

## 動力伝達軸系の CAE へのグラフ理論の適用\*

綿貫 啓一\*\*, 大滝 英征\*\*\*  
石川 義雄\*\*\*, 矢野 智昭\*\*\*\*Application to Linear Graph Theory for CAE  
of Power Transmission MechanismKeiichi WATANUKI, Hideyuki OTAKI,  
Yoshio ISHIKAWA, and Tomoaki YANO

At the present time, the machines with high accuracy and performance tend to be designed by CAE methods. But suitable and useful CAE methods are not established for all machine parts and elements. Thus, we must derive easy and useful methods for each machine part. This report deals with a new method using linear graph theory as one CAE method and analyzes the results of dynamic behaviour concerning power transmission mechanism. By this method, addition and deletion of machine elements are made flexibly, and performances of the system are analyzed rapidly. So this method is effective for extensive machine design.

**Key Words:** Linear Graph Theory, CAE, Power Transmission Mechanism, Simulation, Machine Design

## 1. はじめに

設計の上流段階においては、電動機、歯車、軸受等の機械要素より構成される機械装置全体の効率、振動特性が解析でき、しかも各要素の影響度合を的確に把握できることが必要である。とりわけ現在では、機械の高精度、高性能化、高信頼性に加え、多品種少量生産が要求されるようになり、機械の設計においては、極めて多い部品の中から適切なものを取捨選択し、配置を行い、しかも高効率で振動の極めて小さい最適な系を求めることが要求されている。しかし、それには多大な労力と時間を要する。

そこで、電気回路網の解析に由来から用いられてきたグラフ理論を機械系にも拡張し適用<sup>(1)</sup>すると、構成要素を付加したり配置を変えたりした系に対しても柔軟に対応できるであろうことをかんがみ、グラフ理論を利用しやすい形態に変換し、解析を行った。本報では、一例として電動機、歯車、軸受などを有した伝動

軸系について振動などの理論解析を行った。

このような伝動軸系を従来のごとく、ルンゲ・クッタ法で解析する場合には、構成要素が増すと解析は極めてやっかいとなり、しかも、要素の追加、削除があると各要素間の関係が異なるようになり構成方程式作成を柔軟にできなくなる。これに対して、グラフ理論を利用すると、木、補木等により各要素間のつながりが容易に求められ、要素の追加、削除にも柔軟に対処でき、系全体の特性を迅速に把握できる。

歯車減速機構を有する回転機械の設計に対しては、構成要素の特性に基づく振動問題を避けては通れないが、従来は、個々の要素の振動現象を解析し、それらを概観して系全体の特性を観察する方法が採られてきた。しかし、実際の設計現場における適用にあっては、任意の対象物に対して迅速に解析できる必要がある。このような場合には、本報で用いたグラフ理論による解析法を用いたほうが広範な設計に役立てることができる。本解析法によるシミュレーション結果を示すとともに、設計への適用の有用性について述べる。

本論文中で使用する主な記号は次のとおりである。

$T$ : トルク

$T_L$ : 強制トルク

$\theta$ : 角変位

\* 昭和61年11月23日 関西支部第246回講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月9日。

\*\* 学生員、埼玉大学大学院 (〒338 浦和市下大久保 255)。

\*\*\* 正員、埼玉大学工学部。

\*\*\*\* 正員、工業技術院機械技術研究所 (〒305 茨城県新治郡桜村並木 1-2)。

- $t$ : 時間
- $\tau$ : 周期
- $A$ : 振幅
- $G$ : 横弾性係数
- $K$ : 軸のねじり剛性
- $K_G$ : 歯車の歯面間のばね剛性
- $C$ : 軸の粘性減衰係数
- $C_G$ : 歯車の粘性減衰係数
- $b$ : 軸受の粘性減衰係数
- $r_i$ : 歯車  $i$  の基礎円半径
- $d$ : 軸径
- $l$ : 軸の長さ
- $Z$ : 歯数
- $J$ : 慣性モーメント
- $\epsilon$ : かみあい率
- $h$ : 計算の刻み幅
- $I$ : 単位行列
- $B$ : ループ行列
- $D$ : カット・セット行列
- $F$ : ターミナル方程式の係数行列
- $H$ : タブロー方程式の右辺ベクトル

