Y. Wada, Prog. Theor. Phys. 24 (1960), 920.
7) Y. Wada and N. Fukuda, Prog. Theor. Phys. 22 (1959), 775.
8) この方法がenergyの値をN^0の大きさまで定め得ることについては
高野、和田、福田　物性論研究 3 (1958), 618.

4　Heisenbergの非線型理論と五次元理論との比較検討

村　井　康　久 (埼玉大)

最近東大の対称性研究グループにおいて、Heisenberg の理論を再検討する機会があつたので、この理論のもついくつかの難点を挙げそれらが五次元理論によつて、どのように救われるかを書いてみたいと思う。Heisenberg の理論は既に多くの人によつて批判され、又現在では大きな魅力をもつているとは云い難いかも知れないが、ここで述べることの主眼点はこの理論の批判ではなくて、ひとつの五次元理論の概略と、これが、現在の素粒子論の枠外に出る為のある方向を示唆するものであることを示すことにある。

始めにHeisenberg 理論のどういう点と較べようとするかを列挙しながら、それに対応することが後に述べる五次元理論ではどうなつているかを簡単に書いておく。

(1) 立場の問題。Heisenberg の理論に一口で云えばスピノール一元論に基くものであるが、現在迄のところでは、基礎方程式から出発して具体的に考えられた問題は核子の質量、π中間子の質量及びπ核子間の相互作用常数の決定だけである。一元論的立場が、重力場を度外視したとしても、成功するかどうかは甚だ疑わしく、この点に就いては既に喜多氏が批判されている。現にHeisenberg 自身、ベータ相互作用のV－Aを導出する処では、ad hocな仕方をしているし、基礎方程式を現象論的に拡張しない限り、重粒子なども全部は記述出来ないように見える。したがつてここで比較の対象とされるHeisenberg 理論というのは、論文に現われた範囲での理論から

期待、想像、希望にかかる部分を引去つたものである。あらゆる素粒子を記述出来るかは問題にしないとしても、一元論的立場に由来する特徴がHeisenberg 理論にはある。それは自由場という概念がなくなつている点である。この点が以下に述べる五次元理論ではどうなつているかを先ず明瞭にさせておかなければならない。五次元理論では先ず自由場の方程式が空間のもつ幾何学的性質或いはその中に許される変換群の性質から導き出される。今例えば坂田モデルをとつて、相互作用の型をFermi type とすると、自由場の方程式がもつ対称性を相互作用項にも要求することによりその形は一義的に定まつてしまう。ところで五次元空間での自由場の式の中には $p^2+m^2=0$ を満す種々の質量を持つた場が含まれており、この質量の特定な場に対する値は相互作用を入れて始めて定まる。即ち、五番目の座標に共軛な量が質量になつており、通常の理論でのneutrino eq. に対応するものが、五次元理論では、いろいろな質量を持つたFermion に対する方程式になつている。したがつて自由場の方程場といつても通常のものとは全く違つて、特定の場の自由な状態に対応するものではなく、種々の場を記述する為の枠を与えているにすぎない。そして相互作用項を入れて始めて、物理的な内容をもつた方程式が現われるのであつて、これが丁度Heisenberg の基礎方程式を五次元に拡張したものと解釈し得るのである。基礎方程式の導き出し方はHeisenberg の場合には、Pauli Gűrsey 変換とTouschek変換に関して不変になるように作に上げたとしか云えないが、五次元理論の場合には、先ず物理的考察により、Minkowski 空間から五次元空間への拡張がなされ、これのもつ幾何学的性質によつて「自由場」の式が自然に出てくるのである。Heisenberg の基礎方程式により若し一元論が完遂されるものであるならば、この方程式も、成功したAnsatzとして認められようが、対象を拡げる毎に現象論的に改変してゆかねばならないものとしたら（Σ－空間もそのひとつの現われと見られよう）基礎が貧弱であるというそしりを免れ得ないのではなかろうか。

(2) 対称性。Heisenberg の方程式は、Lorentz 変換の他に先ず、Pauli-Gűrsey 変換とTouschek変換に関して不変になつているが、これらは基礎方程式を作る際に要請されたものであるから当然なことである。し

かしこれだけでは粒子のもつ種々の対称性を指定するのには充分でないのでscale transformation を使つてひとつの量子数を与えようとしている。彼らが論文でしていることは、古典的に保存量を導いていることと、それとは無関係に量子化によつて半整数の固有値が得られるであろうことを仮定しているだけである。Heisenberg の云うscale transformation は、基礎方程式が次元の点で正しいということを表現したものであつて、Wess の検討などからみられるように、この変換から、物理的意味のある固有値を導き出すことは無理なように思える。理論を不変にする連続群があれば必ずそれに対応した保存量があるとは、交換可能性を考慮しても、何時でも云えることではない。例えばLorentz 群に関して不変であつても、六個の独立な変換の中で、固有値が明確な物理的意味を持つのは L_{12} だけであつて、L_{03} はこれと可換ではあつても、L_{03} に関する不変性は、全系の重心が等速度運動を行うことを示すだけで、系のclassification には役に立たない。次に連続でない群に就いては、T，C，P夫々が基礎方程式を不変にしている。したがつてParity 非保存の相互作用を基礎方程式から導き出す可能性が問題になる。しかし変換C，PがPauli-変換、Toushek変換と可換でないことから、基礎方程式を不変にしない、第二種のC′，P′ が作られた。C′，P′は lepton に対しては施せないが、これは二成分neutrino がP，Cを別々に許さないのと同じで、lepton を質量0で近似している限りにおいては問題にならない。問題はこのようにして基礎方程式を厳密に不変にするPauli-Gürsey 変換がどのようにして破られて、decay interaction が現われるかということである。

