2/4$$

となります。つまり$D(J/2,J/2)$ 表現の含んでいる三次元回転群既約表現$D(\ell)$の角運動量ℓの固有ベクトルはまたQの固有ベクトルでもある訳です。X^+, X^-, Nの演算によつて角運動量の第三成分は変化しませんから、このSO(2,1)の表現の正準基底は

$\{|\ell m, N/2>;\ \ell, m$ は一定で$N=2\ell+2,\ 2\ell+4,\cdots\}$

となります。



第四図
X^+, X^-によるNの変化；ℓ一定がSO(2,1)の既約表現となつている。

$\exp(i\beta M_{04})$ は三次元ロレンツ群の変換

$$W=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\beta/2 & i\sinh\beta/2 \\ -i\sinh\beta/2 & \cosh\beta/2 \end{pmatrix}$$

にあたり、また $Q\phi_0^0=0$, $(N/2)\phi_0^0=\phi_0^0$ ですから $SO(2,1)$ の表現行列から

$$F(p-p')=(\cosh^{-2}\beta/2)F(1,0,1;-\sinh^2\beta/2)$$
$$=(1+\sinh^2\epsilon/2/\cosh^2\eta)^{-1}$$
$$=(1-t/4(m^2-\kappa^2))^{-1}$$

が得られます。

いろいろな群についての形状因子の一覧表をつくつておきます。

第二表　形状因子

	群と表現	ベクトル場(J_μ)	スカラ場
スピン零粒子	$SO(4,2)$ $\Sigma\oplus D(J/2,J/2)$	$\dfrac{(p+p')_\mu}{2m[1-t/4(m^2-\kappa^2)]^2}\ (\Gamma_\mu)$ [8]	$\dfrac{1}{1-t/4(m^2-\kappa^2)}$
	$SL(2,C)$ $\{0,\frac{1}{2}\}$	$\dfrac{(p+p')_\mu}{2m[1-t/4m^2]^{3/2}}\ (\Gamma_\mu)$ [25][27]	$\dfrac{1}{[1-t/4m^2]^{1/2}}$
	$SO(n,2)$	$\dfrac{(p+p')_\mu}{2m[1-\cosh^2\theta\, t/4m^2]^{n/2}}\ (\Gamma_\mu)$ [26] $\dfrac{(p+p')_\mu[a-b\cosh^2\theta\, t/2m]}{2m[1-\cosh^2\theta\, t/4m^2]^{n/2}}\ (a\Gamma_\mu-ib\overleftrightarrow{\partial}_\mu)$	

スピン½粒子	SL(2,C) {½, 0}	$G_E(t) = \dfrac{1}{[1 - t/4m^2]^{3/2}}$　(Γ_μ) [25),27)]
	SL(6,C) D(-9/2, 3)	$G_E(t) = \dfrac{1}{[1 - t/4m^2]^{7/2}}$　$(\overleftrightarrow{\partial_\mu})$ [29)]

注）　(Γ_μ) は流れが $\bar{\psi}\ \Gamma_\mu\ \psi$ であることを示します。θ は(3)式の η にあたるものです。

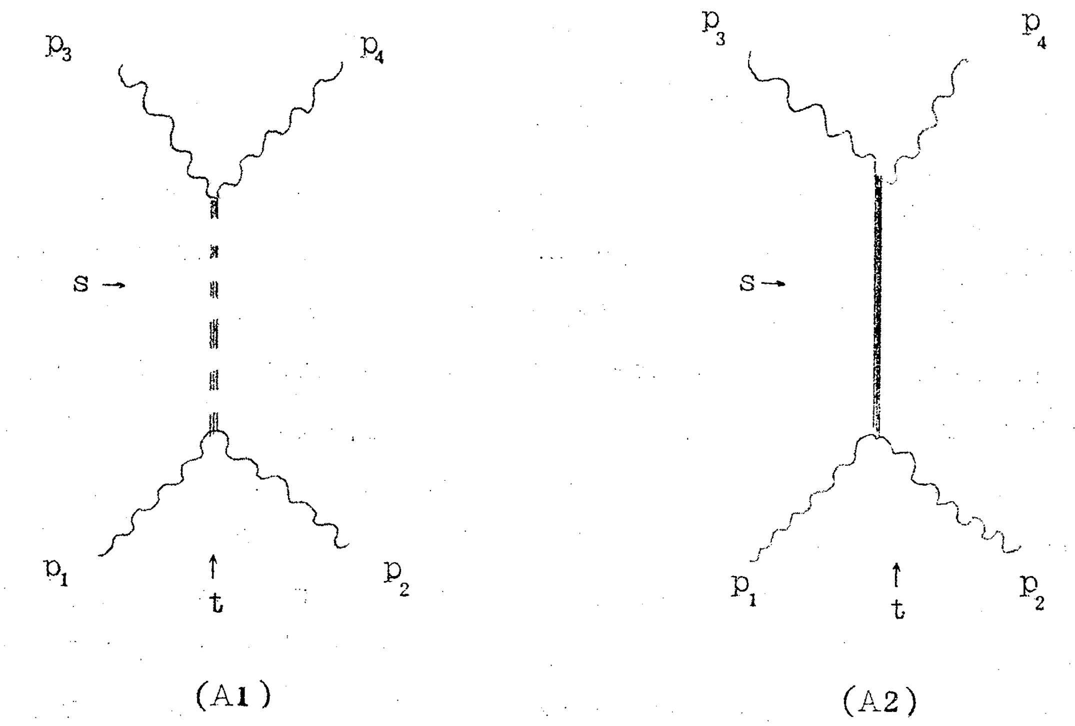
スピン½ の場合の形状因子は、(行列要素) $= \bar{u}(F_1\gamma_\mu + \mu_a(p+p')\nu\sigma^\nu_\mu F_2)u$, $G_E = F_1 + \dfrac{t}{4m^2}\mu_a F_2$ によつて定義されます。ここに u は四成分のデイラク・スピノルで μ_a は異常磁気能率です。