2. グラフ理論による伝動軸系の設計

2.1 グラフ理論による伝動軸系への解析手法の概要

グラフ理論においては、図1のフローチャートに示したように、まず伝動軸系の解析モデルを作成し、電動機、軸、軸受、歯車などの構成方程式に分解する。それらの要素に対して、ターミナルグラフおよびターミナル方程式を作成する。ここで、ターミナルグラフは各構成要素間の接続状況を表すものであり、また、ターミナル方程式は各構成要素間についての入出力特性を表すものである。次いで、各構成要素に関するターミナルグラフを解析モデル上での接続状況に従ってシステムグラフを作成する。このシステムグラフの枝を木および補木に分け、それよりカット・セット方程式およびループ方程式を求める。ここで、カット・セット方程式およびループ方程式は各構成方程式間の変数を相互に結び付ける方程式である。これらのターミナル方程式、カット・セット方程式およびループ方程式より、系全体の構成方程式に相当するタブロー方程式を作成する。この方程式をクラウト法により数値解析する。

2.2 伝動軸系の解析モデルおよびターミナル方程式

(1) 解析モデル

図2は、一段の歯車減速機構を有する電動機-回転

機械系の解析モデルである。このような機構は、ロボットの主軸系に代表されるように、加速および減速を頻繁に行い、さらに位置決めが適切に行われるように要求される。その際、軸、軸受、歯車列などに起因する振動が問題となるが、どの要素がどの程度影響を及ぼすか、あるいは、配置を変えたり、要素を取り替えたりした場合、それがどのように変化するかを迅速に解析する必要があるが、従来の手法では柔軟に対応することができない。

(2) ターミナル方程式

各構成要素のターミナルグラフおよびターミナル方程式を求める。図3は、その結果を示したものである。ターミナル方程式は、各構成要素の運動方程式を利用し、差分法を用いて離散化して求めたものである。

ここで、各構成要素の運動方程式は次のようになる。

- (i) 電動機は、不等速運動を行うものとし、図4に示す正弦曲線に従って駆動されるものとする。
- (ii)

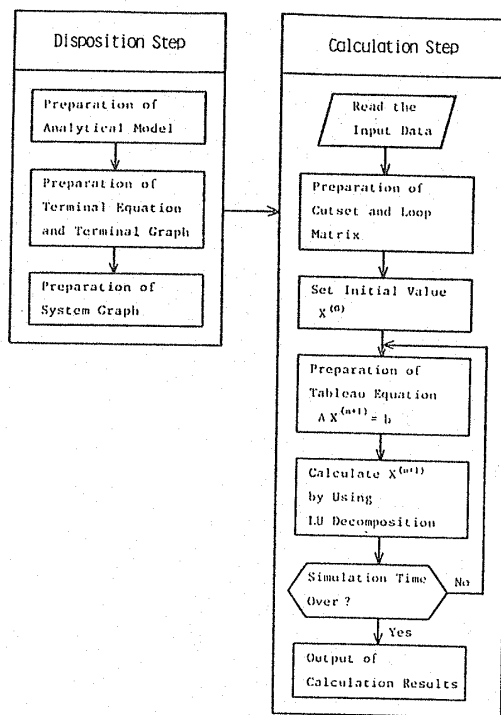


図1 解析手法のフローチャート

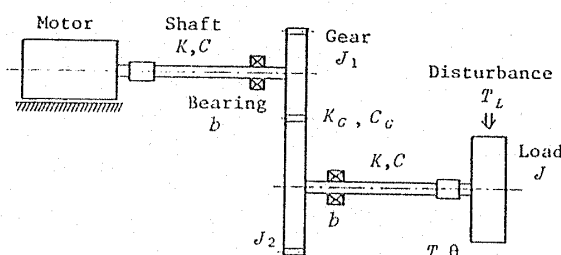


図2 解析モデル

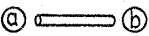
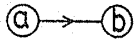

