

1960

日本機械学会論文集(C編)
59巻562号(1993-6)

論文 No. 92-1647

グラフ理論による機械システムの運動方程式の自動生成* (機械振動系への適用)

綿貫 啓一^{*1}, 大滝 英征^{*1}, 石川 義雄^{*1}
浦島 良仁^{*2}, 丸山 一男^{*3}

Automatic Generation of Equations of Motion for Mechanical System Using Linear Graph Theory (Application to Mechanical Vibration Systems)

Keiichi WATANUKI, Hideyuki OHTAKI, Yoshio ISHIKAWA,
Yoshihito URASHIMA and Kazuo MARUYAMA

Recently, the importance of system design in the field of mechanical engineering has been increasingly recognized. However suitable and useful methods for machine design are not yet established. An analytical method of the dynamic characteristics in the mechanical system, a method utilizing linear graph theory, is proposed. In this paper, for practical use of this analytical method, a program is developed which can analyze the dynamic characteristics automatically. As an example, in the mechanical vibration system, with the arrangement of the elements on the computer display, the system graph and the equations of motion are automatically produced by means of a cut-set matrix, and the dynamic characteristics of the system are derived by means of a computer algebraic method.

Key Words: Computer-Aided Design, Linear Graph Theory, Automatic Generation, Automatic Analysis, Computer Algebra, Vibration Analysis, Simulation

1. 緒 言

機械システムの開発設計段階では、システムについての解析モデルをマニュアル的に作成し、その運動方程式を導出した後に、数値解析や理論解析を行い設計の際に必要な数値を求めている。これは、設計対象が大規模になればなるほど大変な作業であり労力を要する。そのため、現在では設計時間の短縮化も求められている折、動特性解析に自動化することが重要な課題となっている。それには、解析モデルを簡単に作成でき、運動方程式の導出や解析が自動的になされる対話型動特性解析システムが完成すれば、非常に有効であると考えられる。

複雑な機構の解析に関しては、グラフあるいはボンダグラフにより解析の簡易化が試みられてきている。ボンダグラフを利用した解析方法について提案されている⁽¹⁾⁽²⁾が、運動方程式の自動生成および自動解析には至っていない。また、モータ代数とグラフ理論を統合化し、解析対象を複合ループ機構まで広げた研究も

なされている⁽³⁾が、まだ自動生成できる段階にまでは至っていない。これに対して、オブジェクト指向言語 Smalltalk による二次元⁽⁴⁾および三次元振動解析の自動化⁽⁵⁾の提案もなされているが、その取扱いに専門的知識を要し設計変更などに柔軟に対処できる段階には至っていない。

そこで著者らは運動方程式の自動生成を目的に前報⁽⁶⁾において、ウィンドウ・システムにより解析モデルの作成の容易化を図り、かつグラフ理論を用いてタブロー方程式の導出を自動的に行う方法を提案した。タブロー方程式の導出では、離散化して解析を進めなければならない。

本報では、これをさらに進め、タブロー方程式ではなく運動方程式を自動生成し、数式処理を行い数値解析することを考えた。これにより、機械システムの過渡応答解析のみならず、モード解析等への適用を容易にする。まず解析モデルのシステムグラフを自動生成し、それをグラフの持つ情報をもとに運動方程式を自動生成し、それを数式処理して Runge-Kutta 法へ受け渡し自動解析を行えるアルゴリズムおよびシステムを開発したので報告する。

* 原稿受付 平成4年11月4日。

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保255)。

^{*2} 准員, 埼玉大学工学部 [現: 松下通信工業(株)]。

^{*3} 正員, 東京工業大学精密工学研究所 (〒227 横浜市緑区長津田町4259)。

2. 運動方程式の生成および解析法

2.1 運動方程式の自動生成 グラフ理論による結合関係をもとに、システムグラフ、接続行列、カット・セット行列を作成して、そのカット・セット行列つまりグラフの持つ情報から、運動方程式を自動生成する。

