

だ円歯車状材の応力分布*

綿貫啓一^{*1}, 大滝英征^{*1}, 李紹昌^{*1}

The Stress Distribution of an Ellipsoidal Gear

Keiichi WATANUKI, Hideyuki OHTAKI and Shaochang Li

The higher accuracy and better quality are required on the gear drives; It's necessary to study the strength and profile of ellipsoidal gear which is predicted to be used widely in the future. However the stress distribution and deformation of the gear's teeth when a load is applied to the boundary have not been extensively analyzed. In this study, the stress distribution and deformation of an ellipsoidal gear's teeth is analyzed using a complex stress function. This method makes it possible to obtain any ellipsoidal gear's profile using a mapping function and to analyze the stress distribution and deformation correctly and easily using above mentioned stress function.

Key Words: Elasticity, Complex Stress Function, Stress Distribution, Deformation, Ellipsoidal Gear, Boundary Element Method, Machine Design

1. ま え が き

非円形歯車は、印刷機械、包装機械、家電製品といった分野で利用されてきている。これは非円形歯車の設計過程において存在する種々の幾何学的制約条件を解決するコンピュータ支援による設計法⁽¹⁾⁻⁽³⁾が確立されたことと、NC工作機械を有効に利用する加工技術が進展したことによる。加えて、非円形歯車の代表例であるだ円歯車では、標準歯車に加え、創造的な歯形も提案され、多彩な諸元を有するものも登場してきている。このような動向を勘案すると、非円形歯車の真価をさらに発揮するためには、提案が頻繁になされる創造的な歯形をも含めた強度評価を同時に行う必要が増している。そのためには、歯形の歯元に生じる応力分布、変位分布を迅速、正確に把握できるような解析法を確立し、試行錯誤を行いやすくすることが必要である。

本報では、変数値を適当に選べば、大抵の歯形を近似しうような融通性のある写像関数を誘導した。次いで、この写像関数によるだ円形をした歯車について、その歯部に集中荷重が作用した場合の歯元の応力分布

および歯の変形を複素応力関数⁽⁴⁾を利用して求めた。使用した記号は以下のとおりである。

$z(w)$: z 平面 ($z=x+iy$) より w 平面 ($w=u+iv$) への写像関数。(図1に示したように z 平面の境界 C を w 平面の境界 ζ に、 z 平面の領域 D を w 平面の領域 Δ に写像する)

σ_u, σ_v : u, v 方向の垂直応力

τ_{uv} : せん断応力

V : 変位 $= V_x + iV_y$

P : 境界上 I から II までの間に作用する外力の総和 $= P_x + iP_y$

w_0 : 荷重点 $= u_0 + iv_0$

s : 歯数

E : 縦弾性係数

ν : ポアソン比

また、記号 \cdot および $\dot{}$ は、 w による微分、共役複素関数を意味する。

2. 複素応力関数の誘導

2.1 基礎式および写像関数 応力、変位は次式で与えられる。

$$\sigma_u + \sigma_v = \frac{4}{z(w)\bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w \partial \bar{w}} \dots\dots\dots (1)$$

* 原稿受付 1996年5月1日

*1 正員、埼玉大学工学部(〒338 浦和市下久保255)。

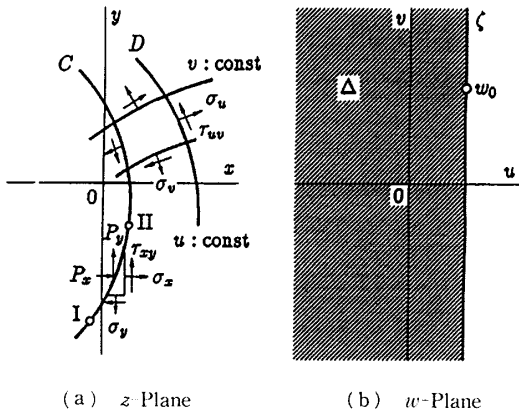


Fig. 1 Transform from z -plane to w -plane

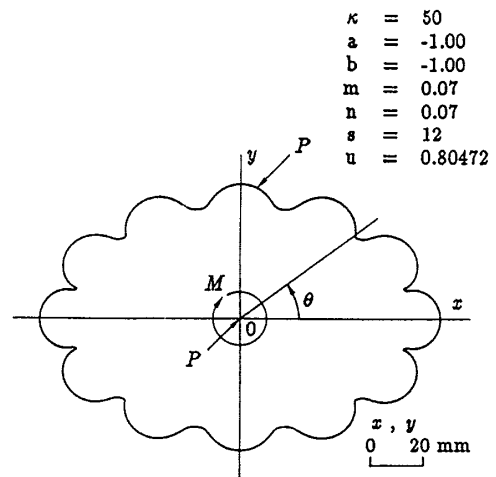


Fig. 2 The form in z -plane

$\kappa = 50$
 $a = -1.00$
 $b = -1.00$
 $m = 0.07$
 $n = 0.07$
 $s = 12$
 $u = 0.80472$

