

境界要素法とノイマン級数に基づく摂動解法を 組合せた起伏地形の地震応答解析手法

茂木秀則¹・川上英二²・福原幸司³

¹正会員 博(工) 埼玉大学講師 工学部建設工学科 (〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255)

²正会員 工博 埼玉大学教授 地圏科学研究センター (〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255)

³修(工) 日本電子計算株式会社・研究当時埼玉大学理工学研究科

山地や谷地形などの地形の起伏や、埋没谷などの基盤の不整形性を有する地盤では複雑な地震応答を示すことが指摘されている。このため様々な地震応答解析が行われているが、複雑な応答が生じるメカニズムについては依然として不明な点が多い。本研究では、地表面の起伏に着目し、起伏が地震応答に与える影響を検討するための手法として、境界要素法と摂動解法を組み合わせた新たな手法を展開した。この手法には地震応答を入射波と次数ごとの散乱波の寄与に分離できる利点がある。また、本解析手法の適用例を示し、地盤の応答関数が散乱波の寄与から解釈できること、散乱波の寄与は散乱波の発生地点の地表面の法線方向とこの地点から地震応答を考える地点への方向との関係、及び両地点の距離の二つの要因の影響を受けることなどを指摘した。

Key Words : *boundary element-perturbation method, Neumann series, irregular topography, scattered wave, two-dimensional SH wavefield*

1. はじめに

山地や谷地形、崖地などの地表面の起伏や、埋没谷などの地下構造の不整形性を有する地盤ではこれらの不整形性に起因する散乱波の影響によって、地表面上の位置、振動数、入射波の空間分布特性などに依存する複雑な地震応答を示すことが指摘されている。そして、地震応答に対する地表面の起伏や地下構造の不整形性の影響を検討することを目的に、様々な地震応答解析が行われている¹⁾⁻¹³⁾。しかしながら、多くの研究が数値的に求めた地震応答に基づいてその性質を論じる手法を用いており、複雑な地震応答を示すメカニズムについては依然として不明な点が多い。また、半円形谷地形、くさび形堆積地盤などの特殊な形状の地盤では解析的な手法に基づいてその地震応答が論じられている¹⁴⁾⁻¹⁶⁾が、一般の地形にそのまま適用できるものではない。

本研究では地表面の起伏に着目し、複雑な地震応答を引き起こすメカニズムを検討するための手法として、境界型の解法の一つである境界要素法と摂動解法を組み合わせた新たな手法を展開した。まず、地盤の地震応答解析手法として振動数領域での境界要素法を用い、地表面の応答振幅と入射波の振幅に関する代数方程式を求めた。次に、この代数方程式の係数行列である境界要素行列をノイマン級数に展開し、地表面の応答振幅の級数解を得た。この級数解は基本解の境界積分を要素とする行列のべき乗の和で陽に表されているため、

地震応答を入射波と次数ごとの散乱波の寄与に分解して求めることができ、かつ、これに基づいて散乱波の性質を解析的に検討できる利点がある。

さらに、本解析手法の有効性を示すため、1.5波分の正弦波形の起伏を有する地形モデルに適用し、求められた散乱波の寄与分布に基づいて、地震応答が生じるメカニズムについて検討した。その結果、起伏の谷や頂上などの点が示す特徴的な応答関数は散乱波の寄与から解釈することができること、散乱波の寄与は散乱波の発生地点の地表面の法線方向とこの地点から地震応答を考える地点への方向との関係、及び両地点の距離の二つのファクターによって影響を受けることなどを指摘した。

なお、藤原等¹⁷⁾⁻¹⁹⁾は局所的な不規則性を持つ成層地盤を鉛直境界で切り分けて境界要素法を適用し、同一境界上に位置する点同士のグリーン関数から「透過作用素」と「反射作用素」を、また、互いに向かい合う境界上の点同士のグリーン関数から領域内を左右に伝播する「入射作用素」を導き、それらのべき乗の和で波動場を表す手法を展開しており、その手法は波動場をノイマン級数に展開する点で本論文の手法と類似性を持つ。しかし、藤原等が上記の手法によって堆積盆地内を往復する波動(主に表面波)を反射回数ごとに分解しているのに対して、本研究では地表面に対する境界要素行列について平坦な形状からの摂動を取って直接級数展開しており、得られる結果も地表面の起伏に