2.1.1 解析モデルの基本要素とデータ構造 まず、機械要素についてのデータを格納するための構造体を設定しておく。その構造体は、Element_data 形の配列 data[]として用意しておき、そのデータは要素の種類、要素番号、要素の配置された x, y 座標、ターミナルグラフの始点および終点の節点番号、接続している要素の構造体番号、要素の諸元等で構成されている。

要素の接続関係の情報は、例えば要素1と要素2を接続する場合、後述の接続モードを起動させて、要素2の構造体配列番号が要素1の構造体中に接続している要素の構造体番号が格納される。ここで、一つの要素に二つの要素が接続しているような場合には、その二つの接続している要素の構造体番号が格納される。このようにすることで要素全体の接続は図1に示すような一つのツリー構造として表現できる。

2.1.2 システムグラフの生成 解析モデルに対するシステムグラフは、ターミナルグラフ自体の形と接続に関する情報とから自動生成されるターミナルグラフの形は要素に固有な接続属性が与えられており、それに任意に付けた節点番号を結び付けるようにして仮の番号を割振りながら定義される。

次に、正規の節点番号をターミナルグラフに対応して自動的に与えなければならない。与えられた順番は上位にある要素から与える。すなわち、構造体に仮に記述された配列番号をたどっていくと、最終的に静止点（基準点）⑧にたどり着く。一端⑧にたどりついた後、それを逆にたどり先頭の要素を探し出すことがで

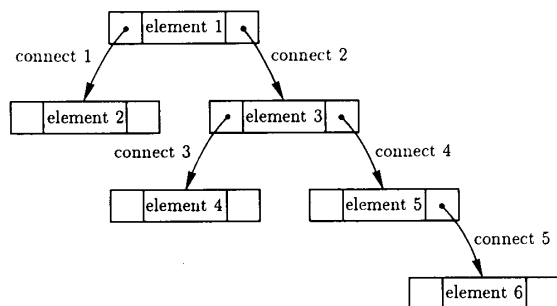


図1 要素接続のツリー構造

きる。その探し出された先頭要素にターミナルグラフの形式に従い節点番号と構造体のターミナルグラフの始点および終点番号を決定する。これを次の要素に対しても順次行くと各構造体は接続している要素の構造体番号によりツリー構造をなしているの、結果としてツリーの末端である静止点に向って節点番号を記述していことになる。分岐点すわち接続している要素の構造体が複数存在する場合には、まず先の番号として振られた節点の方向へと進む。そして、静止点にたどり着いた後、分岐点まで戻り、そこから再度節点番号を記述してゆく方法をとる。なお、節点番号の初期値は1であり、静止点は零で表現することとした。

次に、構造体の配列をはじめから順に検索し、質点の情報をもつ構造体を探しだし、その質点のもつグラフを木として優先的に割付けていく。この操作をすべての質点に対してその作業を行う。次に、質点以外にも木となりうるか判断する。これには、質点以外の全要素に対して、それぞれの要素の節点と、木の節点集合とを比較し、その節点集合の中に比較しようとする要素の節点と同一のものが存在するかどうかを調べ、存在しなければ木となる。もし木になりうる場合には、その構造体の配列番号を配列の中に格納する。これにより、システムグラフが自動的に生成される。

2.1.3 接続行列の生成 接続行列は、まず（要素数×節点数）の大きさの二次元配列 Incidence[][]を用意し、2.1.2項で生成されたシステムグラフの情報をもとに、その構造体中のターミナルグラフの始点および終点節点番号に格納されているデータより、互いに接続していれば1、接続していなければ零により表す。その既約接続行列は、静止点を示す節点に関する行成分を除いて作成する。