一方五次元理論では、自由場の方程式を不変にする変換として、Heisenberg の場合と全く同様に、Pauli 及びTouschek 変換があり、鏡影その他のdiscreteな変換としては、始めからP′，C′と同じものが与えられ、自由場の式はP′，C′の各々に関しては不変でない。鏡影としてP′が与えられるという事情は、自由場の式が8成分のspinor によつて満され、Heisenberg の Σ 空間のformalism に対応するものが出発点になつているからである。五次元であつて8成分が現われる理由は、空間がflat でなく、flat な六次元空間と同等なものだからである。その他Lorentz 群が拡張されて

いる結果、scale transformation に対応するものも自然に含まれている。これはdilatation と呼ばれているものであるが、長さを測る単位として何をとつてもよいということを表わしていると解釈される。したがつて五次元理論のもつfull symmetryを要求する限り、長さの次元をもつ常数が入つて来る余地は全くなく、dilatation を放棄することによつて始めてこれが可能になる。universal lengthなるものが若しありとせば、それがどのようにして現われてくるかをみるためのひとつの枠が、この五次元理論によつて与えられているように思える。何故なら、先ずこのような長さの単位がない場合に対する形式が作られているのであるから、いろいろな仕方でこの形式を破つてみればいいからである。尚、dilatation を取除いた部分群の最大のものが丁度inhomogeneous Lorentz group になつている。更にPauli matrix と同じ関係を満す一組の演算子がありこれらは自由場の方程式を不変にする。したがつてこれらは岡林氏の対称性の話の中にあるζ_1と同様にhyperonic charge, chiralityを与える演算子と解釈したり、又lepton をcharacterizeする際に用いることができる。このように、五次元理論では粒子を特徴づけるに必要な量子数が提供されるので、scale transformation を使つたりして、strangenessを与えることに気を使う必要はない。

(3) propagator. Heisenberg 理論ではpropagator は彼らの(24),(25)或いは(26)で与えられているが、これらは単にAnsatzであるとしか云えない。肝心のdipol ghostをもつてきて光円錐上のδ及びδ'の特異性をなくす操作を保証するdensity functionの平均値及びモーメントが0という式に、古典的な非線型方程式の解からの類推にすぎない。又近似計算を行う際に、上述の性質を持たないdensity function(即ちひとつのδ－函数)を使いながらdipol ghostはそのままにしておくという方法をとつているが、これがどの程度の近似になつているのかは甚だ見難いことである。五次元理論ではどうかというに、これは線型理論であるので通常のcanonical commutation relation を仮定して量子化を行い、straight forward にpropagator を作ると、やはりLehman流のものが得られ、あとに示すようにdensity fu.の平均値は(almost every-

where) 0になつている。五次元理論での propagator は $<\psi_\alpha(x,r)\bar{\psi}_\beta(x',r')>_0$ を計算することになるが、これが $\Delta_F(x-x',m^2)$ の weighted mean の linear combination となり、weight は r, r' の函数である。density fu. の平均値が0となるのは $r \neq r'$ の場合である。固有値問題にしても散乱の問題にしても r 及び r' についての積分が入つてくるから、この積分範囲の中で $r=r'$ の部分は measure 0 であるので全体の結果には影響を与えない。propagator の中の $1/q^2+m^2$ を $(1/q^2+m^2)-(1/q^2)$ で置きかえるということは $\int\rho(m^2)dm^2=0$ のとき、途中の計算で q－積分を収斂させる為の技巧としてのみ許されるのではないだろうか。尚、density fu. の $m^2\to\infty$ での振舞いは、Heisenberg の予想通り振動しており、積分をする場合には sbel の意味での極限をとらなければならない。

(4) 最後に二つの細い点について。Heisenberg の理論での ℓ は、始めには結合常数のようにして導入されているが、時には変数として（scale transformation や propagator を考えるとき）又時には matrix operator として（lepton 系を含めての荷電共軛を redefine する時）取扱うように要求される。ℓ を変数として考えるのが本来の立場であると云つているように思われるが、それが座標とどう関係しているものなのであるかが明瞭にされていない。五次元理論では変数 r が ℓ に対応するものとして考えられ、この変数と座標との関係、変換性の問題等は始めから明確にされてある。

核子の質量を決める際に Heisenberg は propagator に assign した質量 κ と同一質量 κ を neucleon state が持つとして、これに対する超越方程式を解いて κ を定めている。propagator 内の density function を唯一つの δ－函数で置換えることの是非については(3)で触れたが、核子の持つ質量をこれと等しいと置くべき理由は何もない。五次元理論でこれに類することをする場合には、propagator 内の density function を δ－函数で近似するという操作は必要でない。これは density function が explicit に与えられているからである。