よって生じる散乱波の性質に関するものである。このように、両者の解析手法と得られる知見はともに互いに異なっている。

2. 境界要素-摂動解法の定式化

(1) 境界積分方程式の導出²²⁾⁻²⁴⁾

図-1のような、地表面に起伏のある均質な半無限地盤における二次元 SH 波動場を考える。このとき、弾性体内の任意の点 $\mathbf{X} = (x, z)$ で次式の波動方程式が成り立つ。

$$\nabla^2 U(\mathbf{X}, t) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $U(\mathbf{X}, t)$ は点 \mathbf{X} 、時間 t における SH 波の変位、 β は S 波速度である。変位場 $U(\mathbf{X}, t)$ を

$$U(\mathbf{X}, t) = u(\mathbf{X}) \exp(i\omega t) \quad (2)$$

とおくと、振動数領域の方程式として、次のようなヘルツホルム方程式が得られる。

$$\{\nabla^2 + k_\beta^2\} u(\mathbf{X}) = 0, \quad k_\beta = \omega/\beta \quad (3)$$

ここで、 ω は角振動数、 k_β は S 波の伝播方向の波数、 i は虚数単位である。なお、以降では簡単のため、時間項 $\exp(i\omega t)$ を省略する。

式(3)に二回微分可能な関数 $u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を掛けて領域 Ω 上で積分すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega} \{\nabla^2 u(\mathbf{X}) + k_\beta^2 u(\mathbf{X})\} u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\Omega(\mathbf{X}) = 0 \quad (4)$$

ここで、式(4)にグリーンの定理を適用し、さらに、関数 $u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ として次の微分方程式

$$\{\nabla^2 + k_\beta^2\} u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (5)$$

の解を選ぶと、弾性体内の任意の点 \mathbf{Y} に対して次式の境界積分方程式が得られる。

$$u(\mathbf{Y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) u(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) q(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = 0 \quad (6)$$

ここで、 Γ は領域 Ω を周回する積分路、 $q(\mathbf{X})$ は境界 Γ 上の点 \mathbf{X} における外向き法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ に関する $u(\mathbf{X})$ の微分

$$q(\mathbf{X}) = \frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} \quad (7)$$

である。また、基本解 $u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 、 $q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_\beta r) \\ q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{\partial u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} \\ &= \frac{ik_\beta}{4} H_1^{(2)}(k_\beta r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで r は二点 \mathbf{X} 、 \mathbf{Y} の距離、 $H_\nu^{(2)}$ は第 2 種 ν 次ハンケル関数である。

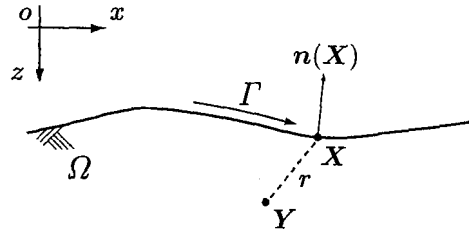


図-1 地盤モデルと座標系

下方から自由表面へ地震波が入射するものとする。式(6)において、点 \mathbf{Y} を領域 Ω の内部から Γ 上へ移動させると、境界上の変位 $u(\mathbf{X})$ が満たすべき境界積分方程式が次式のように得られる²³⁾。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{Y})u(\mathbf{Y}) + \text{v.p.} \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) u(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) q(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = v(\mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $v(\mathbf{Y})$ は境界 Γ 上の点 \mathbf{Y} における入射波による変位、 $c(\mathbf{Y})$ は境界の \mathbf{Y} における形状によって決まる値であり、境界が滑らかであるとき $1/2$ である。また、v.p. は $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ の場合の特異点について主値積分によって積分値を評価することを表す。