は

ここでは無限多重項が交換される散乱過程のボルン近似について考えてみましょう。一般にボルン振幅を求めるには交換される多重項と外線の粒子の間の相互作用及び多重項の伝播関数を知る必要があります。前者については各々の属するロレンツ群の表現を決定すれば相互作用ハミルトニアンは対称性の要請から簡単につくることができて、それは頂点関数に含まれる運動学的形状因子を与えます。一方、後者については話はそう簡単には進みません。従来の有限成分場の量子論では伝播関数は場のT積の真空期待値として定義できますが次の節で述べますように、無限成分場の量子化には「病的」と思はれる点がつきまといますから充分納得できるT積の定義がまだ確立されておりません。そこで在来の理論に沿つた考えで無限成分場の方程式の逆のフリエ変換を伝播関数としてもよい筈ですが、とにかく「ボルン近似でレジ型散乱振幅が得られるか」という問題には伝播関数のえらびかた、従がつて場の方程式の選択の自由度が残り、また対称性の議論では定まらない力学的形状因子の問題が伴うため明確な結論を下しかねているのであります。

さて、このような事情を念頭において、まずロレンツ群の有限次元に属する

多重項の交換過程から計算してみよう。簡単のためこの多重項の質量は縮退していて、(J/2,J/2) 表現に属しているとしますと伝播関数は(文献10)の(6.2式)で与えられているように $\widetilde{D}_J^{(\mu)(\nu)}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ できまりますから散乱振幅は



第五図　波線は通常のスカラ粒子、点線はローレンツ群の有限次元表現、実線は無限次元表現に属する場を示します。

$$A^{(1)}(t,s)=i^{2J}g_J^2(M^2-t)^{-1}[Q'^J]_{(\mu)}\widetilde{D}_J^{(\mu)(\nu)}[Q^J]_{(\nu)}$$

$$=i^{2J}g_J^2(4\widetilde{q}_t^2)^J(J!/(2J)!!)C_J^1(\widetilde{z}_t), \qquad (1)$$

となります。ここで

$$Q'=p_3-p_4,\quad Q=p_1-p_2,\quad [Q^J]_{(\mu)}=Q_{\mu_1}\cdots Q_{\mu_J},$$

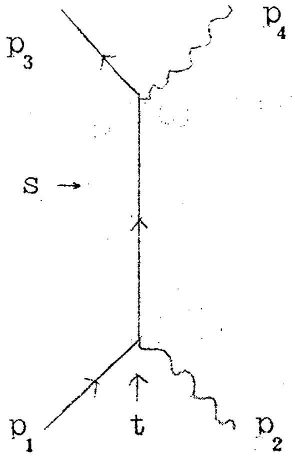
$$\tilde{z}_t=(z_t-\varDelta)/(1-\varDelta),\quad \varDelta=(m_1^2-m_2^2)^2/4q_t^2t,$$

なる記号を用いています。また g_J は結合定数、z_t はt回路の散乱角の余弦、q_t はt回路の重心系での運動量であります。散乱振巾は

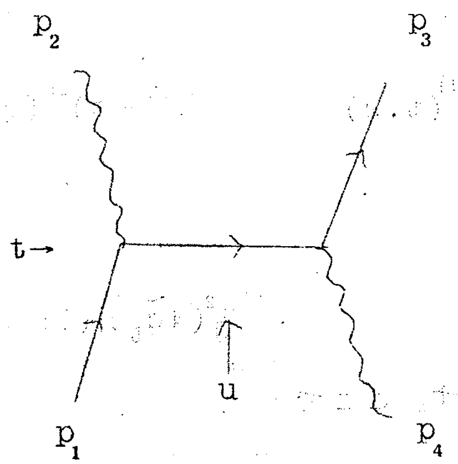
$$4\tilde{q}_t^2=4q_t^2(1-\varDelta)$$

に注意すると、前方散乱（$t=0$）で正則であります。ゲエゲンバウエル多項式 $C_J^1(\tilde{z}_t)$ は $P_l(z_t)(\ell=0,1,2,\cdots,J)$ で展開できますからスピン多重項の交換となる訳ですが非ウニテル表現を使つているため交互に、即はち、$\ell=J-1,\ J-3,\cdots$ に幽霊極が現はれます。これを除くには、すべての角運動量状態のノルムが正になる必要があります；このことが成立つのは $(J+1)^2<1$ の場合に限られます。[24] つまりこのとき $(J/2,J/2)=\{0,J+1\}$ はロレンツ群のウニテル表現になります。(1)式からs回路の高エネルギ極限は、$A^{(1)}\to s^J$ となり有限多重項交換散乱振幅は強い発散を示します。ウニテル表現に属する場（無限多重項）の交換の散乱振幅、$A^{(2)}(t,s)$ は $A^{(1)}(t,s)$ からJの解析接続（J；非負整数から $J=-1+i\sigma$ なる主系列表現又は $0>J>-2$ なる幅系列表現え）によつて得られますから、$A^{(2)}\to s^J$ となり収束しますが、あまり速く減衰しすぎて実験と合いません。

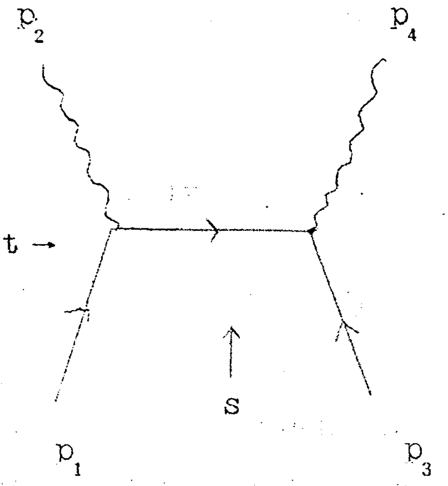
次にロレンツ群の副系列表現に属する多重項の「コンプトン」散乱振幅を計算します。[30]