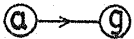
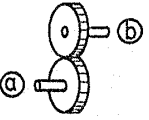
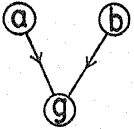
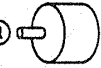
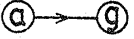
Element	Model	Terminal Equation	Terminal Graph
Shaft		$\begin{aligned} h T^{(n+1)} - (h K + 2 C) \theta^{(n+1)} \\ = -h T^{(n)} + (h K - 2 C) \theta^{(n)} \end{aligned}$	
Bearing		$\begin{aligned} h T^{(n+1)} - 2 b \theta^{(n+1)} \\ = -h T^{(n)} - 2 b \theta^{(n)} \end{aligned}$	
Gear		$\begin{aligned} -h^2 T_1^{(n+1)} + (2 J_1 + h^2 K_G r_1^2 + 2 h C_G r_1^2) \theta_1^{(n+1)} \\ - (h^2 K_G r_1 r_2 + 2 h C_G r_1 r_2) \theta_2^{(n+1)} \\ = h^2 T_1^{(n)} + (4 J_1 - h^2 K_G r_1^2 + 2 h C_G r_1^2) \theta_1^{(n)} \\ - 2 J_1 \theta_1^{(n-1)} + (h^2 K_G r_1 r_2 - 2 h C_G r_1 r_2) \theta_2^{(n)} \end{aligned}$	
Load		$\begin{aligned} h^2 T^{(n+1)} - 2 J \theta^{(n+1)} \\ = -h^2 T^{(n)} - 4 J \theta^{(n)} + 2 J \theta^{(n-1)} \end{aligned}$	

図3 各構成要素のターミナルグラフおよびターミナル方程式

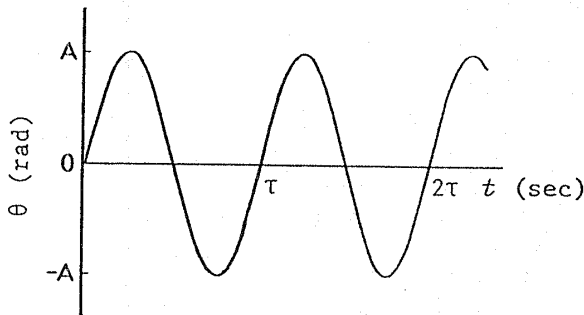


図4 電動機の出特性

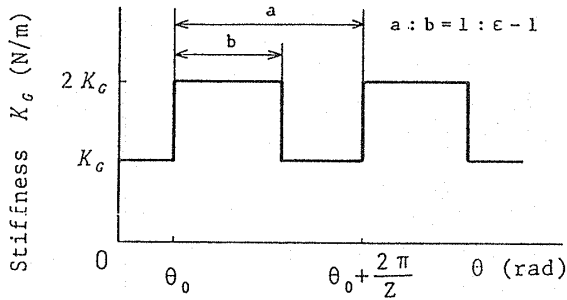


図5 歯面のばね剛性

軸は、ねじり振動を対象としたことから、ばねとダッシュポットで近似した。(iii)軸受は、粘性項のみを考慮することにした。(iv)歯車は、歯のたわみを石川の式<sup>(2)</sup>により求め、歯面のばね剛性は、かみあい状況の変動を考慮し、ここでは解析のため図5のように近似した。