なお、本研究では境界が自由表面 ($q(\mathbf{X})=0, \mathbf{X} \in \Gamma$) だけであるため、式(9)は次式のように簡略化される²²⁾⁻²⁴⁾。

$$c(\mathbf{Y})u(\mathbf{Y}) + \text{v.p.} \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) u(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = v(\mathbf{Y}) \quad (10)$$

(2) 一定要素を用いた境界積分方程式の離散化²⁰⁾⁻²⁴⁾

本研究では境界積分方程式を一定要素を用いて離散化を行った。境界 Γ を J 個の境界要素 Γ_j ($j = 1, \dots, J$) で分割、近似する。さらに、一つの境界要素 j 上の変位は一定値をとるものと見なし、この値を境界要素 j の中点の変位 $u(\mathbf{X}_j)$ で代表させる。これらの近似によって、式(10)の境界積分を離散化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{Y}_j) + \sum_{m=1}^J u(\mathbf{X}_m) \int_{\Gamma_m} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_j) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^J u(\mathbf{X}_m) h'_{jm} = v(\mathbf{Y}_j) \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)に含まれる h'_{jm} は基本解 $q^*(\cdot)$ の境界積分で表される項であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h'_{jm} &= 2 \int_{\Gamma_m} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_j) d\Gamma(\mathbf{X}) + \delta_{jm} \\ &= 2 \int_{\Gamma_m} \frac{ik_\beta}{4} H_1^{(2)}(k_\beta r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} d\Gamma(\mathbf{X}) + \delta_{jm} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 δ_{jm} はクロネッカーのデルタである。式(11)、(12)の積分は前述のように、 $j = m$ のときには主値積分であるが、一定要素を用いた境界要素法では $\partial r / \partial \mathbf{n} = 0$

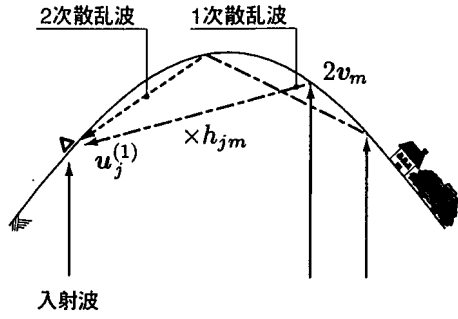


図-2 着目点 (Δ) に入射する入射波 $u^{(0)}$ と 1 次散乱波 $u^{(1)}$, 2 次散乱波 $u^{(2)}$

より主値積分の値が 0 となるため、次式が成り立つ。

$$h'_{jj} = \delta_{jj} = 1 \quad (13)$$

結局、式 (11) は次式のような連立一次方程式の形に表すことができる²²⁾⁻²⁴⁾。

$$v = \frac{1}{2} H' u \quad (14)$$

ここで、 u は全ての境界要素の応答変位 $u(X_j)$ を、 v は入射波による変位 $v(X_j)$ の節点値を並べた J 次元ベクトル、また、 H' は式 (12) の h'_{jm} を要素とする $J \times J$ 次元の正方行列である。

式 (14) の連立一次方程式を解いて未知の節点変位 u の (数値的) 厳密解を得るのが通常境界要素法の解法である。以降ではこの解法による解を「厳密解」と称する。

(3) 摂動解法を用いた近似解の導出

一般に正方行列 A の逆行列は、 $A = E - T$ なる正方行列 T を用いて式 (15) のように級数展開することができる²⁵⁾。ここで E は単位行列である。

$$A^{-1} = (E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad (15)$$

式 (15) はノイマン級数と呼ばれ、 T のノルムに関する次式の条件下で成り立つ²⁵⁾。

$$\|T\| < 1 \quad (16)$$

ここで行列のノルムとは w ($w \neq 0$) に対して

$$\|T\| = \max \frac{\|Tw\|}{\|w\|} \quad (17)$$

で定義され²⁶⁾、その行列との積によってベクトルが「増幅される最大の倍率」を表す。具体的には、非エルミット行列 T に対してそのノルムは $T^H T$ の最大の固有値の平方根として求めることができる。ここで H は共役転置を表す。