次の節で五次元理論を述べ、上に記したことを幾分具体的に示したいが、計算のすべてがすんだのではないので、或る部分はプログラムをあげるだけ

に止めざるを得ないことをお断りしておく。

五次元理論の概要

提唱する五次元理論については既に三つの論文でその基礎が述べられているので、これらを随時引用することにする。これらをⅠ，Ⅱ，Ⅲ で表わすことにする。

Ⅰ Nuclear Physics, 6 (1958) 489

Ⅱ Nuclear Physics, 17 (1960) 529

Ⅲ Sci. Reports of Saitama Univ. A. 3 (1960) 155

Minkowski 空間と Lorentz 群がどのようにして拡張されて、五次元空間が作られたかはⅠに詳しく述べてある。五次元空間の座標を x^i ($i=1,2,3,0$) 及び r とする。次式で定義される整次座標 X^μ ($\mu=1,2,3,0,5,6$)：

$$\frac{X^i}{X^6}=\frac{x^i}{\ell_0}\ , \quad \frac{X^5}{X^6}=\frac{1/2\,(x_i x^i+r^2)}{\ell_0^2}\ , \tag{1}$$

を導入すると、五次元空間の中では次の二次形式：

$$G_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \equiv X^{1^2}+X^{2^2}+X^{3^2}-X^{0^2}-2X^5X^6 \tag{2}$$

を不変にする一次変換からなる群が基礎群としての役割を演ずる。即ち Lorentz 群は六次元の回転群に拡張される。この群の group algebra は三つの不変量 Q，R，W を持つ。無限小回転演算子 $M_{\mu\nu}$ として

$\frac{1}{i}\left(X_\mu\frac{\partial}{\partial X^\nu}-X_\nu\frac{\partial}{\partial X^\mu}\right)+\frac{1}{4i}(\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu)$ （但し $\beta_\mu\beta_\nu+\beta_\nu\beta_\mu=2G_{\mu\nu}$）をとると $Q(M_{\mu\nu})\psi=Q'\psi$ 等の固有値問題方程式が得られる。$M_{\mu\nu}$ として上の形をとるときには $R(M_{\mu\nu})\psi=R'\psi$ を考えれば足りる。何故なら Q'，W' は R' の函数として求まるからである。従つて $R(M_{\mu\nu})\psi=R'\psi$ を field equation としてとるのが本当である。これは inhomogeneous Lorentz group が基礎群であるとき、この群の不変量 $P=p_i p^i$ から Klein Gordon の式が作られたのと同じである。尚上述の場合は、spin 1/2 の粒子に対応する field eq. が作られるのであるが、これは六次元的角運動量を四次元空間の vector と scalar に分解することによつて示される（六次元テンソルと四次元テンソルとの関係はⅡの Appendix に詳しい)。変分原理を採用す

るならば、Lagrangian density として

$$L=\frac{4\sqrt{2}}{9}\psi^{\dagger}(R_{op}-R)\psi \qquad (3)$$

(cf. III(2.14))をとればよい。ここに数係数はエネルギーの式が簡単な形 (cf. III(4.31))になるように決めてある。I，II，III には自由場の方程式がこのような代数的方法によつて導き出されているが、群の概念を使わずに幾何学的方法によつても求めることができる。われわれの五次元空間の metrik は

$$dr^2=\frac{1}{r^2}(dx^i dx_i+dr^2) \qquad (4)$$

で与えられる。(cf. I. §3) これから Reamann Cristofel symbol を作り covariant derivative を define し $(\nabla_\alpha\nabla^\alpha+m^2)\psi=0$ を作ると ($\alpha=1,2,3,0,5$, $x^5=r$) これは I(4.6) 即ち III(3.2) と全く同じになる。spinor に対しては、Weyl の Vierbeine に対応して Sechsbeine を空間の各点に作り、spin connection を define し $r^\alpha(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-\Gamma_\alpha)\psi+m\psi=0$ を作るとこれは I(4.14) と同じものになる。詳細は appendix に述べるが、群論による方法と接続による方法とから全く同一の式が得られるのは興味のあることではないだろうか。

(3)式、即ち

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{+}\beta_7(i\beta_\mu\beta_\nu\overset{\circ}{M}{}^{\mu\nu}-5+\frac{8}{9}R\beta_7)\psi, \qquad (5)$$

(ψ^+, β_7, $\overset{\circ}{M}{}^{\mu\nu}$ の定義については I 或いは III 参照)を、次のように定義される ψ^c：

$$\psi^c=C\tilde{\psi}^{+},\quad C\tilde{\beta}_\mu C^{-1}=\beta_\mu,\quad CC^{*}=1,\quad \tilde{C}=C \qquad (6)$$

を使つて書くと

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{c+}\beta_7(i\beta_\mu\beta_\nu\overset{\circ}{M}{}^{\mu\nu}-5-\frac{8}{9}R\beta_7)\psi^c \qquad (7)$$

となる。nucleon system を考えるときには

$$\beta_7\psi_1=\psi_1 \quad (\beta_7\psi_1{}^c=-\psi_1{}^c) \qquad (8a)$$

を満たす ψ_1 によつて作られた(5)と

$$\beta_7\psi_2=-\psi_2 \quad (\beta_7\psi_2{}^c=\psi_2{}^c) \qquad (8b)$$

なる ψ_2 に対する、(5)でRを－Rにしたものの和を free Lagrangian L_0 とする。* L_0 は次の Touschek 変換

$$\psi_i \to e^{i\alpha\beta_7}\psi_i \qquad (\psi_i{}^c \to e^{i\alpha\beta_7}\psi_i) \tag{9}$$

及び

$$\begin{cases} \psi_1 \to a\psi_1 + b\psi_2{}^c \\ \psi_2{}^c \to \bar{a}\psi_2{}^c - \bar{b}\psi_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \psi_2 \to a\psi_2 - b\psi_2{}^c \\ \psi_1{}^c \to \bar{a}\psi_1{}^c + \bar{b}\psi_2 \end{cases} \tag{10}$$
$$(|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