つまり、

電動機については、

$$\theta = A \sin(2\pi/\tau)t \dots\dots\dots (1)$$

軸については、

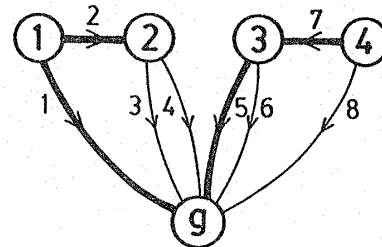


図6 システムグラフ

$$T = K\theta + C\dot{\theta} \dots\dots\dots (2)$$

軸受については、

$$T = b\dot{\theta} \dots\dots\dots (3)$$

歯車  $i$  については、

$$\begin{aligned} J_i \ddot{\theta}_i = T - K_G(r_i \theta_i - r_{i+1} \theta_{i+1}) r_i \\ - C_G(r_i \dot{\theta}_i - r_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}) r_i \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

負荷については、

$$T = J\ddot{\theta} + T_L \dots\dots\dots (5)$$

である。

**2.3 タブロー方程式** システムグラフは、図3で示した各構成要素のターミナルグラフおよびそれらの接続状況により求めることとなる。図6は、本解析モデルをシステムグラフで表示したものである。このグラフの作成に対しては、構成要素の増減があっても柔軟に対処でき、しかも、グラフという形で抽象化することにより、複雑な機構に対しても、以降で述べるように数学的な取扱いが容易となる。このシステムグラフの枝を木および補木に分け、それによりカット・セット方程式およびループ方程式を求める。次式は、カット・セット方程式およびループ方程式<sup>(3)</sup>を示したものである。

$$B=[B_T : I] \dots\dots\dots (6)$$

$$D=[I : D_L] \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$B_T = -D_L^t \dots\dots\dots (8)$$

これらの方程式は、アルゴリズム的に求めることができ、構成要素の接続状況を入力することにより容易に求めることができる。したがって、ルンゲ・クッタ法での解析のように構成方程式の増減に従って構成方程式を作成し直すような面倒はない。

以上のターミナル方程式、カット・セット方程式およびループ方程式より、タブロー方程式を求める。次式は、本解析モデルに対するタブロー方程式である。

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \\ F_T & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

式の上半分は選んだ木に対するカット・セット方程式とループ方程式を並べたものであり、下半分は各構成要素のターミナル方程式を並べたものである。これらの方程式は、枝の接続状況などを入力すれば一定のアルゴリズムに従って計算機内部で作成することができる。このタブロー方程式はクラウト法を用いて数値解析した。

### 3. 伝動軸系の振動解析結果

軸系に励起する振動を表1に示した諸元の場合について解析した。

#### 3.1 軸のねじり剛性の差異による負荷の動的挙動

図7(a)は、電動機側の出力として、正弦波状の角変位を与えた場合について負荷に生じる振動のシミュ

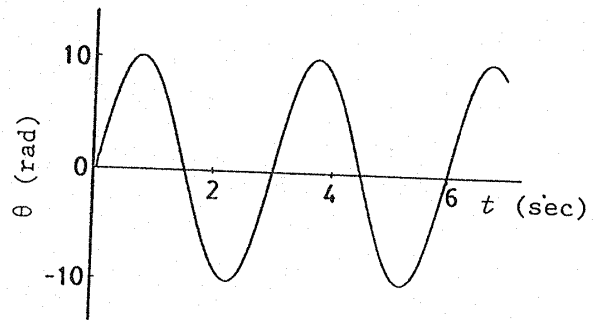
表1 伝動軸系の諸元

ELEMENT (ELEMENT NUMBER)	SYMBOL	VALUE
Motor (1)	$A$	20 rad
	$\tau$	3 s
Shaft (2,7)	$K$	$10^4$ Nm/rad
	$C$	$10^{-2}$ Nms/rad
Bearing (3,6)	$b$	$10^{-2}$ Nms/rad
Gear (4,5)	$J_1$	$2.04 \times 10^{-5}$ kgm <sup>2</sup>
	$J_2$	$3.26 \times 10^{-4}$ kgm <sup>2</sup>
	$K_G$	$1.37 \times 10^8$ N/m
	$C_G$	$10^3$ Ns/m
	$r_1$	$2.82 \times 10^{-2}$ m
Load (8)	$r_2$	$5.64 \times 10^{-2}$ m
	$J$	0.59 kgm <sup>2</sup>
	$T_L$	1 Nm