2.1.4 カット・セット行列の生成 接続行列 A 、ループ行列 B およびカット・セット行列 D は、それぞれ

$$A = [A_r : A_L]$$

$$B = [B_r : B_\mu]$$

$$D = [D_r : D_L]$$

である。ここで、

$$AB^T = 0$$

$$DB^T = 0$$

という関係を持つので、

$$B_r^T = -A_r^T A_L$$

$$D_r^T = -B_r^T$$

となる。したがって、カット・セット行列は

$$D = A_r^T A \cdots \cdots \cdots (1)$$

となり、木に関する既約接続行列の逆行行列と既約接続

行列の積から作成されることになる。ここで、逆行列の算出にはガウスの消去法を用いた。これにより、接続行列 A からカット・セット行列 D が算出される。

よって、カット・セット行列 D と通過変数 α よりカット・セット方程式は、

$$D \cdot \alpha = 0 \dots\dots\dots (2)$$

となる。

2・1・5 運動方程式の生成 あらかじめカット・セット行列の各行について、非零部分を検索し、その部分に相当する要素の構造体番号の情報と非零部分の数値を保持しておく。運動方程式は、この検索結果をもとに、その要素についてのターミナル方程式を順次並べて表示すればよい。

例えば、図 2 (a) のような解析モデルでは、システムグラフは図 2 (b) のように表され、よって基本カット・セット行列 D_f は

$$D_f = \begin{matrix} & m_1 & k_1 & m_2 & k_2 \\ \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots (3)$$

となり、よって式 (2) より、

$$\left. \begin{matrix} F_{m1} + F_{k1} = 0 \\ -F_{k1} + F_{m2} + F_{k2} = 0 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

を得る。これにターミナル方程式を順次割当てていくと結果として、運動方程式は、

$$\left. \begin{matrix} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 (x_1 - x_2) = 0 \\ -k_1 (x_1 - x_2) + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

のように自動生成される。

2・2 運動方程式の自動解析 2・1・5 項で生成された運動方程式は単なる文字列であり、それらの方程式を解析する場合には、数式処理を行わなくてはなら

ない。また各運動方程式は、慣性項、すなわち 2 次の微分項を含んでいるため、Runge-kutta 方法で解く場合には、2 次項を 1 次項に帰着させなければならない。ここでは、そのアルゴリズムを述べる。

運動方程式を生成するための情報は、すべて式 (3) のカット・セット行列から得ている。数式上の処理は、まずカット・セット行列の各行について非零部分を検索し、質点および他の要素の非零部分が存在するか判別し、その非零部分に相当する要素の番号および符号をデータ配列に受渡す。たとえば、図 2 のモデルでは式 (3) より、

$$\begin{aligned} \text{equation}_1 &\leftarrow (+, m_1, \text{'mass'}), (+, k_1, \text{'spring'}) \\ \text{equation}_2 &\leftarrow (-, k_1, \text{'spring'}), (+, m_2, \text{'mass'}), \\ &\quad (+, k_2, \text{'spring'}) \end{aligned}$$

のようなデータが作成される。このように質点を含む行に関する方程式を一つの方程式とし、 $v = dx/dt$ なる関係により 1 次項のみの方程式にして解析を行う。数値演算は、その配列データをもとに行われる。

3. システム概要

本解析システムの構成は大きく分けて、解析モデル作成部、運動方程式生成部、および運動方程式解析部より構成されている。それらはすべて、ユーザ・インタフェースを容易化するため、ウィンドウシステムによる統合環境により構成されている。

モデル構成に必要な要素はあらかじめアイコンとして用意しておき、要素配置モード、接続モード (Connect)、修正モード (Edit)、計算モード (方程式生成モード: Calc)、メニューモード (Menu)、ファイルモード (File) の六つのモードを用いて解析対象とするモデルへと組上げていく。

要素配置モードは、要素を画面上に配置するモードで、アイコン化された要素をマウスで指定選択する。選択した要素をマウスカーソルの動きに合せて移動し、位置を指定すると、要素はその場所に配置される。

接続モードは、配置された要素同士を接続させるモードである。接続したい要素にマウスカーソルを合せ、クリックして確定する。3 要素間の接続の場合には、ウィンドウが開いてその接続関係を選択することにより接続できるようにした。