（B1）



（B2）



(B3)

第6図　「コンプトン」散乱

$$B^{(1)}(t,s)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)b_l^{(1)}(t)P_l(\cos\theta_t), \tag{2}$$

$$b_l^{(1)}(t)=(\ell-J-1)!(\ell+J+1)!\,P_{J,4}^{-l}(\lambda_3\cdot\lambda)L_l^{-1}(t)P_{J,4}^{-l}(\lambda_1\cdot\lambda),$$

ここで$P_{J,4}^{-l}$ は四次元陪ルジヤンドル関数、$L_l^{-1}(t)$は伝播関数、$\lambda_1=p_1/\sqrt{p_1^2}$, $\lambda_3=p_3/\sqrt{p_3^2}$, $\lambda=(p_1+p_2)/\sqrt{t}$ です。(B2) では $(m_1-m_2)^2>t>0$ の場合には(2)式の和は収束しているので(B2)の散乱振幅を表はしています。$0>t$の領域では(2)式は収束しませんが若しワ・ゾ変換によつて解析接続できる場合には(B2)の散乱振幅はレジ表示で与えられます。ワ・ゾ変換が適用できないときには負のtの散乱振幅はよく分つていません。ここでu回路の散乱振幅がt回路のそれと解析的延長によつてつながつているのは交叉された外線が普通のスカラ粒子のためであります。無限多重項が交叉される(B3)は(B2)から交叉対称で移ることができません。これはλ_3 がp_3の解析関数でないことに起因しています。例えば早い話が質量が無限に縮退している場合には、

$$B^{(2)}(u,t)=K_{00}(s)L^{-1}(t), \tag{3}$$

$$B^{(3)}(s,t)=\bar{K}_{00}(s)\,L^{-1}(t),$$

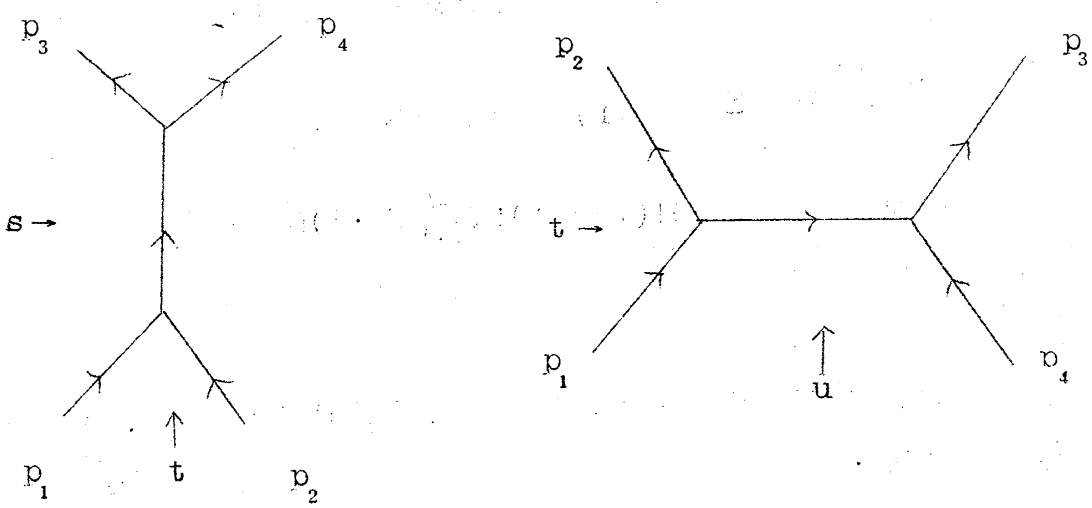
となり、

$$K_{00}(s)\sim P_{J,4}(\lambda_1\cdot\lambda_3)\,;\ \lambda_1\cdot\lambda_3=(m_1^2+m_3^2-s)/2m_1m_3,$$

$$\bar{K}_{00}(s)\sim P_{J,4}(\lambda_1\cdot\lambda_3)\,;\ \lambda_1\cdot\lambda_3=(s-m_1^2-m_3^2)/2m_1m_3,$$

となつています。

次に無限多重項同志の散乱を考えましょう。[30] 中間状態は$\{0,\ 2J+1\}$表現に属するとして、微分なしの相互作用から散乱振巾は



第七図

$$C^{(1)}(t,s)=\sum_{l=0}^{\infty}(2\ell+1)\,c_l^{(1)}(t)\,P_l(\cos\theta_t) \qquad (4)$$

$$c_l^{(1)}(t)=[(\ell+2J+1)!/(\ell-2J-1)!]\,V_l^{(1)}(p_1\cdot p_2)L_l^{-1}(t)\times$$

$$\times\,V_l^{(1)}(p_3\cdot p_4)$$

となります。ここで

$$V_l^{(1)}(p_1\cdot p_2)=(t^2-\delta_{12}^2)^{J/2}\sum_{k=l,\,l+2\cdots} b_{l,k}\, v_{12,}^{k-l} \tag{5}$$

$$b_{l,k}=[(k-\ell)!!(k+\ell+1)!!]^{-1}P_J^{k-J}(\delta_{12}/t),$$

$$\delta_{12}=m_1^2-m_2^2,\quad v_{12}^2=[t-(m_1+m_2)^2][t-(m_1-m_2)^2](t^2-\delta_{12}^2)^{-1}$$