の下で不変である。次の対応

$$\psi_p \sim \psi_1,\ \psi_n \sim \psi_2{}^c,\ \psi_{\bar{p}} \sim \psi_2,\ \psi_{\bar{n}} \sim \psi_1{}^c \tag{11}$$

をつけると変換(10)は isospace での廻転と見なすことができる。又 β_7 の固有値は baryon number と解釈できる。(5)は ψ と $\beta_7\psi$ としても不変であるばかりでなく、$i(\beta_\mu X^\mu)\psi$ 或いは $\beta_7(\beta_\mu X^\mu)\psi$ としても不変であるが、これらの operator は β_7 と反可換であるので、重粒子の性質を特徴づけるのには使えない。しかし lepton を取扱うときには、例えば $\beta_7(\beta X)$ の固有状態では β_7 の平均値は0であるので、有用な役割を演ずるであろう。

さしあたり重粒子のみを取扱うことにし、坂田モデルを採用する。従つて n, p, Λ を特徴づけることと、相互作用が strangeness rule に従うように作られればよいわけである。

Λ 粒子に対しては、$\beta_7\psi=\psi$ を満し、R＝0に属する ψ_Λ を対応させる。即ち nucleon の場合の ψ_1 と $\psi_2{}^c$ を ψ_Λ に、$\psi_1{}^c$ と ψ_2 を $\psi_\Lambda{}^c$ に degenerate させるわけである。そのときには(10)は

$$\psi_\Lambda \to (a+b)\psi_\Lambda = (\bar{a}-\bar{b})\psi_\Lambda$$
$$\psi_\Lambda{}^c \to (a-b)\psi_\Lambda{}^c = (\bar{a}+\bar{b})\psi_\Lambda{}^c$$

となり、$|a|^2+|b|^2=1$ を使うと

$$\psi_\Lambda \to e^{i\alpha}\psi_\Lambda$$

---

* 6次元の廻転群の既約表現では，R≠0のときにRの符号の異つたもの（Q，Wは同じ）が必ず対になつて現われ。

$$\psi_A{}^c \to e^{-i\alpha}\psi_A{}^c$$

即ち、$\psi \to e^{i\alpha\beta_7}\psi$ になつてしまう。従つて Touschek 変換の他には何等の rotation も変換の中にはなく、Pauli-Gürsey 変換を isospace での rotation とみなす立場と一致する。尚 R の値は ψ の r-dependent part の振舞いを決めるが（cf. III (4.6)）その具体的な形は相互作用を考える際に重要になつて来る。inhomogeneous Lorentz group が基礎群であるときには、既約表現は質量と spin で定められたが、今の場合は spin の他に R を必要とするのである。三つの量を与えて始めて定まる既約表示に対応する field equation もある筈であるが、それがどんなものであるかは未だ分つていない。

自由場と同じ不変性を interaction term にも要求し、これが Fermi interaction であるとすると、その形は次のものでなければならない。

$$\psi_1^+ O\psi_1 \cdot \psi_1^+ O\psi_1 + \psi_1^+ O\psi_1 \cdot \psi_2{}^{c+} O\psi_2{}^c + \psi_1^+ O\psi_2{}^c \cdot \psi_2{}^{c+} O\psi_1 + \psi_2{}^{c+} O\psi_1 \cdot \psi_2{}^c O\psi_1 . \tag{12}$$

ここに O は β_7 と交換可能な matrix であり、$1, \beta_\mu\beta_\nu$, $(\beta_\mu X^\mu)\beta_\nu$ の linear combination である。これを定めるために Pauli-Fierz identity を六次元に拡張したものを用いる。これは

$$\beta^A_{\mu\nu}\beta^A_{\rho\sigma} = \frac{1}{8}\sum_B \beta^B_{\rho\nu}(\beta^A\beta^B\beta^A)_{\mu\sigma} \tag{13}$$

から導かれる。但し summation は 64 個の β^A に対してとる。例えば（$(\beta X) = \beta_\mu X^\mu$）

$$((\beta X)\beta_\tau)_{\mu\nu}((\beta X)\beta^\tau)_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}((\beta X)\beta_\tau)_{\mu\sigma}((\beta X)\beta^\tau)_{\rho\nu}$$
$$-\frac{1}{2}(\beta_7(\beta X)\beta_\tau)_{\mu\sigma}(\beta_7(\beta X)\beta^\tau)_{\rho\nu} \tag{14}$$
$$+\frac{3}{4}(\beta X)_{\mu\sigma}(\beta X)_{\rho\nu} + \cdots$$

となり、第三項以下は β_7 の同一固有値に属する ψ ではさむと消えてしまう。従つて $\beta_7\psi = \psi$ を満す ψ に対しては

$$\psi_a^+(\beta X)\beta_\mu\psi_b \cdot \psi_c^+(\beta X)\beta^\mu\psi_d = \psi_a^+(\beta X)\beta_\mu\psi_d \cdot \psi_c^+(\beta X)\beta^\mu\psi_b$$