修正モードは、作成したモデル全体を消去したいときや、要素の配置変更、要素変更を希望する際に用いる。修正方法は変更を要する要素をマウスカーソルで指定し、消去した後、通常の要素配置モードと同様にして要素を配置すればよい。

計算モードは、入力された要素の接続関係からシス

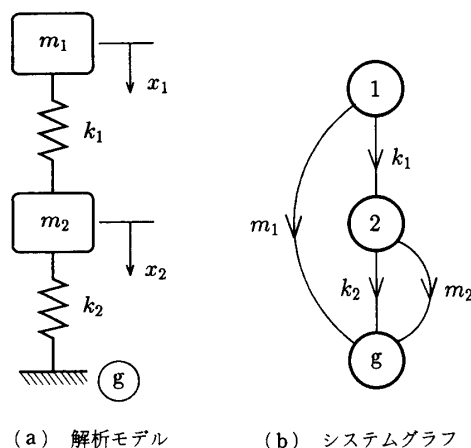


図 2 基本的な機械振動系モデル

テムグラフを自動的に生成し、それをもとに運動方程式を自動生成する。

メニューモードは、主として各種情報の表示を行う。その情報としては、入力要素、システムグラフ、運動方程式が該当する。さらには、解析実行メニューも用意されている。このメニューは、情報表示ではなく、実際にパラメータに数値を与えて画面上で構成したモデルに対し解析を行う。各要素のパラメータ値と解析条件を入力すると、過渡応答解析などの結果がグラフ表示される。

ファイルモードは、過渡応答解析のデータをファイルに保存するモードである。

4. 運動方程式の解析例

4.1 解析例 1 まず、図2の解析モデルの運動方程式の自動生成結果および要素の追加による方程式の再生成結果の一例を示す。

図3(a)は、図2の質量およびばねからなる基本モデルの運動方程式の自動生成結果である。また、図3(b)は修正モードを用いてばね k_2 にダッシュポット d_1 を付加させて運動方程式を再生成した結果である。ダッシュポット d_1 が付加されることにより、運動方程式中には減衰項が追加されている。これは、ダッシュポット d_1 が位置データと接続属性のメッセージを

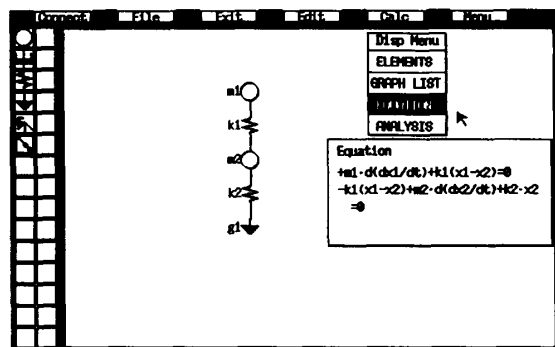
システムに送ることにより、システムグラフが自動的に再生成し、これによりカット・セット行列が変更され運動方程式が書き換えられたものである。本システムによると、要素の付加および削除が容易に行え、解析モデルの作成から解析が一貫して自動的に行える。

4.2 解析例 2 一般に複雑な連成振動系は、その要素数が増加するにつれて運動方程式の作成に手間がかかり、解を導くことが困難になる。本手法のように解析モデルをシステムグラフで表すことにより、システムの構成や要素の力学的関係を簡潔に表現できるため、複雑な系を容易にとらえることが可能である。