$$\sigma_v - \sigma_u + 2i\tau_{uv} = \frac{4}{\bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$EV = -2(1 + \nu) \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\bar{z}(\bar{w}) \partial \bar{w}} + 8f_1(w) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$F(w, \bar{w}) = z(w)\bar{f}_1(\bar{w}) + \bar{z}(\bar{w})f_1(w) + f_2(w) + \bar{f}_2(\bar{w}) \dots\dots\dots (4)$$

境界条件は、

$$\left[\frac{-2i}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_{|w=s} = \bar{P} \dots\dots\dots (5)$$

応力および変位は、式(4)を満足する $f_1(w), f_2(w)$ を決定し、式(1)~(3)に代入すれば求まる。

いま、関数 $z(w)$ として、

$$z(w) = k \cosh w \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{w+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{w+b}{2} s \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を考える。 k, a, b, m, n, s の値を適切に選べば、図2に示したように、十分とはいえないまでも、だ円歯車を近似しうるような形状を得ることができる。ちなみに、だ円歯車の解析対象とする箇所 ζ の形と写像関数で

求めた形が一致していれば、他の箇所での形が多少一致していなくても、St. Venant 原理に準拠すれば応力解析に支障はないものと考えられる。

2・2 応力関数

上記の写像関数で誘導した歯部の一つに、集中荷重 P が作用する場合を検討する。この場合、集中荷重の反力は図2中に示したように中心点 O で軸方向力およびモーメントの形で受けもつ。

いま、 $f_1(w)$ として、

$$f_1(w) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -P \ln(e^w - e^{w_0}) + A \coth \frac{w+a}{2} s + B \coth^2 \frac{w+b}{2} s + Cw \right\} \dots\dots\dots (7)$$

をとる。

ここで、対数項は集中荷重による影響項を、 w の項は変位の食違いを避けるために考慮した項である。第2, 3項は写像関数の式形を考慮して、取り入れた項である。

さて、式(5)を念頭に、 $\partial F(w, \bar{w})/\partial w$ を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} = & \frac{k}{4\pi} \left[\sinh w \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{w+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{w+b}{2} s \right\} - \cosh w \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s \right. \right. \\ & \left. \left. + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \coth \frac{w+b}{2} s \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s \right\} \right] \left\{ -\bar{P} \ln(e^{\bar{w}} - e^{\bar{w}_0}) + \bar{A} \coth \frac{\bar{w}+a}{2} s + \bar{B} \coth^2 \frac{\bar{w}+b}{2} s + \bar{C}\bar{w} \right\} \\ & + \frac{k}{4\pi} \cosh \bar{w} \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{\bar{w}+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{\bar{w}+b}{2} s \right\} \left\{ -P \frac{e^w}{e^w - e^{w_0}} - A \frac{s}{2} \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s \right. \\ & \left. - Bs \coth \frac{w+b}{2} s \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s + C \right\} + \dot{f}_2(w) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、いま、境界条件を満足するように $\dot{f}_2(w)$ を決定する。

自由境界上では、

$$\left[\frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_{|w=s} = \text{一定} \dots\dots\dots (9)$$

を満足しなくてはならぬこと、 $f_2(w)$ は w のみの関数であることを考慮し、

$$\begin{aligned} f_2(w) = & \frac{k}{4\pi} \left[\sinh w \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{w+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{w+b}{2} s \right\} - \cosh w \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s \right. \right. \\ & + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s \left. \left. \right\} \left\{ \bar{P} \ln(e^w - e^{w_0}) + \bar{P}(\bar{w}_0 - w) - \bar{A} \coth \frac{2u_0+a-w}{2} s \right. \right. \\ & - \bar{B} \coth^2 \frac{2u_0+b-w}{2} s - \bar{C}(2u_0-w) \left. \left. \right\} - \frac{k}{4\pi} \cosh(2u_0-w) \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{2u_0+a-w}{2} s \right. \right. \\ & + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{2u_0+b-w}{2} s \left. \left. \right\} \left\{ -P \frac{e^w}{e^w - e^{w_0}} - A \frac{s}{2} \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s \right. \right. \\ & \left. \left. - Bs \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s + C \right\} \right] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