が成立つ。しかし scalar と tensor のどんな結合をとつてもこうならな

いので、(12)のOとして$(\beta X)\beta_\mu$をとることが要求される。以上をまとめると nucleon system に対する Lagrangian density として次のものをとることになる。

$$
\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1^+(i\beta_\mu\beta_\nu\mathring{M}^{\mu\nu}-5+\frac{8}{9}R)\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1^{c+}(i\beta_\mu\beta_\nu\mathring{M}^{\mu\nu}-5+\frac{8}{9}R)\psi_1^c \\
& -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2^{c+}(i\beta_\mu\beta_\nu\mathring{M}^{\mu\nu}-5+\frac{8}{9}R)\psi_2^c+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2^+(i\beta_\mu\beta_\nu\mathring{M}^{\mu\nu}-5+\frac{8}{9}R)\psi_2 \\
& +G(\psi_1^+\beta X\beta_\mu\psi_1)(\psi_1^+\beta X\beta^\mu\psi_1)+G(\psi_1^+\beta X\beta_\mu\psi_1)\cdot(\psi_2^{c+}\beta X\beta^\mu\psi_2^c) \\
& +G(\psi_1^+\beta X\beta_\mu\psi_2^c)(\psi_2^{c+}\beta X\beta^\mu\psi_1)+G(\psi_2^{c+}\beta X\beta_\mu\psi_1)(\psi_2^{c+}\beta X\beta^\mu\psi_1)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

これに対応する五次元空間での Lagrangian density は III,(2.17) の処方に従つて

$$\mathcal{L} = L'(x, r)r^{-5}$$

で与えられる。$L'(x,r)$は(15)の中の$X^\mu, \psi(X)$を(1)及びI(4.16)を用いて$x^i, r, \psi(x^i, r)$で書直したものである。(cf. III (4.1)) free な field equation を満たすψを plane wave で展開すると、

$$\psi^{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{md\,md^3p}{\sqrt{E_p}}K(mr)\left[a_r(p,m)u_r^{(\pm)}e^{ipx}+b_r^*(p,m)v_r^{(\pm)}e^{-ipx}\right] \tag{16}$$

となる。但し(±)は$\beta_7\psi=\pm\psi$に対応し、$K(mr)$はI, II, III で用いているβ_μの表示をとれば

$$K(mr) = \begin{pmatrix} \frac{r^3}{\sqrt{2\ell_0}}J_{n+1} & \\ & \sqrt{\ell_0}\,r^2J_n(mr) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$(n=\frac{4}{9}R\beta_7-\frac{1}{2})$である。u, v に対する完全性の条件等については III §4 を参照されたい。ψに canonical commutation relation を適用すれば(III, (4.28)) (16) の a, b は

$$
\begin{aligned}
\{a_r(p,m), a_s^*(p',m')\} &= \delta(m-m')\delta(p-p')\delta_{rs} \\
\{b_r(p,m), b_s^*(p',m')\} &= \delta(m-m')\delta(p-p')\delta_{rs}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

等を満たす operator であることになる。これを用いて propagator を作

ると

$$<T(\psi_\alpha^{(\pm)}(x,r)\psi_\beta^{(\pm)+}(x',r'))>_0=\pm\frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-x',r,r') \tag{19}$$

$$S_F(x-x',r,r')=\int mdm\begin{pmatrix}\frac{m}{V2}r^3r'^2J_{n+1}(mr)J_n(mr')-\frac{r^3r'^3}{2\ell_0}J_{n+1}(mr)J_{n+1}(mr')r\frac{\partial}{\partial x}\\ -\ell_0r^2r'^2J_n(mr)J_n(mr')r\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{m}{V2}r^2r'^3J_n(mr)J_{n+1}(mr')\end{pmatrix}\Delta_F(x-x';m) \tag{20}$$

が得られる。(Ⅲ(5.4),(5.5)。nucleon に対しては n=o 即ち R=±(9/8) ととることにする。(20) に現われている density function は

$$\int J_0(mr)J_0(mr')mdm=\int J_1(mr)J_1(mr')mdm=\frac{1}{r}\delta(r-r')$$
$$\int J_0(mr)J_1(mr')m^2dm=-\frac{1}{2r^2}\delta(r-r') \tag{21}$$

により、$r=r'$ を除いては $\int\rho(m^2)dm^2=o$ を満足する。又 non diagonal に現われる ρ に対しては $\int\rho(m^2)m^2dm^2$ も同じように消える。Λ 粒子に対しても同様なことは、J が三角函数で書かれるので見易い。

あとのために (20) の Green fu. としての性質を明確にしておく。(15) から得られる free な field equation は、β_μ として今迄通りの具体的な形を用いると次のようになる。(cf. Ⅲ (4.1))

$$D\psi(x,r)=o$$

$$D=\mp V2r^{-5}\begin{pmatrix}r\frac{\partial}{\partial r}-2 & \frac{r^2}{V_2\ell_0}r\frac{\partial}{\partial x}\\ V_2\ell_0r\frac{\partial}{\partial x} & -r\frac{\partial}{\partial r}+2\end{pmatrix}\quad(\mp \text{は } \beta_7\psi=\pm\psi \text{ による}) \tag{22}$$

この operator D を (20) の S_F-function に施すと

$$DS_F(x-x',r,r')=\pm2i\,\delta(x-x')\delta(r-r') \tag{23}$$

が得られる。

次に核子の self-field の問題を第一近似まで求めて質量の問題を考えよう。先ず (15) の中の相互作用の部分を (x^i,r) を使つて書くためには (Ⅰ(4.15)) と (Ⅱ(A10)を用いればよい。即ち 6-vector $\psi^+(\beta X)\beta_\mu\psi$ はひ

