多 重 生 成 の 統 計

小 林 公 三（埼玉大、理工）

1. 強い相互作用をもつ粒子の高エネルギー散乱では、エネルギー・運動量保存則の満される範囲で粒子生成を伴う。従つて高エネルギー入射状態は、終状態の弾性状態、1粒子生成状態、2粒子生成状態…… と展開される。そこで我々は、入射状態は可能な終状態の統計集団と等しいということができる。

この集団の各要素は、そのエネルギーは入射エネルギーに等しく一定であるが、構成粒子数は2コ、3コ…… と不定であるから、古典統計に於ける canonical ensembleの要素でも grand canonical ensemble の部分系でもない。これは場の理論ではじめて現われる新しい統計集団であることを注意したい。その様な統計集団として、多重生成の統計の性質を調べてみる。

2. 簡単のため粒子はすべて同じ一種のものとする。全4元運動量Pの2粒子入射状態は終状態に展開されて

$$|P:in>=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dk_1\cdots\cdots dk_n<\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_n:out\,|P:in>\cdot\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_n!\ out> \tag{1}$$

記号は

$$dk=\frac{d3k}{2\omega_k},\qquad \omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}.$$

$$|\mathbf{k}_1\cdots\cdots\mathbf{k}_n:out>=a_{\mathbf{k}_1}^{out+}\cdots\cdots a_{\mathbf{k}_n}^{out+}|0:out>$$

$$[a_{\mathbf{k}}^{out},a_{\mathbf{k}'}^{out+}]=2\omega_k\delta^3(k-k')$$

さて、我々は粒子間に統計的独立を仮定する。この時、

$$<k_1\cdots\cdots k_n:out\,|P:in>=\delta^4(P-k_1-\cdots-k_n)\,\varphi(k_1)\cdots\varphi(k_n) \tag{2}$$

$\varphi(k)$は、1粒子波動関数で、その関数形は生成過程のダイナミックスによつて

決まる。又あらわに書かなかつたが、散乱を特徴づける他の量（例えば、全エネルギー、相互作用体積など）によつてもよい。(2)が　与えられれば粒子の統計は直ちに得られる；

n粒子状態の起る確率P_n, $P_n = P_n(P^2) = \dfrac{F_n(P^2)}{F(P^2)\, n!}$ (3)

運動量分布$N(\mathbf{k})$ ：$\overline{N}(\mathbf{k}) = \overline{N}(\mathbf{k}\,;P^2) = \dfrac{|\varphi(\mathbf{k})|^2 F((P-k)^2)}{F(P^2)}$, (4)

平均個数$\overline{N}$ ：$\overline{N} = \overline{N}(P^2) = \int dk\, \overline{N}(\mathbf{k}\,;P^2)$ (5)

ただし

$$F_n(P^2) = \int dk_1 \cdots dk_n\, \delta^4(P - k_1 \cdots - k_n)\, |\varphi(k_1)|^2 \cdots\cdots |\varphi(k_n)|^2 \tag{6}$$

$$F(P^2) = \sum_{n=2} \frac{F_n(P^2)}{n!} \tag{7}$$

$$P^2 = E^2 - \mathbf{P}^2$$

従つて、統計の性質はφを与えれば上式からわかるわけである。　次にFermi Modelによつて具体的にその性質を調べてみよう。

3. Fermi Model.　Fermi Modelではφは$\mathbf{k}$に依らない量とされている。しかし衝突を特徴づける他の量（全エネルギー、衝突体積、coupling constant, Lorentz factorなど）に依つてもよいことを注意しておく。

$$|\varphi(k)|^2 = \alpha \tag{8}$$

又計算上$m = 0$とする。この時、

$$F_n(P^2) = \frac{\alpha^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} (P^2)^{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!} \tag{9}$$

$$F(P^2) = \frac{\pi\alpha^2}{2} \sum_{n=2} \frac{1}{n!\,(n-1)!\,(n-2)!} \left(\frac{\pi\alpha P^2}{2}\right)^{n-2} \tag{10}$$

$$\sim \frac{\alpha^2}{4\sqrt{3}} \left(\frac{\pi\alpha \mathbf{P}^2}{2}\right)^{-4/3} e^{3\left(\frac{\pi\alpha \mathbf{P}^2}{2}\right)^{1/3}} \tag{11}$$

～は生成粒子数が十分大きい時の漸近形である。(10)，(11) から

① 平均個数

$$\overline{N}(P^2) \sim \left(\frac{\pi\alpha P^2}{2}\right)^{1/3} \qquad (12)$$

実験によると、

$$\overline{N}_{exp.} \propto E^{*\frac{1}{2}} \text{ or } \log E^* \quad (E^*\text{: 重心系全エネルギー}) \qquad (13)$$

その為には α は

$$\alpha \propto E^{*-\frac{1}{2}} \qquad \text{or} \qquad \frac{\log^3 E^*}{E^{*2}} \qquad (14)$$

② n粒子生成の確率

$$P_n(P^2) \sim 2\sqrt{3}\,\pi\overline{N}\left(\frac{\overline{N}^n e^{-\overline{N}}}{n!}\right)\left(\frac{\overline{N}^{n-1} e^{-\overline{N}}}{(n-1)!}\right)\left(\frac{\overline{N}^{n-2} e^{-\overline{N}}}{(n-2)!}\right) \qquad (15a)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{e^{-3\overline{N}}}{\overline{N}^2}\, e^{3(\log e\overline{N} - \log n)n + \frac{3}{2}\log n} \qquad (15b)$$