式 (14) 中の境界要素行列 H' に対して次式を満たす新たな正方行列 H を導入する。

$$H' = E - H \quad (18)$$

なお、 H の各要素は式 (12)(18) から次式で与えられる。

$$h_{jm} = -2 \int_{\Gamma_m} \frac{ik_{\beta}}{4} H_1^{(2)}(k_{\beta}r) \frac{\partial r}{\partial n(X)} d\Gamma(X) \quad (19)$$

また、式 (13) より H の対角成分は全て 0 である。

式 (14) に式 (15) の関係を適用すると、未知の節点変位 u の級数解が得られる。

$$\begin{aligned} u &= (E - H)^{-1} 2v \\ &= (E + H + H^2 + \dots) 2v \\ &= u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $u^{(\nu)}$ は次式で与えられる。

$$u^{(\nu)} = H^{\nu} 2v, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

このとき、式 (20) の右辺第一項 $u^{(0)}$ は入射波の複素振幅 v と単位行列 E を掛けて 2 倍したもので、つまり入射波のみによって自由表面で生じる応答変位そのものである。また、第二項の j 成分 $u_j^{(1)}$ は次式のように表される。

$$u_j^{(1)} = 2 \{h_{j1}, \dots, h_{jm}, \dots, h_{jJ}\} \{v_1, \dots, v_m, \dots, v_J\}^T \quad (22)$$

ここで、式 (22) 中の $2h_{jm}v_m$ に着目すると、これは m 節点における入射波による変位 $2v_m$ が h_{jm} 倍されて j 節点の応答 $u_j^{(1)}$ に現れることを示している (図-2 参照)。また、 h_{jm} では式 (19) に見るように、 m 節点から j 節点への波動伝播がハンケル関数 $H_1^{(2)}(k_{\beta}r)$ (r は m 節点と j 節点の距離) で表現されている。従って、 $2h_{jm}v_m$ は入射波によって m 節点で生じた円筒波が伝播して j 節点に与える振幅を表しており、 m 節点で反射した後は j 節点に至るまでの間の反射を表す項は含まれていない。このことから、第二項は一旦地表面で反射した波動が途中で反射することなく再び地表面に現れる波動 (一次散乱波) を表すものと考えることができる。右辺第三項以降についても、たとえば右辺第三項では $H^2 2v = H(H 2v)$ のように表されることを考えると、右辺第二項の場合と同様に、一次散乱波として入射した波動が地表面で反射して再び地表面に現れる波動 (二次散乱波) を表すものと考えることができる。このように、級数解の各項は反射回数ごとの各節点の応答変位であると考えることができる。なお、上記の級数の次数と反射回数の関連付けの考え方は藤原等¹⁷⁾⁻¹⁹⁾ の考え方と同様である。

また、式 (19) に示されるように、式 (20) の級数解では散乱波の振幅を陽な形で表すことができる。すなわち、それぞれの境界要素から着目点に至るまでの幾何減衰項を含む波動関数である $H_1^{(2)}(k_{\beta}r)$ と両者の位置関係が振幅に与える影響を表す項 $\partial r / \partial n(X)$ との二つの要因を用いて散乱波の振幅を直接論じることができ、このことが本級数解法の最大の利点である。

ところで、式(20)の級数解では行列の積を繰り返し求めることになるため、起伏が小さく級数の収束が早い場合や離れた要素からの小さな寄与を無視しながら積を計算するなどの工夫をする場合を除いて、計算量は逆行列を求める場合よりも多くなる。本級数解の利点は地震応答を反射回数ごとの散乱波の変位に分解できることとともに、散乱波の性質を式(19)の被積分関数に基づいて解析的に検討できることにあり、迅速な地震応答の評価のみを目的とする場合には通常解法の方が有利であろう。