とつのS-vector と scalar とになる。これらは

$$a_i = \frac{\ell_0^2}{r^2}\psi^{+}\left(\beta_6 + \frac{r^2}{2\ell_0^2}\beta_5\right)\beta_i\,\psi'$$

$$a_5 = \frac{\ell_0}{2r}\psi^{+}(\beta_6\beta_5 - \beta_5\beta_6)\,\psi'$$

$$a = \psi'^{+}\psi'$$

であり、これに対応するcontravariant vector は(II(A8)により

$$a^i = \psi^{+}\left(\beta_6 + \frac{r^2}{2\ell_0^2}\beta_5\right)\beta^i\psi'$$

$$a^5 = \frac{r}{2\ell_0}\psi^{+}(\beta_6\beta_5 - \beta_5\beta_6)\,\psi'$$

である。II(A-11)により $\psi^{+}(\beta X)\beta_\mu\psi\cdot\psi^{+}(\beta X)\beta^\mu\psi$ を書くとこれは

$$\psi'^{+}\Gamma_\mu\psi'\cdot\psi'^{+}\Gamma^\mu\psi'$$

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} & \frac{r}{\sqrt{2}\ell_0}\gamma_i \\ \frac{\sqrt{2}\ell_0}{r}\gamma_i & \end{pmatrix} \quad \Gamma^5 = \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Gamma^6 = -\Gamma_6 = 1 \tag{24}$$

となる。

さてproton の self field を求めるために(15)からψ_1に対する field eq. を作ると

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\beta_\mu\beta_\nu\overset{\circ}{M}{}^{\mu\nu} - 5 + \frac{8}{9}R\right)\psi_1 + 2G(\beta X)\beta_\mu\psi_1(\psi_1^{+}\beta X\beta^\mu\psi_1) + 2G(\beta X)\beta_\mu\psi_1(\psi_2^{c}\beta X\beta^\mu\psi_2^{c}) = 0 \tag{25}$$

即ち

$$D\psi_1' + 2G\,r^{-5}\Gamma_\mu\psi_1'(\psi_1'^{+}\Gamma^\mu\psi_1' + \psi_2^{c'+}\Gamma^\mu\psi_2^{c}) = 0 \tag{25'}$$

が得られる。Dは(22)で一の符号をとつたものである。ここで(23)の性質を用いると次のように書ける。

$$\psi_1'(x,r) = iG\int r'^{-5}dr'dx'\,S_F(x-x', r, r')\Gamma_\mu\psi_1(x'r')(\psi_1'^{+}(x'r')\Gamma^\mu\psi_1'(x'r') + \psi_2^{c'+}(x'r')\Gamma^\mu\psi_2^{c'}(x'r')) \tag{26}$$

ここでHeisenberg と同じく new Tamm Dancoff の方法の第一近似まで

をとることにし、(25′)から得られる。

$$D_{\alpha\beta}\tau(\underset{\beta}{x}|)-2Gr^{-5}(\Gamma_{\mu})_{\alpha\rho}(\Gamma^{\mu})_{\tau\sigma}\left(\tau(\underset{\rho}{\overset{p}{x}}\underset{\sigma}{\overset{p}{x}}|\underset{\tau}{\overset{p}{x}})+\tau(\underset{\rho}{\overset{p}{x}}\underset{\sigma}{\overset{n}{x}}|\underset{\tau}{\overset{n}{x}})\right)=0 \qquad (27)$$

$$\left(\tau(\underset{\rho}{\overset{p}{x}}\underset{\sigma}{\overset{p}{x}}|\underset{\tau}{\overset{p}{x}})=\langle 0|\psi'_{1\rho}(x)\,\psi'_{1\sigma}(x)\,\psi'^{+}_{1\tau}(x)|p\rangle,\right.$$

$$\left.\tau(\underset{\rho}{\overset{p}{x}}\underset{\sigma}{\overset{n}{x}}|\underset{\tau}{\overset{n}{x}})=\langle 0|\psi'_{1\rho}(x)\,\psi'^{c}_{2\sigma}(x)\,\psi'^{c+}_{2\tau}(x)|p\rangle\right)$$

に(26)及びψ'^{c}_{2}に対する同じような式を使つてone point τ-function だけをのこして書くと次のようになる。

$$D\tau(x|)=\frac{i}{2}G^2r^{-5}\int r'^{-5}dr'dx'\{\Gamma_{\mu}(r)S_F(x-x',r,r')\Gamma_{\nu}(r')S_F(x'-x,rr')\Gamma^{\mu}(r)S_F(x-x',rr')\Gamma^{\nu}(r')\tau(r'|)$$

$$-2S_p(S_F(x'-x,r,r)\Gamma^{\mu}(r)S_F(x-x',rr')\Gamma^{\nu}(r'))\Gamma_{\mu}(r)S_F(x-x',r,r')\Gamma_{\nu}(r')\tau(x'|)\} \qquad (28)$$

これは次の形に書きかえられる。

$$D\tau(xr|)=r^{-5}G^2\int\frac{d^4k_1\,d^4k_2\,d^4k_3\,dm_1\,dm_2\,dm_3\,d^4x'\,dr'}{(k_1^2+m_1^2)(k_2^2+m_2^2)(k_3^2+m_3^2)}F(k,m,r,r')\,e^{i(k_1-k_2+k_3)(x-x')}\,\tau(x'r'|) \qquad (29)$$