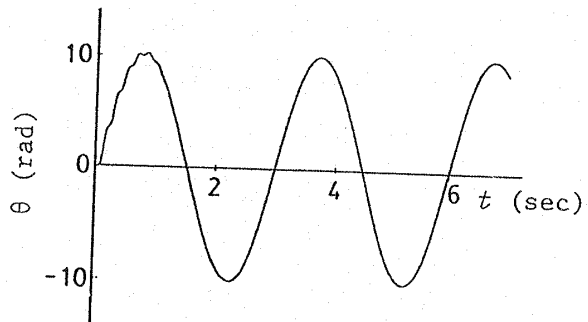
レーション結果である。この図は、軸のねじり剛性が比較的大きい場合 ( $K=10^4$  N·m/rad) である。このような場合においては、負荷側の角変位も電動機の出力波形に追従し、ほぼ正弦波状に変化している。ここで、シミュレーションは、刻み幅  $h$  を 0.01 秒とし、7 秒間行った。シミュレーションに要した時間は HITAC M-260 D で 28 秒であった。そのため、本手法は従来の手法に比較して設計時間の短縮化が望める。

図7(b)は、軸の剛性を少し低く ( $K=10^3$  N·m/rad) した場合の結果である。図7(a)とほぼ同様に正弦波状に変化しているが、軸のねじれ振動による運転開始直後に小さな振動現象が現れているが、それ以後は電動機の出力波形に追従して変化している。

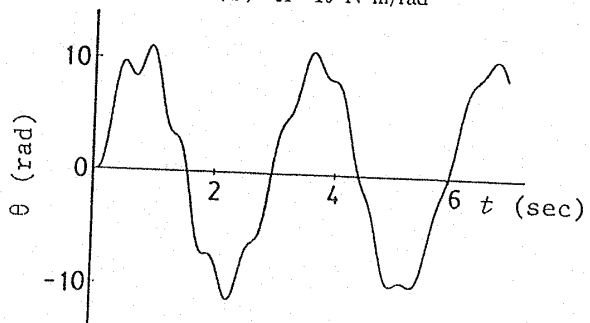
図7(c)は、さらに軸の剛性をさらに小さく ( $K=10^2$  N·m/rad) した場合の結果である。このような系になると軸のねじり振動が負荷側の振動の大きな影響を



(a)  $K=10^4$  N·m/rad



(b)  $K=10^3$  N·m/rad



(c)  $K=10^2$  N·m/rad

図7 シミュレーション I

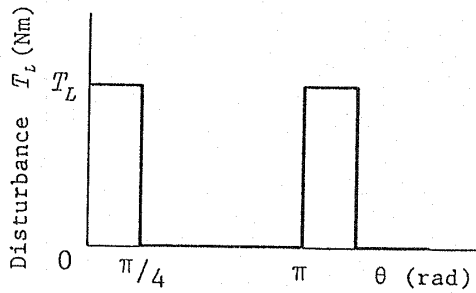
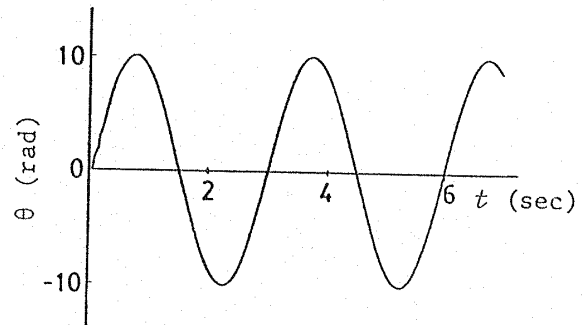
図8 負荷側に作用する外乱  $T_L$ 