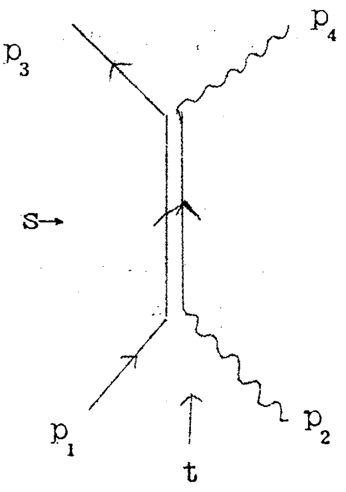
(C2) 図では$(m_1-m_2)^2>t>0$ のとき、(5)の級数は収束し散乱振幅は(4)で与えられます。しかしこの場合にも、(B2) と (B3) におけると同じように (C1) と (C2) の散乱振幅は解析的延長によつてつながらないのです。負のtに対する (C2) の散乱振幅の性質は (B2) と同じようによく分つていません。若し$(m_1-m_2)^2>t>0$で(4)式にワ・ゾ変換を適用して負のtに解析接続できるならば散乱振幅はレジ表示によつて与えられますが、このようにすべての性質を伝播関数に押しつけるお話しは説得力が弱いようです。場が主系列表現に属していて質量が完全に縮退している無限多重項の散乱振幅も計算されていますが、[31] この場合、(C2) 図の散乱振幅の$u\to\infty$の漸近形は

$$|c^{(2)}|\sim \text{const. } B\, u^{-1}$$

となります。Bは0と1の間を振動する関数です。これは (A2) 図の $s\to\infty$ の漸近的振舞いと同形であります。

次にSO(4,1) の副系列表現 (表現の指標Jは$-3/2<J<0$) に属する無限多重項の「コンプトン」散乱を計算しましょう。[30] 散乱振幅は

(D)



第八図　「コンプトン散乱」；二重線はSO(4,1) の副系列表現

$$D(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)d_n(t)\,P_{n,4}(x) \tag{6}$$

$$d_n(t)=(n-J-1)!(n-J+2)!\,P^{-n}_{J,5}(\lambda_3\cdot\lambda)L^{-1}_n(t)\,P^{-n}_{J,5}(\lambda_1\cdot\lambda)$$

となります。ここで

$$\lambda_1=(c_1\,p_{1\mu},\ \kappa_1),$$

$$\lambda=(c(p_1+p_2)_\mu,\ \kappa),$$

$$x=[(\lambda_1\cdot\lambda)(\lambda_3\cdot\lambda)-\lambda^2(\lambda_1\cdot\lambda_3)]\,[(\lambda_1\cdot\lambda)^2-\lambda^2]^{-1/2}\times$$

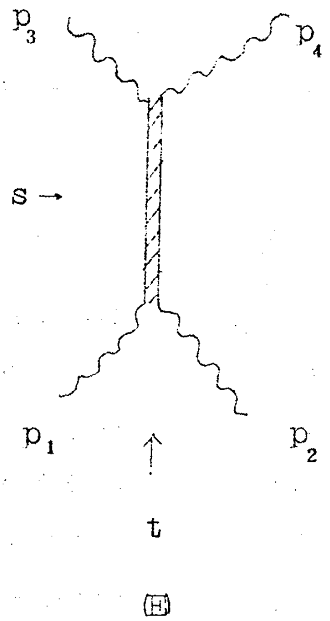
$$[(\lambda_3\cdot\lambda)^2-\lambda^2]^{-1/2},$$

c_1, κ_1 は p_1^2の関数、 c, κ は $(p_1+p_2)^2$ の関数で、 $\lambda^2=\pm1$, nは主量子数に対応します。またc_1等の運動量の依存性は模型により違います。 $\lambda^2=1$のとき（等方群は四次元回転群）、 $|x|<1$ でL_n^{-1}がnについて性質がよければ(6)の級数は収束すると考えられますが、 $\lambda^2=-1$ のとき（等方群はロレンツ群）、$x>1$ となり級数は収束しません。ワ・ゾ変換で双方を解析接続できる場合はよいのですがそうでないとき $\lambda^2=-1$ についてはおてあげです。尚、フロンズデルは第一表の第六方程式のフリエ変換の逆によつて伝播関数を定義して(5)の和が超幾何関数となることを示し、その性質を色々と調べています。[25)]

最後に多重項が二点場で表はされる場合を考えます。二点場 $\phi(x_1,x_2)$ とスカラ場 $\psi(x)$ の相互作用として、非局所的な

$$H=g\int dx_1\,dx_2\,\psi^*(x_1)\phi(x_1,x_2)\psi(x_2)$$

をとります。二点場の重心・相対座標を、$X=(x_1+x_2)/2$, $r=(x_1-x_2)$ と記し、伝播関数を$D(X-X';\ r,r')$ と書きますと下図の散乱振幅は運動学的係数を除いて



第九図　二点場の伝播

$$E(t,s)=g^2\,\overline{D}(P=p_1+p_2\,;\,p_1-p_2,\,p_3-p_4) \tag{7}$$

で与えられます。ここで$D(X-X';r,r')$のフリエ変換を$\overline{D}$で表しています。話を具体的にするために$\phi(x_1,x_2)$が次のような方程式をみたす模型をとりましょう。[32)]

$$[P_\mu^2-f(W_\mu^2)]\,\phi(x_1,x_2)=0,\ (P^\mu=i\partial/\partial x_\mu), \tag{8}$$

$$(P_\mu r^\mu)\phi=0, \tag{9}$$

$$(r_\mu^2+\lambda^2)\phi=0. \tag{10}$$

ただし

$$W_\mu=(1/2)\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P^\nu S^{\lambda\rho}/\sqrt{P^2},$$

$$S_{\mu\nu}=i(r_\mu\,\partial/\partial r_\nu-r_\nu\,\partial/\partial r_\mu),$$

であります。$S_{\mu\nu}$を含んでいるパウリ・ルバンスキ・ベクトルは静止系で内部

スピン演算子となります。(8)は質量とスピンの関係、$m_l^2=f(\ell(\ell+1))$を与えます。二点場の伝播関数として補助条件(9)，(10)をもつ波動方程式(8)のグリン関数を採用すると散乱振幅は

$$E(t,s)=\sum_{l=0}^{\infty}(2\ell+1)g^2(m_l^2-t)^{-1}[j_l(\lambda q_t)]^2P_l(\cos\theta_t) \quad (11)$$