ここにFはBessel 函数の積のlinear combination を要素とするmatrix である。proton state がmomentum p とmass m を持つとして、(16)、(17)にかんがみて次のように置き(29)に代入する。

$$\tau(xr|)=e^{ipx}\begin{pmatrix}\dfrac{r^3}{\sqrt{2}\,\ell_0}J_1(mr)u^{(2)}\\ r^2J_0(mr)u^{(1)}\end{pmatrix} \qquad (30)$$

そうすると次の式が得られる。

$$\begin{pmatrix}\dfrac{r^4}{\sqrt{2}\,\ell_0}(i(rp)u^{(2)}+mu^{(1)})J_0(mr)\\ r^3(i(rp)u^{(1)}+mu^{(2)})J_1(mr)\end{pmatrix}=G^2\int d^4k_i\,dm_i\,dr'\,F'(k_i,m_i,m,r,r')\,\delta(k_1-k_2+k_3-p)\begin{pmatrix}u^{(2)}\\ u^{(1)}\end{pmatrix}$$

両辺に$\begin{pmatrix}M\sqrt{2}\,\ell_0\,r^{-3}J_0(Mr) & 0\\ 0 & r^{-2}MJ_1(Mr)\end{pmatrix}$をかけ$r$とMで積分すると

$$\begin{pmatrix}i(rp)u^{(2)}+mu^{(1)}\\ i(rp)u^{(1)}+mu^{(2)}\end{pmatrix}=\int dM\,dm_i\,d^4k_i\,dr\,dr'\,G^2F''(k_i,m_i,m,M,r,r')\,\delta(k_1-k_2+k_3-p)\begin{matrix}u^{(2)}\\ u^{(1)}\end{matrix} \qquad (31)$$

となり、これからmの値が求まるわけである。

ここで二つのことを注意する必要がある。そのひとつは質量がどのように定まるかということである。長さのdimension をもつ量は今迄の計算にはどこにも入つていない。(1)で導入されたℓ_0 は途中の計算でdimension の関係を簡単にするために用いただけのもので(例えば(22)とか(30)を見よ)(31)の式からはすつかり姿を消してしまつている。その上coupling constant の形で入つているGも、この理論ではdimension-less である。したがつて長さのdimension をもつものをどこかに入れない限り、質量の価が定まる筈はない。そこで前節で述べたことを想い出して、dimension に関するinvariance を破つて長さのdimension をもつものを導入しなければならない。このためにはIIで述べてあるようにX^6を asymmetrical な仕方で入れればよい。或いはこれはrをasymmetrical に入れることと同じである。ひとつの方法はGをrに関してstep functionとすることである。例えば

$$\begin{array}{ll} G(r)=0 & r<r_0 \\ G(r)=1 & r>r_0 \end{array} \qquad (32)$$

とおけば質量はr_0によつて表わされる。この他に$G=e^{-r/r_0}$ とおくことも考えられる。

次に(31)の右辺の積分計算の際、例えばkについての積分を先に行おうとすると発散してしまうけれど、S_Fに現われたdensity fu. の前節に述べた性質により $1/k^2+m^2$ を$(1/k^2+m^2)-(1/k^2)$と置換えることが許される。即ち今の場合のこの置換えは単に計算の便宜上行われるだけであつて最後の結果は、この置換えをしない場合と同じであり、Heisenberg の場合のようなAnsatz ではない。

詳しい計算の結果や、pion との相互作用のことなどは出来上り次第報告するつもりであるが、ここに述べたことからだけでもHeisenberg のしたことと同じようなことが五次元理論ではもつと見とおしよく出来ると考えていいのではなかろうか。

Appendix

基礎方程式の幾何学的な導き出し。

(4)を

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

と書く。但し $x^5 = r$ とする。したがつて $g_{\alpha\beta}$ は

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = g_{55} = 1/x^{5^2},\ g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{00} = g^{55} = x^{5^2} \qquad (A1)$$

（他の $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ は 0）で与えられる。これから Reamann Christoffel symbol を求めると、0 でないものは

$$\Gamma^5_{KK} = \frac{1}{x^5},\ \Gamma^5_{00} = \Gamma^5_{55} = -\frac{1}{x^5},\ \Gamma^K_{K5} = \Gamma^0_{05} = -\frac{1}{x^5} \qquad (A2)$$

である。以下 $\alpha, \beta, \cdots$ は 1, 2, 3, 0, 5, $i, j, \cdots$ は 1, 2, 3, 0, K は 1, 2, 3 をとるものとする。5-vector に対する covariant derivation は

$$\nabla_\alpha A_\beta = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma \qquad (A3)$$

で定義される。これから $\nabla_\alpha \nabla^\alpha A$ を作ると次のようになる。

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha A = \nabla_\alpha \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} = \nabla_\alpha \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial x^\beta} \right) = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \frac{\partial A}{\partial x^\beta} \left(\equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha A_\beta \right)$$

$$= g^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\alpha} - \Gamma^5_{\alpha\alpha} A_5 \right)$$

$$= x^{5^2} \left(\frac{\partial A_K}{\partial x^K} - \frac{3}{x^5} A_5 \right) - x^{5^2} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^0} + \frac{1}{x^5} A_5 \right) + x^{5^2} \left(\frac{\partial A_5}{\partial x^5} + \frac{1}{x^5} A_5 \right)$$

$$= x^{5^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{K^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{5^2}} - \frac{3}{x^5} \frac{\partial}{\partial x^5} \right) A \qquad (A4)$$