図10 シミュレーション III

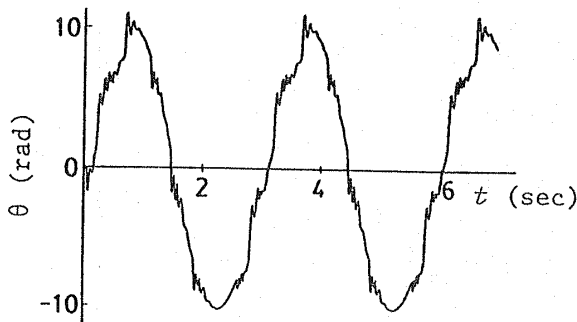
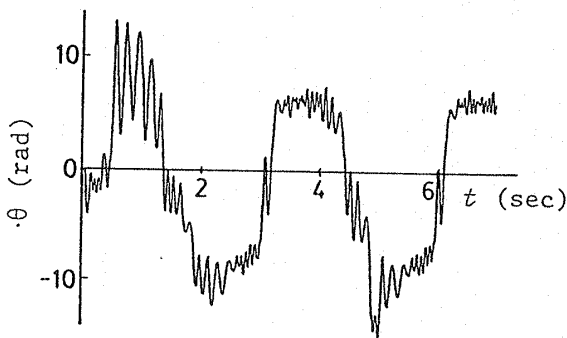
(a)  $K=10^4 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ (b)  $K=10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ 

図9 シミュレーション II

与えることがわかる。

**3.2 負荷側に外乱が作用した場合の負荷の動的挙動** 電動機が前述と同じ正弦波状の角変位を与えながら駆動されている状態のところへ負荷側に図8のような外乱が作用した場合を検討した。

図9(a)は、軸のねじり剛性を  $K=10^4 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$  にした場合の結果である。図7(a)と比較してみると、外乱による振動が付加するのがわかる。

図9(b)は、軸のねじり剛性を  $K=10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$  にした場合の結果である。負荷側の振動挙動は複雑なものとなっており、位置決め精度が問題になるような場合には、このような系では使用できないことがわかる。

**3.3 歯車の歯のばね剛性の差異による動的挙動** メカトロニクス機器などでは、騒音の低減あるいは軽

量化を目的とし、プラスチック歯車を使用するものが見受けられるようになってきている。図10は、歯車の歯のばね剛性を  $K_G=10^6 \text{ N}/\text{m}$  と小さくした場合の結果である。図からもわかるように、解析した系においては歯のばね剛性を低減させても振動現象は増減されない。しかし、設計に際しては負荷側の質量が小さい場合など種々の状況が考えられるので、それぞれの状況に即した解析が必要となる。

#### 4. ま と め

自動機械などの設計に際しては、多種多様な新しい機械要素を使用する機会が増大してきているが、位置決め精度などを問題にする場合には、それらの要素の特性を十分に吟味して装置全体の振動の解析などを行ったうえで設計をしないと設計変更を繰り返すこととなる。今回扱った軸のねじり剛性は、 $K=f(G, d, l)=\pi d^4 G/32l$  であり、 $d, l$  により種々の値をとりうる。その値の選び方により軸系に作用するトルクは複雑に変動し、負荷側に予期せぬ振動も生じることとなる。

また、機械装置においてはエレクトロニクス技術を導入したものが数多く見受けられるようになってきているが、設計に際してもそれらを含めた解析が必要になってきている。このような機械装置全体の系に対しては、本報で示したグラフ理論を用いると要素の増減に対しても容易に対処でき、設計の高効率化につながる。

#### 文 献

- (1) 矢野・矢田, 機論, 50-454, C (昭59), 1063.
- (2) 明山・歌川, 歯車の設計, (昭44), 39, オーム社.
- (3) Chua, L. O. and Lin, P. M., *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms & Computational Techniques*, (1975), 131, Prentice-Hall.
- (4) Koenig, H. E. and Blackwell, W. A., *Electro-mechanical System Theory*, (1972), 11, McGraw-Hill.