(4) 着目点の応答に寄与する散乱波の分布

式(20)中の H^ν の jm 要素は j 節点(以降では着目点と称する)に対する境界要素 m からの ν 次散乱波の寄与を表しており、その寄与量 $(H^\nu)_{jm}$ を比較することによって地盤の応答に与える起伏の影響とそのメカニズムを検討することができる。ここで、 $(H^\nu)_{jm}$ は H^ν の jm 成分を表す。しかし、 H では境界要素の長さによってその要素に入射する波動のエネルギーが変化するため、 H^ν の要素の単純な比較によって散乱波の寄与量を論じることはできない。また、起伏の高さに伴って変化する入射波の位相の違いも考慮に入れて寄与を検討する必要がある。このため、各境界要素からの散乱波の寄与の検討には、 $(H^\nu)_{jm}$ を境界要素の長さ dL_m で除し、入射波の複素振幅 v_m をかけて求めた単位長さ当たりの寄与量 $(\overline{H^\nu})_{jm}$

$$(\overline{H^\nu})_{jm} = (H^\nu)_{jm} \frac{v_m}{dL_m} \quad (23)$$

を用いた。

3. 数値解析例と考察

(1) 地形モデル

本研究で用いた地形モデルを図-3に示す。地形モデルは長さ45m、振幅5m、1.5波長分の正弦波形の起伏を中央に配置し、それ以外は平坦である。また、S波速度 β を100m/sとした。境界は起伏部分を $dL=0.5\sim 0.7$ m(x 軸方向に0.5m刻みとしたため要素の傾斜によって異なる)、隣接する平坦部分(地盤モデル中央部から ± 200 m)を $dL=2.5$ m、200m以上を $dL=10$ mで離散化し、 $x=\pm 600$ mまでをモデル化した。

本研究では地表面の振動特性を考えるため、図-3に示す代表的な5つの地点(A~E点)を着目点として選び、単位振幅の平面波を鉛直下方から入射させて、地表面の応答関数、散乱波の寄与分布を検討した。

(2) 厳密解法から得られる応答関数

図-4に式(14)の連立方程式を解いて求めたA~E点の応答関数(絶対値)の厳密解を示す。なお、ここで言う「厳密解」とは、前述のように式(14)の連立一次

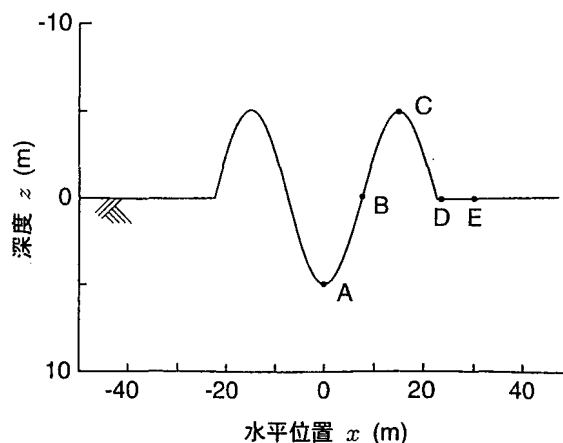


図-3 本研究で用いた地形モデルと着目点A~E

方程式を通常解法で解いた数値解の意味で用いており、数値誤差が含まれたものである。しかし、要素長さなどは扱う波動の波長を考慮して設定されており、妥当な結果が得られているものと考えている。図-4を見ると、0.5Hz程度以下の低振動数帯では、各点での応答振幅はほぼ2を示すことがわかる。これは直感的には、低振動数の場合、入射波の波長が地形の起伏の高さと比べて十分に長いため、入射された波動が地形の起伏の影響をほとんど受けずに反射されるためであると解釈されるが、3.5(5)b節ではこれを散乱波の寄与分布に基づいて論じる。その他の振動数では、均質地盤にも拘らず各点での応答振幅は0~4程度の範囲にあり、地形の影響は無視できないものと考えられる。また、極大値を示す振動数は着目点によって異なることがわかる。

起伏の頂上のC点の応答に注目すると、振動数が0~10Hz程度の比較的広い範囲で、他点と比べて応答振幅が大きく、一般に起伏の頂上付近では振動数の違いによらずに揺れやすいことが認められる。