$\nabla_\alpha \nabla^\alpha A = QA$ は (I (4.6)) の下の式で n = o としたもの、即ち (Ⅲ (3, 2) に等しい。

次に spinor field に対する field equation を作る。Weyl の vier beine の formalism に倣つて空間の各点に Secks beine を attach する。これを e_μ (μ = 1, 2, 3, 0, 5, 6) とする。Bein の成分を e^p_μ で表わし

$$e^p_\mu e_{p\nu} = G_{\mu\nu} \qquad (A5)$$

の直交条件を満たすとする。又次の条件を満たすようにきめる。

$$e_{p\mu} e_q^{\ \mu} = g_{pq} \qquad (A6)$$

ここで p, q … は 1, 2, 3, 0, 5, 6 をとり $g_{\alpha\beta}$ は(A.1)で与えてあり、$g_{\alpha 6}=0$, $g_{66}=-1$ ときめる。$G_{\mu\nu}$ は本文の(2)で与えられている。μ-index の上げ下げは $G_{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu}$ により p-index のそれは g_{pq}, g^{pq} によつてなされる。

$$\{\beta_\nu, \beta_\nu\}=2G_{\mu\nu} \tag{A7}$$

を満たす constant matrices β_μ で $S_{\mu\nu}=\frac{1}{4i}(\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu)$ を作るとこれは

$$\{S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}\}=\frac{1}{2}(G_{\mu\rho}G_{\nu\sigma}-G_{\mu\sigma}G_{\nu\rho}-i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau\omega}\beta^\tau\beta^\omega\beta_7) \tag{A8}$$

を満たす。 $(\beta_7=\frac{i}{6!}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}\beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma\beta_\tau)$。

今 $\gamma_\alpha=2ie^\mu_\alpha e^\nu_6 S_{\mu\nu}$ を作ると、これは

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\}=2g_{\alpha\beta} \tag{A9}$$

を満たす。上に述べた関係を満足する e^μ_p は丁度IIの Appendix にある γ^μ_α と X^μ との組合せによつて与えられる。即ち

$$e^\mu_p=\begin{array}{cl} p\to & \\ \begin{pmatrix} x_5 & & & & -x^1x_5^2 & x^1x_5 \\ & x_5 & & & -x^2x_5^2 & x^2x_5 \\ & & x_5 & & -x^3x_5^2 & x^3x_5 \\ & & & x_5 & -x^0x_5^2 & x^0x_5 \\ x_1x^5 & x_2x^5 & x_3x^5 & x_0x^5 & -\frac{1}{2}(x_ix^i-1) & \frac{1}{2}(x_ix^i)x^5 \\ & & & & -x_5^2 & x_5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\mu\\ \downarrow\end{array} \end{array} \tag{A10}$$

$$e^p_\mu=\begin{array}{cl} \mu\to & \\ \begin{pmatrix} x^5 & & & & & -x^1x^5 \\ & x^5 & & & & -x^2x^5 \\ & & x^5 & & & -x^3x^5 \\ & & & x^5 & & -x^0x^5 \\ -x_1x^{5^2} & -x_2x^{5^2} & -x_3x^{5^2} & -x_0x^{5^2} & 1 & \frac{1}{2}(x_ix^i-1)x^{5^2} \\ -x_1x^5 & -x_2x^5 & -x_3x^5 & -x_0x^5 & x_5 & \frac{1}{2}(x_ix^i+1)x^5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}p\\ \downarrow\end{array} \end{array} \tag{A11}$$

これから γ_α を作ると

$$\gamma_i=-\frac{1}{x^{5^2}}\{(\beta_jx^j)\beta_i+\frac{1}{2}x_\alpha x^\alpha x^{5^2}\beta_5\beta_i+\beta_6\beta_i+(\beta_jx^j)x^{5^2}\beta_5x_i+\beta_6\beta_5x^{5^2}x_i\}$$

$$\gamma_5=\frac{1}{x^5}\{\beta_5(\beta_i x^i)-\beta_6\beta_5-1\} \tag{A12}$$

$\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial x^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\gamma_\delta+[\Gamma_\beta,\gamma_\alpha]$ を満たすspin connection Γ_α を求めると $\Gamma_\alpha=-\frac{1}{2}\gamma_\alpha$ となる。Dirac eq. として

$$\gamma^\alpha(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-\Gamma_\alpha)\psi+m\psi=0 \tag{A13}$$

をとるとこれは

$$(\gamma^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\frac{5}{2}+m)\psi=0$$

である。又(A9)を満たす γ_α は $2ie_\alpha^\mu e_6^\nu S_{\mu\nu}$ でなくこれに β_7 をかけたものでもよい。そうすると

$$(\gamma^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\frac{5}{2}+m\beta_7)\psi=0$$

となる。(A12)を入れて書き直すとこの式は丁度(I(4.14)と等しいことが分る。これは x^α を X^μ を用いて書くと

$$\gamma^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=-(\beta X)(\beta\frac{\partial}{\partial X})+(X\frac{\partial}{\partial X})$$

となるからである。

(Sci.Rep. of Saitama Univ. は各大学の図書館宛に送られていると思いますが、別刷御希望の方は御一報下さい)

5　二核子スピン軌道結合力とn−α散乱

高　村　泰　雄，　玉　垣　良　三(北大理)

あらまし

高エネルギーp−p散乱の説明のため導入されている強いスピン軌道結合*ポテンシャルの性質を低エネルギー領域で検討するため、n−α散乱に現わ