と選ぶ、

$f_2(w)$ は領域 Δ 内で特異点を有してはならないが、式(10)では、領域 Δ 内の $w=2u_0+a, 2u_0+b$ にて特異点を有する。そこで、まず、式(10)より特異点を有する項を取り出して除去する。

$w=2u_0+a$ の特異点を有する $\coth \{2u_0+a-w\}/2$ に係わる項より

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\bar{A}}{4\pi} \left[\sinh w \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{w+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{w+b}{2} s \right\} - \cosh w \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s \right\} \right] - \frac{1}{4\pi} \cosh(2u_0-w) \frac{ms}{2} \left\{ -P \frac{e^w}{e^w - e^{w_0}} \right. \right. \\ & \left. \left. - A \frac{s}{2} \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s - Bs \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s + C \right\} \right] \Big|_{w=2u_0+a} = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$w=2u_0+b$ の特異点を有する $\coth^2 \{(2u_0+b-w)/2\}$ に係わる項より

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\bar{B}}{4\pi} \left[\sinh w \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{w+a}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{w+b}{2} s \right\} - \cosh w \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s \right\} \right] - \frac{1}{4\pi} \cosh(2u_0-w) \frac{ns}{2} \left\{ -P \frac{e^w}{e^w - e^{w_0}} - A \frac{s}{2} \sinh^{-2} \frac{w+a}{2} s - Bs \right. \right. \\ & \left. \left. \times \coth \frac{w+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{w+b}{2} s + C \right\} \right] \Big|_{w=2u_0+b} = 0 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式(11)、(12)の連立方程式を解くと、未定係数 A, B は、

$$A = \frac{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(AR\varepsilon_{11} + \varepsilon_{14}) + \varepsilon_{13}(BR\varepsilon_{21} + \varepsilon_{24})}{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}) - \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}} \dots\dots\dots (13)$$

$$B = \frac{(BR\varepsilon_{21} + \varepsilon_{24})[(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}) - \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}] + \varepsilon_{23}\{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(AR\varepsilon_{11} + \varepsilon_{14}) + \varepsilon_{13}(BR\varepsilon_{21} + \varepsilon_{24})\}}{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})[(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}) - \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}]} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$AR = \frac{\varepsilon_{13}(\varepsilon_{24} + \bar{\varepsilon}_{24}) + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(\varepsilon_{14} + \bar{\varepsilon}_{14})}{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}} \dots\dots\dots (15)$$

$$BR = \frac{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})(\varepsilon_{24} + \bar{\varepsilon}_{24}) + \varepsilon_{23}(\varepsilon_{14} + \bar{\varepsilon}_{14})}{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \sinh(2u_0+a) \left\{ \left(1 + \frac{ms}{2} \right) \coth(u_0+a)s + \frac{ns}{2} \coth^2 \frac{2u_0+a+b}{2} s \right\} \\ & - \cosh(2u_0+a) \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2}(u_0+a)s + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \coth \frac{2u_0+a+b}{2} s \cdot \sinh^{-2} \frac{2u_0+a+b}{2} s \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = -\cosh a \cdot m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2}(u_0+a)s \dots\dots\dots (18)$$

$$\varepsilon_{13} = -\cosh a \cdot \frac{ms^2}{2} \coth \frac{2u_0+a+b}{2} s \sinh^{-2} \frac{2u_0+a+b}{2} s \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} = & \sinh(2u_0+b) \left\{ 1 + \frac{ms}{2} \coth \frac{2u_0+a+b}{2} s + \frac{ns}{2} \coth^2(u_0+b)s \right\} - \cosh(2u_0+b) \\ & \times \left\{ m \left(\frac{s}{2} \right)^2 \sinh^{-2} \frac{2u_0+a+b}{2} s + 2n \left(\frac{s}{2} \right)^2 \coth(u_0+b)s \sinh^{-2}(u_0+b)s \right\} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = -\cosh b \cdot \frac{ns^2}{2} \coth(u_0+b)s \cdot \sinh^{-2}(u_0+b)s \dots\dots\dots (21)$$

$$\epsilon_{23} = -\cosh b \cdot \frac{ns^2}{2} \cdot \sinh^{-2} \frac{2u_0 + b + a}{2} s \dots\dots\dots (22)$$

$$\epsilon_{14} = -\cosh a \cdot \frac{ms}{2} \left\{ P \frac{e^{2u_0+a}}{e^{2u_0+a} - e^{w_0}} + C \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\epsilon_{24} = -\cosh b \cdot \frac{ns}{2} \left\{ P \frac{e^{2u_0+b}}{e^{2u_0+b} - e^{w_0}} + C \right\} \dots\dots\dots (24)$$