ここで外線の質量はすべて等しくします。球ベセル関数はℓ平面の上半平面の漸近形が悪いので(11)にはワ・ゾ変換を適用できず、散乱振幅はレジ的振舞いをしません。

この欠陥を除くには例えば(10)を変更することを考えるのも一策であります。その理由は質量を縮退させたとき(11)式は非相対論のデルタ関数ポテンシアル、$\delta(r-\lambda)$のボルン近似に比例することが示せるからです。(10)式が二点場を静止形では球面(半径λ)で定義している訳ですから、内部方程式として次のもので置き換えてみます。

$$\Big[-r_\mu^2\{\partial_\mu^2-(P^\mu\cdot\partial_\mu)^2/P_\mu^2\}+\{(\partial_\mu^2-(P^\mu\partial_\mu)^2/P_\mu^2)/2a$$
$$-3/4\}r^\mu r^\nu\partial_\mu\partial_\nu+\{(\partial_\mu^2-(P^\mu\partial_\mu)^2/P_\mu^2)/2a-$$
$$-9/4\}r^\mu\partial_\mu\Big]\phi(x_1,x_2)=0 \quad (10')$$

但し、ここでは$\partial_\mu=\partial/\partial r^\mu$と記しました。このとき、$j_l(\lambda q_t)$の代りに$Q_l(1+a/q_t^2)$が現はれ散乱振幅は

$$E'(t,s)=\sum_{l=0}^{\infty}(2\ell+1)g^2(m_l^2-t)^{-1}[Q_l(1+a/q_t^2)]^2P_l(\cos\theta_t) \quad (12)$$

となります。ワ・ゾ変換がこの場合には適用できて

$$E'(t,s)=(i/2\pi)\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}d\ell(2\ell+1)\frac{1}{\sin\pi\ell}\frac{g^2}{m_l^2-t}\times$$
$$\times[Q_l(1+a/q_t^2)]^2P_l(-\cos\theta_t)+\sum_i\frac{g^2}{\sin\pi\alpha_i(t)}\times$$
$$\frac{1}{f'(\alpha_i(t)(\alpha_i(t)+1))}[Q_{\alpha_i(t)}(1+a/q_t^2)]^2P_{\alpha_i(t)}(-\cos\theta_t) \quad (13)$$

となります。但し$\alpha(t)$は$t=f(\alpha(\alpha+1))$ をαについて解いたものでレジ軌跡に対応します。

(10′)式のように内部方程式を考えて攻めてゆくのとは違つて、方程式(8)~(10)をみたす二点場を$\phi_\lambda(x_1,x_2)$としてこれを適当にλについて重ね合はせて一般の二点場を

$$\phi(x_1,x_2)=\int_0^\infty \rho(\lambda)\,\phi_\lambda(x_1,x_2)\,d\lambda \qquad (14)$$

のように表現してもよいでしょう。$\rho(\lambda)$の選択いかんによつてはよい性質(例えばワ・ゾ変換のできる)散乱振巾をみつけることができるようです。

以上は伝播関数として波動方程式のグリン関数を採用したときのお話しですが、田中氏は最近、(8)~(10)をみたす二点場の伝播関数が

$$\overline{D}=(2\alpha(t)+1)[\sin\pi\alpha(t)]^{-1}[j_{\alpha(t)}(\lambda q_t)]^2\times$$
$$\times P_{\alpha(t)}(-\cos\theta_t) \qquad (15)$$

で与えられるように理論をくみたてるべきだと提唱されています。[33] 上式を伝播関数として与えるような量子化が可能かどうか、現在まだ不明ですがその理論的根拠をさぐることは将来に残された非常に興味のある問題だと思われます。

に

有限次元表限に基づく場の理論では、局所性(微視的因果律)とロレンツ共変性から、スピンと統計の関係、PCT定理が導かれました。[34] これらの性質は無限成分場となつたときにも成立するのでしょうか。

例えば、ロレンツ不変性だけを満足する相互作用の取り方では、PCT定理を破る場合があります。[23),24] ところで最も重要なことは、局所的で物理的な質量準位をもつ無限成分場が可能かどうかということです。

これからワインベルク氏の方法によつて局所性の問題を考えてみます。[35] 純ロレンツ変換の演算子$K_i=M_{i0}$を用いて一粒子状態$|m,s;ps_3n>$ (nは他の量子数)を静止状態$|ms;s_3n>$によつて$|ms;ps_3n>=\exp(-i\vec{\epsilon}(p)\vec{K})|ms;s_3n>$ ($\tanh|\vec{\epsilon}|=|\vec{p}|/p_0$, $\vec{\epsilon}/\!/\vec{p}$) と定義します。粒子・反粒子の生成・消滅演算子

は従来のように(以後nは除く)

$$\left.\begin{aligned} &a^{+}(ms;ps_3)|0>=|ms;ps_3> \\ &a(ms;ps_3)|0>=0 \\ &b^{+}(\bar{m}\bar{s};p\bar{s}_3)|0>=|\bar{m}\bar{s};p\bar{s}_3> \\ &b(\bar{m}\bar{s};p\bar{s}_3)|0>=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(但し $|\bar{m},\bar{s};p\bar{s}_3>$ は反粒子状態を示す)

とします。

ロレンツ変換に対して

$$U(\Lambda)|ms;ps_3>=\sum_{s_3'}|ms;\Lambda p s_3'><ms\,s_3'|D(R_W)|mss_3> \quad (2)$$

ここで $D(R_W)=\exp(i\vec{\epsilon}(\Lambda p)\vec{K})U(\Lambda)\exp(-i\vec{\epsilon}(p)\vec{K})$ (ウイグナ回転)