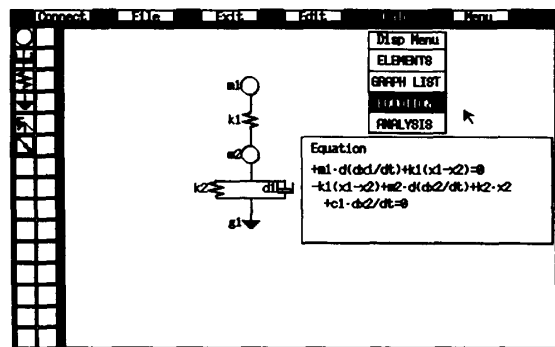
一例として、図4(a)に示すような車体の振動モデルを取上げる。このモデルは、図4(b)のような質量 m 、ばね k 、ダッシュポット c 、およびレバアーム L で簡易的に表せる。この質点、バネ、ダッシュポットはその性質上、2節点間を結ぶターミナルグラフで表現することができる。しかし、図5(a)に示すようにレバアームモデルは、レバアームのもつ各接続点の変位の基準は静止点⑧であり、ターミナルグラフは図5(b)のように各要素との接続点①、②、③が変位の基準である静止点⑧への枝を有するグラフを表現される。ここでレバアームの特性は各節点にかかる力およびアーム長により決定される。

図6は解析モデルのシステムグラフである。このグラフで枝(1, 6, 9)は質点1, 2, 3、枝(2, 7, 10)はばね1, 2, 3、枝(3, 4, 5)はレバアーム、枝(8, 11)はダッシュポット1, 2を表している。木は枝(1, 2, 6, 9)と定める。

図7(a)は、解析モデル作成部で解析モデルを構築し、さらにシステムグラフを求めたものである。また、図7(b)は運動方程式作成部により運動方程式を生成

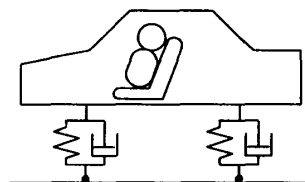


(a) 運動方程式の生成

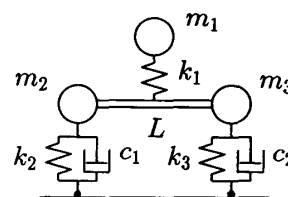


(b) 要素追加後の運動方程式

図3 運動方程式の自動生成例



(a) 車体の構造

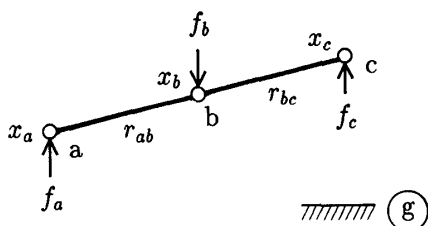


(b) 簡略化した解析モデル

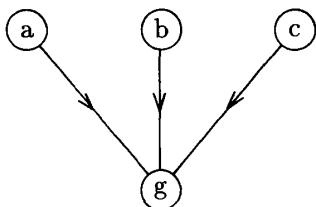
図4 車体の振動モデル

1964

グラフ理論による機械システムの運動方程式の自動生成



(a) 解析モデル



(b) システムグラフ

図 5 レバアームのモデル化

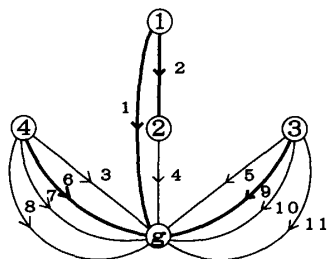
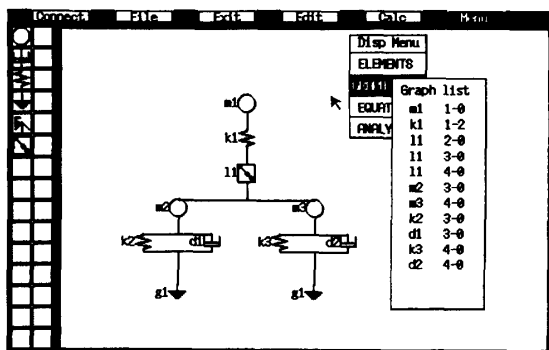
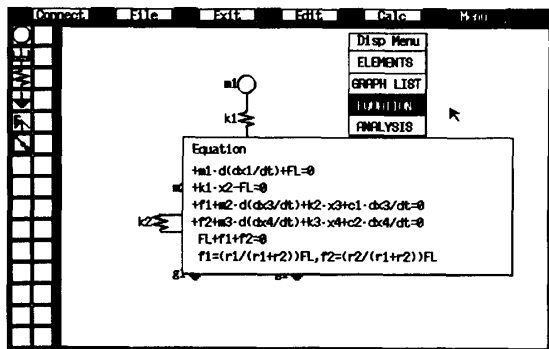