A, B 中には、未定係数 C が含まれている。この係数は変化の食違いを避ける条件より決定できる。すなわち、
 $V(w) = V(w + 2n\pi i) \dots\dots\dots (25)$

を満足しなくてはならない。式(25)に式(3), (8)を代入し、変位の食違いに係わっている v に関する一次項を取り出し整理すると、

$$C = \frac{1+v}{4} P \dots\dots\dots (26)$$

と求まる。

以上より、全未定係数が求まり、応力関数 $f_1(w), f_2(w)$ が決定されたことになる。

そこで、最後に、荷重点を含む全領域について、式(4)が確かに成立しているかどうか検討する。いま、I, IIを
 図2の自由境界上の任意点に選ぶと確かに、

$$\left[\frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_I \Big|_{w=\xi} = \left[\frac{1}{4\pi} \ln(-1) \right]_I \Big|_{w=\xi} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

となる。

I, IIを荷重 P を含む領域に選ぶと、

$$\left[\frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_I \Big|_{w=\xi} = -\frac{\bar{p}}{4\pi} \left[\ln \frac{e^{\bar{w}} - e^{\bar{w}_0}}{e^{w_0} - e^{\bar{w}}} \right]_I \Big|_{w=\xi} = -\frac{\bar{P}}{4\pi} \ln \left[\left\{ 1 - i \frac{e^{u-u_0} \sin v - \sin v_0}{e^{u-u_0} \cos v - \cos v_0} \right\} / \left\{ 1 + i \frac{e^{u-u_0} \sin v - \sin v_0}{e^{u-u_0} \cos v - \cos v_0} \right\} \right] \Big|_{u=u_0} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで、関数論で周知の

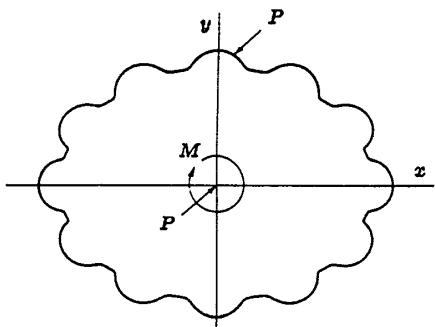
$$\ln \frac{1+ix}{1-ix} = 2i \operatorname{arctg} x \dots\dots\dots (29)$$

なる関係を利用すると、

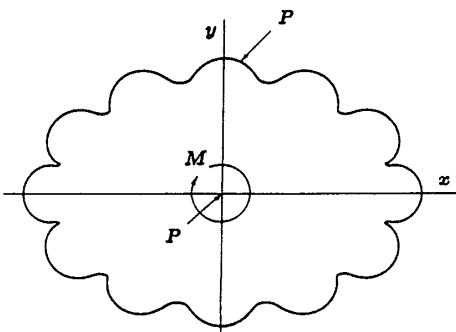
$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_I \Big|_{w=\xi} &= 2i \operatorname{arctg} \left[\frac{e^{u-u_0} \sin v - \sin v_0}{e^{u-u_0} \cos v - \cos v_0} \right]_{\frac{u-u_0}{v-v_0} + jv}^{\frac{u-u_0}{v-v_0} - jv} \\ &= -2\pi i \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となり、式(30)は結局、

$$\left[\frac{1}{z(w)} \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} \right]_I \Big|_{w=\xi} = \frac{\bar{P}}{2} i \dots\dots\dots (31)$$



(a) Gear 1



(b) Gear 2

Fig. 3 Ellipsoidal gear expressed in z plane

Table 1 Speciality of ellipsoidal gear

	Gear 1	Gear 2
κ	30.000	50.000
a	-1.170	-1.000
b	-1.170	-1.000
m	0.040	0.070
n	0.040	0.070
s	12	12
u	1.000	1.200
P_x N/mm	6.933	6.933
P_y N/mm	-6.933	-6.933
u_0	1.000	1.200
v_0	1.520	1.520

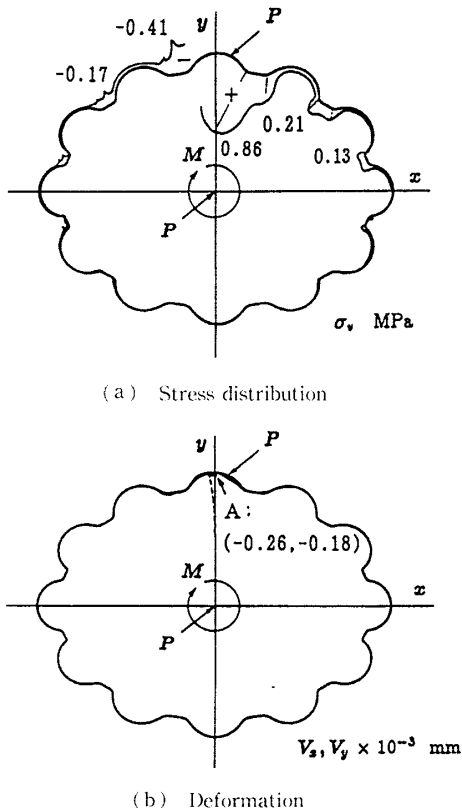


Fig. 4 Stress and deformation distribution (Gear 1)