一方、C点以外の着目点では、最大応答はC点よりも小さいものの、振動数に対する変化が著しく、応答振幅が0近くまで減少する振動数が存在することが特徴的である。

(3) 厳密解法と級数解法による振幅分布の比較

図-5は地形モデルの水平座標を横軸、応答振幅を縦軸とした振幅分布(絶対値)である。図-5(a)、(b)はそれぞれ、A点の応答振幅が極小値を示す振動数2Hzと極大値を示す振動数3.5Hz(図-4参照)における振幅分布である。太実線は厳密解、太破線は入射波のみによる応答振幅 $u^{(0)}$ 、また、細実線、細破線、一点鎖線は式(20)による級数解で、それぞれ入射波と1次散乱波($u^{(0)}+u^{(1)}$)、入射波と1次、2次散乱波($u^{(0)}+u^{(1)}+u^{(2)}$)、入射波と1次~3次散乱波($u^{(0)}+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$)の応答振幅を重ね合わせた振幅を示す。地盤が均質であ

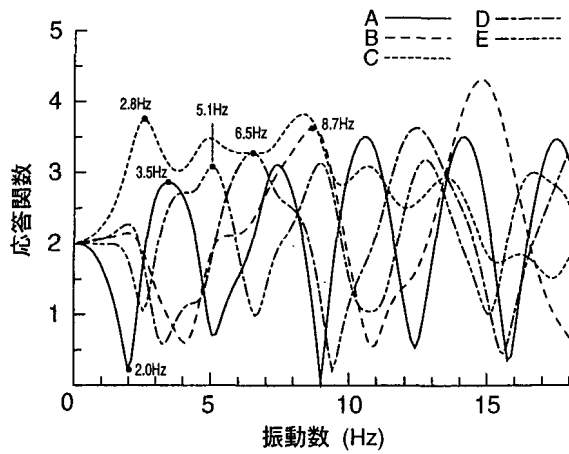


図-4 平面波の鉛直入射に対する A~E 点の応答関数

るため入射波のみによる応答振幅 ($u^{(0)}$) は一様に 2 である。

厳密解と級数解を比較すると、入射波と 1 次散乱波を重ね合わせた級数解 (細実線) によっても厳密解 (太実線) の形状の特徴は捉えられているものの、値には比較的大きい差異が見られる。しかし、2 次、3 次の高次散乱波を重ね合わせるにより近似が良くなり、ほぼ厳密解に近い結果が得られることがわかる。また図-5(a) と比べて、図-5(b) では応答振幅が極大・極小を示す地点が多く見られる。平坦部分におけるこれらの極大値 (あるいは極小値) を示す地点の間隔は、入射波の波長 (約 29 m) とほぼ同じ値になっており、起伏によって散乱されて水平方向に伝播する波動と入射波とが重なり合うためにこのような振幅分布を示すことがわかる。このため、振動数が高くなるほど、より複雑な振幅分布を示している。

なお、起伏の頂上付近は大きい応答振幅を示しており、この図からも頂上 (横軸上で ±15 m の位置) 付近が揺れやすいことが分かる。

(4) 近似解の収束性

級数解の収束性を示す量として、次式に示す各次数の散乱波による変位の地表面の単位長さ当たりの平均パワー S_ν を算定した。

$$S_\nu = \frac{1}{L_\Gamma} \sum_{m=1}^J \left| u_m^{(\nu)} \right|^2 dL_m \quad (24)$$

ここで、 ν は散乱波の次数、 L_Γ は境界 Γ の長さである。

図-6 は散乱波の各次数に対して、 S_ν をプロットしたものである。図中の振動数は各着目点での応答振幅が極大となる振動数である (図-4 参照)。この図から、1 次や 2 次などのごく低次の散乱波のパワーが大きいことがわかる。そして 2 次以上では、 S_ν がほぼ直線的に減少しており、次数 ν の増加に対して指数関数的に減