平行移動に対して

$$U(\ell)|ms;ps_3>=\exp(ip\ell)|ms;ps_3> \quad (3)$$

と状態が変換されることから、演算子 a^{+}, a の変換性は

$$\left.\begin{aligned} &U(\Lambda)a^{+}(ms;ps_3)U(\Lambda)^{-1}=\sum_{s_3'}a^{+}(ms;\Lambda p s_3')<mss_3'|D(R_W)|mss_3> \\ &U(\Lambda)a(ms;ps_3)U(\Lambda)^{-1}=\sum_{s_3'}<ms\,s_3|D(R_W)^{+}|mss_3'>a(ms;\Lambda p s_3') \\ &U(\ell)a^{+}(ms;ps_3)U(\ell)^{-1}=\exp(ip\ell)a^{+}(ms;ps_3) \\ &U(\ell)a(ms;ps_3)U(\ell)^{-1}=\exp(-ip\ell)a(ms;ps_3) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

であることがわかります。更に $CDC^{-1}=D^{*}$ で定義される演算子C(普通 $C=\exp(-i\pi J_2)$ で $C^{(J)}_{mm'}=(-)^{J+m}\delta_{m',-m}$ です。)によつて、

$$\left.\tilde{a}^{+}(ms;ps_3)=\sum_{s_3'}a^{+}(ms;ps_3')(c^{-1})_{s_3s_3'}\right\} \quad (5)$$

$$\tilde{a}(ms;ps_3)=\sum_{s_3'} c_{s_3 s_3'}\, a(ms;ps_3')$$

を定義しておくと便利です。

演算子$\tilde{a}^+$ は次のように変換します。

$$\left.\begin{aligned} &U(\Lambda)\tilde{a}^+(ms;ps_3)U(\Lambda)^{-1}=\langle mss_3|D(R_W)|mss_3'\rangle\tilde{a}^+(ms;\Lambda ps_3') \\ &U(\ell)\tilde{a}^+(ms;ps_3)U(\ell)=\exp(ip\ell)\,\tilde{a}^+(ms;ps_3) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$\tilde{b}$, $\tilde{b}^+$ についても同様であります。

さて、ロレンツ群を含むある群の表現σに従つて変換される場の演算子は、a, $\tilde{b}^+$から次のように定義できます。

$$\psi_\alpha^{(\sigma)}(x)=\int\theta(u_0)\delta(u^2-1)d^4u/(2\pi)^3\Big\{\sum_{m,s,s_3,\beta}\langle\sigma\alpha|\exp(-i\epsilon\vec{K})|\sigma\beta\rangle\times$$

$$\times\langle\sigma\beta|mss_3\rangle\exp(-imux)a(ms;ps_3)+$$

$$+\eta\sum_{\bar{m}\bar{s}\bar{s}_3\beta}\langle\sigma\beta|\exp(-i\epsilon\vec{K})|\sigma\beta\rangle\langle\sigma\beta|\overline{ms}\,\bar{s}_3\rangle\exp(i\bar{m}ux)\times$$

$$\times\tilde{b}^+(\bar{m}\bar{s};p\bar{s}_3)\Big\} \quad (7)$$

（ただし $|\eta|=1$）

α, βは表現基底を示す指標です。その変換性は

$$\left.\begin{aligned} &U(\Lambda)\psi_\alpha^{(\sigma)}(x)U(\Lambda)^{-1}=\langle\sigma\alpha|U(\Lambda)|\sigma\beta\rangle\psi_\beta^{(\sigma)}(\Lambda x) \\ &U(\ell)\psi_\alpha^{(\sigma)}(x)U(\ell)^{-1}=\psi_\alpha^{(\sigma)}(x+\ell) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

となります。

交換関係としては、フエルミ型とボウズ型だけを考えることにします。

$$[a(ms;ps_3),a^+(m's';p's_3')]_\pm\theta(u_0)\delta(u^2-1)$$

$$=(2\pi)^3\delta^4(u-u')\delta_{mm'}\delta_{ss'}\delta_{s_3s_3'}F(s)^2 \quad (9)$$

ここにF(s)は未定関数です。

交換関係は

$$[\psi_\alpha^{(\sigma)}(x), \psi_\beta^{(\sigma)\dagger}(y)]_\pm = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \sum_m \theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\times$$

$$\times P_{\alpha\beta}(p,m)[\exp(-ip(x-y))\pm\exp(ip(x-y))] \qquad (10)$$

ただし

$$P_{\alpha\beta}(m,p) = \sum_{\gamma,s,s_3,\delta} F(s)^2/m^2 \langle\sigma\alpha|\exp(-i\epsilon\vec{K})|\sigma\gamma\rangle\times$$

$$\times\langle\sigma\gamma|mss_3\rangle\langle mss_3|\sigma\delta\rangle\langle\sigma\delta|\exp(i\epsilon\vec{K}^\dagger)|\sigma\beta\rangle \qquad (11)$$

となります。

因果律を満足するためには、左辺が

$$f(\partial)\int[\exp(-ip(x-y))-\exp(ip(x-y))]\,\theta(p_0)\delta(p^2-m^2)d^4p/(2\pi)^3$$

の形になることが要求されます。因果的であるためには、$f(\partial)$ が ∂ の多項式であることが必要かどうかは明らかでありませんが、十分条件ではあります。特に有限次元表現$D(J_1/2, J_2/2)$のときには(11)式は多項式で

$P_{\alpha\beta}(m,-p)=(-)^{J_1+J_2}P_{\alpha\beta}(m,p)$ですから[35)]

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)]_\pm = P_{\alpha\beta}(i\partial)\int d^4p/(2\pi)^3\,\theta(p_0)\delta(p^2-m^2)$$

$$\times[\exp(-ip(x-y))\pm(-)^{J_1+J_2}\exp(ip(x-y))]$$

となり、スピンと統計の関係が成立する時に限り、微視的因果律が成立することになります。

ウニテル表現のときには、フエルトマン、マシユウズ両氏によつて、[12)]

i) m_s=一定, $F(s)^2$=一定では、

$P_{\alpha\beta}(m,p)=\delta_{\alpha\beta}$ でボウズ統計のみ可能、

ii) $m_s\neq$一定、 $F(s)^2$= 一定ではボウズ統計のみ可能、$P_{\alpha\beta}(m,p)$ が多項式とは限らない。

iii) $\{0, \frac{1}{2}\}$ あるいは $\{\frac{1}{2}, 0\}$ で m_S ＝ 一定、$F(s)^2 = s + \frac{1}{2}$ ではフエルミ統計のみ可能、という結果が得られています。従つてスピンと統計の関係は一般には成立しないことになります。