図 6 システムグラフ

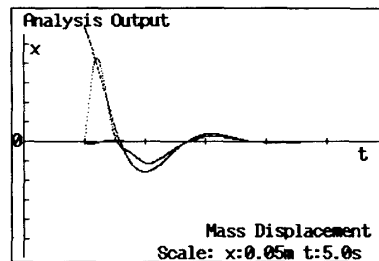


(a) システムグラフの生成

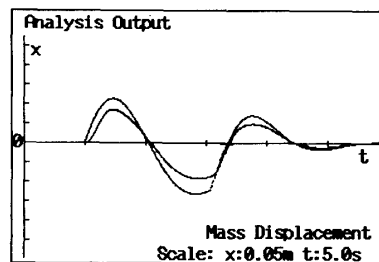


(b) 運動方程式の生成

図 7 運動方程式の自動生成



(a) 突起状の凹凸の場合



(b) 正弦波状の凹凸の場合

図 8 解析結果例

したものである。これらのシステムグラフおよび運動方程式は机上で得られたものと一致している。

図 8 (a), (b) に運動方程式を自動解析し、過渡応答を求めた結果を示す。ここでは、同一のパラメータで二つの条件で $t=0$ から 30 s において解析したものである。なお、初期変位、初期速度は零とした。図 8 (a) は、時間 $t=5.0$ s において質量 m_2 (前輪に相当) を有する系の接地点が $x=0.3$ m の変位を瞬時のうちに受けると仮定したインパルス入力の影響結果である。各質点は変位の入力点で大きな変位を受け、連成振動している。また図 8 (b) は、時間 $t=5.0$ 以降の路面に凹凸 $[x(t)=0.3 \sin(0.5t)]$ がある場合を想定して、各質点が変位した場合の影響結果である。

本自動解析システムによれば、このようにパラメータの変更も容易に行えることがわかる。

5. 結 言

本研究では、グラフ理論を用いて解析モデルのシステムグラフおよび運動方程式を自動生成し、それをグラフの情報をもとに数式処理を行い自動解析を行えるアルゴリズムおよびプログラムを開発した。本システムは、一貫して解析モデルのシステムグラフより得られるカット・セット行列の情報をもとに、運動方程式の生成から解析を自動的行え、かつ解析モデルをシステムグラフ表現しているため設計変更柔軟に対処できる。多くの構成要素を登録することにより、汎用性のあるシステムを構築できるのが特徴である。

文 献

- (1) Margolis, D. L. and Karnopp, D. C., *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, Vol. 101 (1979), 50.
 - (2) Rosenberg, R. C., *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, Vol. 109 (1987), 109.
 - (3) 城・鳥原, 精密工学会誌, 54-7 (1988), 1272.
 - (4) 丸山・藤田, 機論, 53-495, C(1987), 2208.
 - (5) 荒巻, 藤田, 機論, 54-507, C(1988), 2583.
 - (6) 綿貫・丸山・大滝, 機論, 56-526, C(1990), 1570.
 - (7) Chua, L. O. and Lin, P. M., *Computer-Aided Analysis of Electronics Circuit : Algorithms & Computational Techniques*, (1975), 131, Prentice-Hall.
 - (8) Koenig, H. E. and Blackwell, W. A., *Electro-mechanical System Theory*, (1972), 11, McGraw-Hill.
 - (9) Hachthel G. D., ほか 2 名, *IEEE Trans.*, CT-18-1 (1971), 101.
-