(15) から個数分布に関して次の様なことがわかる。：

(i) P_n は Poisson 分布に似た特徴をもつが相違は式 (15a) の如くである。ちなみに、平均値からのずれ $\Delta\overline{N}$ を求めてみると

$$\Delta\overline{N} \sim \sqrt{\overline{N}} \qquad (16)$$

と得られる。これは Poisson 分布のそれと同じ。

(ii) n を十分大きいとすると、(15b) の exponent の

$$\mu(n) \equiv 3(\log e\overline{N} - \log n) \qquad (17)$$

は、いわば化学ポテンシアルに当る量で、n-dependence をもつ。これは、我々の ensemble と grand canonical ensemble との相違を示している。又

$$n_c = e\overline{N} \tag{18}$$

より多い粒子数状態は殆んど起らない；

$$P_n \simeq 0 \qquad (n > n_c) \tag{19}$$

であることがわかる。

(iii) nが十分大きいとき、平均の個数$\overline{N}$をもつ状態はあらゆる状態の中で最大の確率をもつ。このことから、高エネルギー弾性終状態を平均個数の状態で近似することの妥当性が理解できる。（分布は正確にPoissonではないから、このことは予め明らかなことではない。

③　運動量分布

(i)
$$\overline{N}(\mathbf{k}\,;P^2) \sim \frac{\alpha}{(1-\frac{2Pk}{P^2})^{4/3}}\, e^{3\overline{N}[(1-\frac{2Pk}{P^2})^{1/3}-1]} \tag{20}$$

重心系、$\omega \ll E^*$ 且つ平均エネルギー

$$\overline{\omega} \equiv \frac{E^*}{\overline{N}} \tag{21}$$

を用いると

$$\overline{N}\,(\omega;E^*) \sim \alpha\, e^{-\frac{2}{\overline{\omega}}\omega} \tag{22}$$

つまり、エネルギー分布に関しgrand canonical ensembleの部分系のそれと同じである。

(ii) 更にn粒子状態の中での運動量分布は平均値

$$p \equiv \frac{P}{n} \tag{23}$$

を用いて

$$\overline{N}_n(\mathbf{k}:P^2) \sim nP_n(P^2)\,[\frac{2}{\pi p^2}\; e^{-\frac{2pk}{p^2}}] \tag{24}$$

〔〕内の量が essential なもので、これは covariant な Boltzman 分布に他ならない。静止系に粒子と、確かに従来の Boltzman 分布

$$\frac{2}{\pi<\varepsilon>}\ e^{-\frac{2}{<\varepsilon>}\omega}\qquad (<\varepsilon>\equiv p_0) \tag{25}$$

になつている。今考えている系は、全エネルギー一定（E or E*），全粒子数一定(n)であるから、(24) (25) の結果は reasonable なものであるといわなければならない。

4．注　　意

①発表後2,3の方と討論で、この仕事が十分説明できなかつたこと、誤解うけていることなどがわかつた。それは急いだ私の説明が十分でなかつたためで、上の報告でははつきり述べたつもりであるがここに2つ程くり返しておく。

(i)　3．の Fermi Model は決してダイナミツクスが入つていないのではなく、それらは近似(8)と α の中にとり入れられているのである。3．の結果はすべて、α の詳細に依らない。

(ii)　3．の②の(i)で「個数分布が Poisson 分布に似ている」ということは、決して Van Hove Model*) に於ける Poisson 分布を support しているのではないということ。Van Hove Model でいう Poisson 分布は、私の3．の③の(ii)で $n=\overline{N}$ ととつた場合の運動量分布に当り、それは私の場合 Boltzman 分布であるべきなのである。

②　3．の結論はすべて、$|\varphi(k)|^2=\alpha$ (8) の下に導いたものである。いろいろな相互作用のダイナミツクスに応じて、いろいろな φ が与えられ、具体的に計算してみれば興味深い結果が得られるであろう。その一つとして、

$$|\varphi(k)|^2=\alpha\, e^{-\beta k}\qquad (\beta k=\beta_\mu k_\mu) \tag{26}$$

の場合は

$$F_n(P^2)=e^{-\beta P}\ \frac{\alpha^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}(P^2)^{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!}$$

となり、いろいろな結論は、Fermi Model の場合と全く同じになるのである。

これは特別な場合であろう。

*) Van Hove : N.C. 28 798 (1963).

Reggeization of Elementary Nucleon

斎藤　武（阪大理）

場の理論でelementary nucleon がRegge trajectoryに集る必要かつ十分条件を求める。スピンは簡単のため無視するが、話の本質に影響はない。さてnucleon (N) がelementary であるなら、π-N部分波振巾は必ず次のように書ける：

$$T_l(s) = \delta_{l0}\Gamma(s)S_F'(s)\Gamma(s) + f_l(s). \tag{1}$$

$\Gamma(s)$: proper vertex function

$S_F'(s)$: くりこまれたNのpropagator

次に

$$\Gamma(s)S_F'(s) \equiv K(s)\frac{1}{M^2 - s} \tag{2}$$

によつてform factor K(s)を導入すると(1)は

$$T_l(s) = \delta_{l0}\frac{\Gamma(s)K(s)}{M^2 - s} + f_l(s) \tag{3}$$

になる。もしもNがRegge pole なら上のクロネツカーsingularityは消えなければならない。そのための条件は $\Gamma(s) = 0$ か $K(s) = 0$。$\Gamma(s)$ か $K(s)$ にpoleがないとすると、この条件はπ-N coupling constant $g=0$ を意味し、われわれはこのような場合は考えない。$\Gamma(s)$ か $K(s)$ にpole があるとすると $g \neq 0$