微視的因果律が成立する必要 十分条件は同時刻の交換関係

$$[\psi_\alpha^{(\sigma)}(0,\vec{x}), \psi_\beta^{(\sigma)\dagger}(0,\vec{y})]_\pm = \int d^3\vec{p}/(2\pi)^3 \sum_m \frac{P'_{\alpha\beta}(m,\vec{p}) \pm P'_{\alpha\beta}(m,-\vec{p})}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \times$$

$$\times \exp(i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) \tag{12}$$

$$(P'_{\alpha\beta}(m,\vec{p}) \equiv P_{\alpha\beta}(m,(\sqrt{\vec{p}^2+m^2}, \vec{p}))$$

の右辺が零又は $\delta(\vec{x}-\vec{y})$ の有限回微分ということですから、

$(P'_{\alpha\beta}(m,\vec{p}) \pm P'_{\alpha\beta}(m,-\vec{p}))/(\vec{p}^2+m^2)^{1/2}$ が $\vec{p}$ の多項式であればよいわけです。$F(s)^2/m^3(s)$ が s の多項式でおさえられ、質量準位が正値で下に有界ならば、この条件から質量は無限に縮退していなければならないとの結果がでています。[36] そのテイラ展開による「証明」では、(12) 式中の $(\vec{p}^2+m^2)^{1/2}$ の部分が展開されていないこと、及び (11) 式の $P_{\alpha\beta}(m,p)$ で $|\vec{\epsilon}| = \sinh|\vec{p}|/m$ が $\vec{p}$ について最低次の項しか考慮されていないことの二点に疑問がありますが、結果は他の例からみて、もつともらしく思われます。[12]

更にもつと厳密な方法によつて無限成分場の場合に

i) ロレンツ共変性

ii) 有限縮退の質量準位が少なくとも一つある。

iii) 表現に少なくとも無限次元既約表現を含み、ロレンツ・ベクトル演算子 Γ_μ が存在する。

iv) 波動関数の完全性。

の仮定を設定すると、時間的及び光的運動量の状態だけでは、ii) に矛盾を生ずることをグロドスキイ、ストリタ両氏が証明しています。[37]

以上をまとめますと、無限成分場では、有限次元表現の場合のスピンと統計の関係が破れることがあります。さらに従来の因果律；$(x-y)^2 < 0$ に対して $[\psi(x), \psi^\dagger(y)]_\pm = 0$ をみたすことは、ψ が時間的運動量を持つ状態だけを表はすと考えると、質量に無限の縮退のない限り、不可能のようです。改良の方

向としては、さしあたり、局所性の拡張とか、以前は無限成分場方程式が回避してきた空間的解についての適当な解釈などが考えられます。

空間的運動量の解については、複合粒子系の特徴であると解釈することもできます。[38]

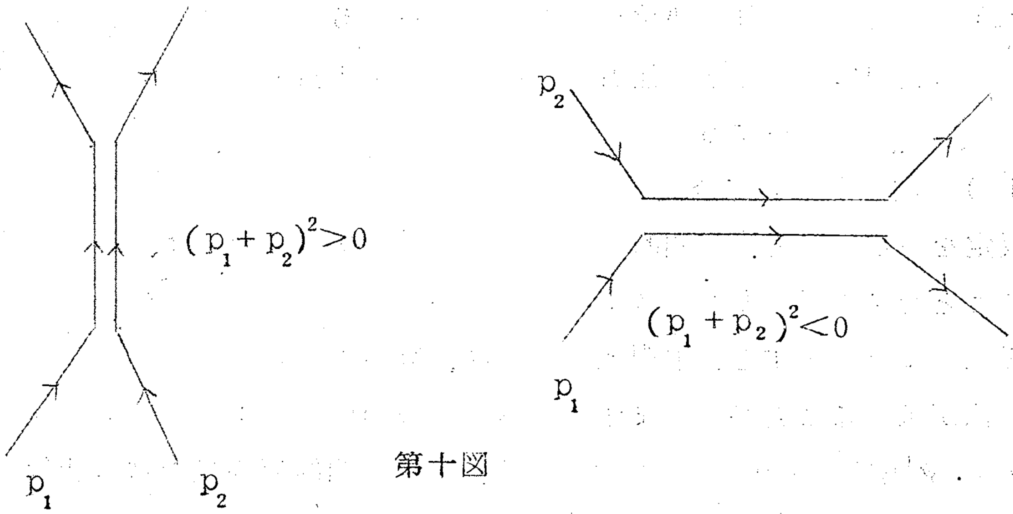
例えば、粒子が二つのクォクからできているとして、簡単にその波動関数を各々の波動関数の積とすると、それらの満たす方程式は

$$\left.\begin{aligned}(\gamma_{1\mu}p_1^{\mu}-m_1)\psi(p_1,p_2)&=0\\(\gamma_{2\mu}p_2^{\mu}-m_2)\psi(p_1,p_2)&=0\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

ですが、全エネルギ$P=p_1+p_2$を用いて、二番目の式を

$$\left.\begin{aligned}(\gamma_{1\mu}P^{\mu}-M)\psi(p_1,P)&=0\\M&=m_2+\gamma_{2\mu}p_1^{\mu}\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

としてみれば、Mを通じて、p_1 のすべての状態と関係しますから、無限成分とも考えられます。はじめの模型に帰つてみれば、各々正振動数、負振動数の解が存在します。従つて$P^2=(p_1+p_2)^2=m_1^2+m_2^2+2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)$であり、例えば$m_1=m_2=m$, $\vec{p}_1=\vec{p}_2=\vec{p}$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$で$P^2=-4\vec{p}^2$ となり空間的運動量となります。時間的解の離散状態は束縛状態、連続状態、そして空間的解は相互作用で一時的に粒子系が横に飛んでいる状態と考えられます。



第十図

いずれにせよ、局所性或いは非局所性及び空間的解析についても、もつと詳しい議論が必要であります。

文献

1) Chan Hong-Mo, «Collisions at High Energy»; Review papar presented at the XIVth International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968.