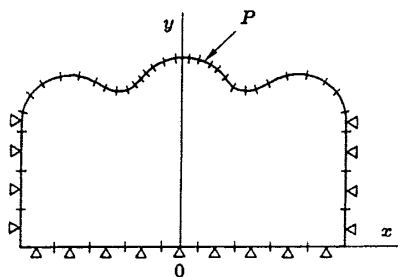


Fig. 5 Boundary condition on the boundary element method

となる。これより確かに、境界全域にわたって式(4)を満足することがわかった。

以上を総括すると、応力分布および変位は、式(1)~(3)より求めることができることとなる。

3. 応力分布および変形

図3は、解析しただ円歯車形状材の一例を示したものである。この場合は、写像関数の数値を表1に示したように取った。歯の一つの歯面に直角方向に集中荷重 P が作用した場合の応力分布を図4(a)に示した。図中の+、-の符号はそれぞれ引張応力および圧縮応力を意号する。いずれの場合も最大応力は荷重の作用する歯の歯底の最大曲率部で発生することがわかる。また、応力の発生は隣接歯の歯底にも及んでいるもの

Table 2 Comparison of the maximum stress between this theory and B. E. M [MPa]

	This theory		B.E.M.	
	Tension	Compression	Tension	Compression
Gear 1	0.861	-0.413	0.758	-0.375
Gear 2	0.622	-0.396	0.591	-0.349

Table 3 Comparison of deformation between this theory and B. E. M ($\times 10^{-3}$ mm)

	This theory	B.E.M.
Gear 1	0.316	0.302
Gear 2	0.291	0.283

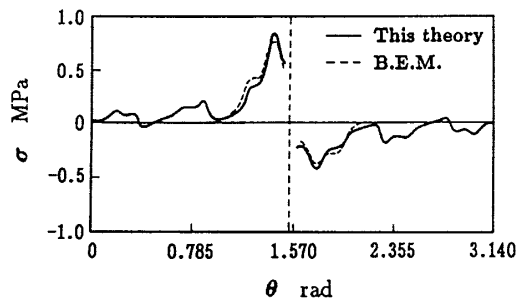


Fig. 6 Comparison of stress distribution between this theory and B. E. M (Gear 1)

の、それより離れるとほとんど無視しうる程度の値となる。図4(b)は集中荷重が作用した場合の歯先部の変位を示したものである。

ここで、上記解析結果の妥当性を検討するために、境界要素法の結果と比較してみることにした。境界要素法の解析に用いた歯形状モデルは、とりあえず図5に示したように荷重を受ける歯とその両側に隣接する歯の3枚とし、周辺部で変位の拘束条件を与えた。図6は解析結果の比較を示したものである。応力分布状況は、荷重作用点近傍では多少の差異を生じているものの、全体的傾向としては比較的良好一致している。また、最大応力とってみると表2に示したように、両者は比較的良好一致しているとみなせる。歯先部の変位についても、表3からわかるように、両者は比較的良好一致しているとみなせる。

4. む す び

複雑な不等速運動特性を作り出す機構の代表はカム機構である。これが一對のだ円歯車で構成できるのであれば、非常に単純な機構となり、限定された自動化機構の中では十分目的を達成する。現在、歯形も標準歯形から独自開発の歯形採用へと傾向を強めてい

る。それに伴って、創造した歯形について強度などを迅速、かつ適切に評価し、最適な歯形の抽出へ向け支援していく必要が増している。本報で誘導した写像関数は、ピッチ曲線を考慮して選定された歯車形状を全体的には近似しえないものの、強度上留意すべき、歯の近傍領域に対しては適用可能と考えられる。それゆえ、評価を迅速に行っていく際には、有効に利用しう

るものと考えられる。

文 献

- (1) 香取英男・ほか2名, 機械設計, 34-15(1990), 82-87.
- (2) 香取英男・ほか2名, 機械設計, 34-11(1990), 81-86.
- (3) 新井哲夫, 機械設計, 34-6(1990), 82-93.
- (4) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 32-38, Springer-Verlag.