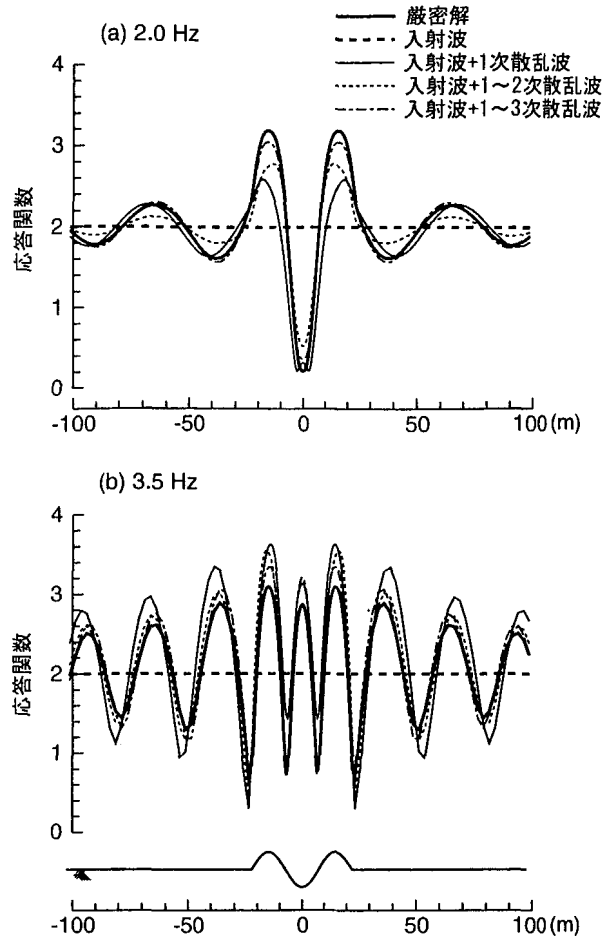


図-5 厳密解と級数解の比較 (点 A)

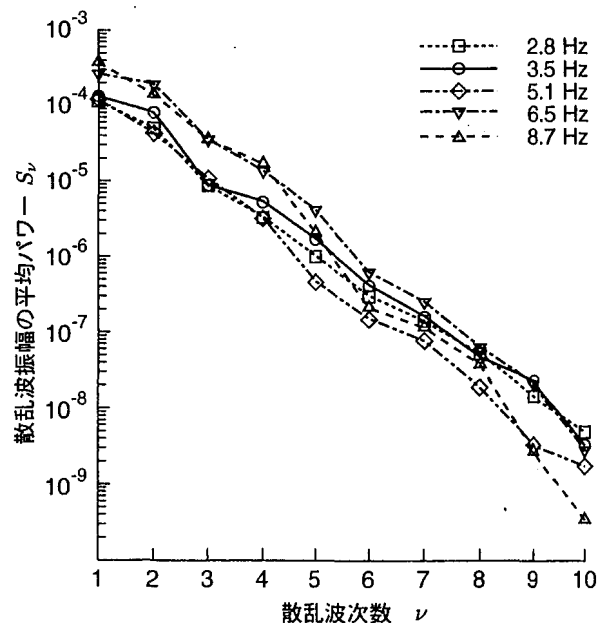


図-6 点 A~E の各点での応答関数が極大値を示す振動数における散乱波振幅の平均パワー S_ν

少することがわかる。このことから、本地形モデルにおいては式(20)の級数解の最初の数次の散乱波によって応答振幅を近似できることがわかる。なお、収束の条件はノルムに基づく式(16)で与えられるため、収束する地点と収束しない地点が混在することはない。また、本節のような級数の収束に関する議論においては、ノルムに基づいた定量的な検討が可能である。さらに、散乱波の寄与などの波動論的な現象とノルムの関係は非常に興味深いテーマであると考えられる。しかし、現在、両者の波動論的な関係については未検討であるため、現時点ではノルムを求めても収束性の判断以上の有益な議論を行うことができない。また、収束性はノルムによるまでもなく図-5や図-6から判断できるため、本研究ではノルムの計算を行っていない。今後、両者の関係について理論的な検討を進めていきたい。