2) For example, L.Bertocchi, «Theoretical aspects of high energy phenomenology», Proceedings of the Heidelberg International Conference on Elementary Particles at Hedelberg, Germany, 1967.

3) H.Joos, in Lectures in Theoretical Physics VIIA (Boulder Summer School) p132(1965).
L.Sertorio and M.Toller, NC 33,413('64).
M.Toller, NC 37, 631('65).
F.T.Hadjioannou, NC 44A, 185('66).
J.F.Boyce, JMP 8, 675('67).

4) L.Van Hove PL 24B, 183('67)
L.Durand, PR 161, 1610('67)
M.B.Halpern, PR 159, 1328('67)

5) For example, S.Fubini, in Proceedings of the IVth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy (1967).

6) C.Fronsdal, PR 168, 1845('68).
K.Koller, NC 54, 79('68).

7) E.Majorana NC 9, 335('32).
I. M. Gel'fand A. M. Yaglom, ZETF 18, 707('48)
L.M.Gel'fand M. A. Naimark, JP (USSR) 10, 93('46).
Harish-Chandra, PRS 189A, 372('47).
V.Bargmann, AM 48, 568('47).
I.M.Gel'fand R. A. Minlos and Z. Ya Shapiro, «Representa-

tions of the Rotation and Lorentz groups and their Representations»(Pergamon press '63).

M.A.Naimark, «Linear Representations of the Lorentz Group» (Pergamon press '64).

J.Fradkin, AJP 34, 314('66).

8) Y.Nambu, in Proceedings of the IVth Coral Gables Conference at High Energy('66);

PTP(S) 37/38, 668('66); PR 160,1171('67).

9) S.Weinberg. PR 133, B1318('64).

これは

E.P.Wigner, AM 40, 149('39).

H.Joos, FdP 10, 65('62)

の系列にのつています。

10) K. Hayashi, PTP 41, No1('69).

11) C.Fronsdal, PR 156, 1653('67); PR 171, 1811('68).

C.Fronsdal and R.White, PR 163, 1835('67).

G.Cocho, C.Fronsdal, Harun Ar-Rashid and R.Wite, PRL 17, 275('66).

A. O. Barut and H. Kleinert, PR 156, 1546('67); PR 161, 1464('67).

E.Kyriakopoulos, Preprint EFI 68-53.

12) G.Feldman and P. T. Matthews, AP 40,19('66); PR 151, 1176('66); PR 154,1241('67).

E.Abers, I. T. Grodsky and R. E. Norton, PR 159, 1222('67).

H. D. I. Abarbanel and Y. Frishman, PR 171, 1442('68).

W.Bierter and K. M. Bitar, UCRL-18351.

O'Raifeartaigh and S. J. Chang, PR 170, 1316('68).

I. T. Grodsky and R. F. Streater, PRL 20,695('68).

13) H.Yukawa, PR 77, 219('53); PR 91, 415('53).

14) T.Nakano, PTP 15, 333('56).

H. Fukutome, PTP 24, 877('60); PTP 28, 731('62).

O. Hara and T. Goto, PTP 33, 907('65); PTP(S) 41, ('68).

T. Takabayashi, PTP(S) EXNo 339('65); PTP 37, 675, 767('67); PTP 38, 285, 287('67).

15) Y. Katayama and H. Yukawa, PTP(S) 41, 1('68).

Y. Katayama, I. Umemura and H. Yukawa, PTP(S) 41, 22('68).

16) T. Takabayashi PTP(S) 41, 130('68).

M. Bando, T. Inoue, Y. Takada and S. Tanaka, PTP 38, 715('67).

18) H. Sugawara, PR 170, 1659('68).

K. Bardakci, Y. Frisman and M. B. Halpern, PR 170, 1353('68).

K. Bardakci and M. B. Halpern, PR 172, 1542('68).

19) M. Bander and C. Itzykson, RMP 38, 330('66).

A. O. Barut, P. Budini and C. Fronsdal, PRS A291, 106('66).

A. O. Barut and H. Kleinert PR 156, 1541('67).

20) E. Kyriakopoulos, Preprint EFI 68-18.

G. Bisiacchi, P. Budini and G. Calucci, PR 172, 1508('68).

21) E. Majorana, Ref 7).

J. Fradkin, Ref 7).

22) I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya Shapiro, Ref 7).

M. A. Naimark, Ref 7).

23) E. Abers et al., Ref 12).

24) C. Fronsdal, Ref 11) (the first paper cited).

25) C. Fronsdal and R. White, Ref 11) (the second paper cited).

26) E. Kyriakopoulos, Ref 11).

27) A. O. Barut and H. Kleinert, Ref 11).

28) V. Bargmann, AM 48, 568('47).

A. O. Barut and C. Fronsdal, PRS A287, 532('65).

29) G. Cocho et al., Ref 11).

30) C. Fronsdal, Ref 6).

31) K. Koller, Ref 6).

32) M. Bando et al., Ref 17).
T. Shirafuji, PTP 39, 1047('68)

33) S. Tanaka, Ref 17).

34) R.F.Streater and A. S. Wightman, «PCT, Spin and Statistics and all that» (W.A.Benjamin & Company, '64).

35) S.Weinberg, Ref 9).
G.Feldman and P.T.Matthews, Ref.12).

36) H. D. I. Abarbanel and Y. Frishman, Ref 12).

37) I.T.Grodsky and R. F. Streater, Ref 12).

38) O'Raifeartaigh and S. J. Chang, Ref 12).
C.Fronsdal, Ref 11) (the first paper cited).