(5) 各着目点に対する散乱波の寄与分布

a) 応答関数が極大値を示す振動数における散乱波の寄与分布

図-7(a)~(e)は着目点A~Eそれぞれでの応答振幅に対する1~3次の散乱波の寄与 $\overline{H^v}$ (式(23))、ならびにそれらを重ね合わせた散乱波全体の寄与を示したものである。振動数はそれぞれの着目点(A~E)での応答関数が極大値を示すときのものである。図の横軸は、着目点(式(23)中のj節点)での応答振幅に寄与する散乱波の波源となる点(同m節点)の位置の水平座標、縦軸はその振幅である。ただし、入射波として単位振幅の平面波が鉛直入射する場合を扱っており、図中の実線と破線はそれぞれ、着目点での入射波の振幅が最大振幅1となるときの散乱波の振幅の実部と虚部を示す。本研究ではこの分布を散乱波の寄与分布と称する。なお、図中、着目点自身からの一次散乱波の寄与は0となっているが、これは式(13)より、式(23)における $(H^v)_{jj}$ が0であるためである。

図-7(a)は3.5HzにおけるA点に対する散乱波の寄与分布を示す。この図から、A点では隣の山部分、特に起伏の頂上部分よりもA点から見て外側の斜面部分(図中1)からの散乱波の寄与が大きいことがわかる。これは、地表面上の点Xから着目点Yへのベクトル $\mathbf{Y}-\mathbf{X}$ と山部分の外側斜面部分の法線ベクトル \mathbf{n} の向きとの関係が平行に近いために、式(19)の $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ の値がこの部分で大きくなるためである。またA点近傍(図中2)からの散乱波の負の寄与が大きい、これは2.(4)節で指摘したように両点の距離が短く幾何減衰の影響が小さいため $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ 自体が大きく、かつ、 $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ が負となるためである。なお、着目点近傍からの寄与は、散乱波の伝播距離が小さく伝播による位相の変化が極めて少ないため、散乱波の波長(或い

は振動数)にあまり依存しないものとなる。

図-7(b)は8.7HzにおけるB点に対する散乱波の寄与分布を表す。この図から、B点には右の山の頂上部分から外側の斜面部分にかけて(図中1)、及び中央の谷部分から左の頂上部分までの部分(図中2)からの散乱波の寄与が大きいことがわかる。これは、両者共に $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ の値が大きいためと考えられる。なお、図中2の部分とB点は間に谷があるため、この散乱波はこの部分を回折してB点に寄与を与える。一方、A点の場合と異なり着目点(B点)近傍(図中3)からの寄与は全ての次数で小さくなっている。これはB点とB点近傍の距離は短いものの、B点近傍の地形が直線的であるため、 \mathbf{n} と $\mathbf{Y}-\mathbf{X}$ がほぼ直交し、 $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ が小さくなるためである。同じ理由で起伏の両側の平坦部分(図中4)からの一次散乱波の寄与は全く生じない。

図-7(c)は2.8HzにおけるC点に対する散乱波の寄与分布を表す。この図からC点は、C点が位置する山部分の地表面の広い範囲(図中1)から強い寄与を受けていることがわかる。特に一次散乱波の寄与分布の形状は正負が逆であるがA点の場合のそれと類似している。これは、A点が谷に位置するのに対してC点が山の頂上に位置するため、 $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ の符号は正負が逆になり、かつ、 $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ の値は同じ分布を示すためである(2.(4)節参照)。また、平坦部分(図中2)や左の山部分(図中3)から回折してC点に到達する散乱波の寄与も認められ、起伏のある地盤における波動伝播は波線論的に論じるだけでは不十分であることがわかる。

図-7(d)は6.5HzにおけるD点に対する散乱波の寄与分布を示す。この図から、D点には起伏のD点近傍(図中1)からの散乱波の寄与が非常に大きいことがわかる。これはD点が起伏に隣接した平坦部分に位置するため、起伏を構成する地表面のD点近傍では $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ の値とともに、 $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ が大きくなるためである。しかし、散乱波の波源が境界上を頂上方向へD点から離れていくのに従って、D点と起伏との位置関係によって $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ の値だけでなく $\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})$ の値が急速に小さくなるため、D点のごく近傍からの散乱波の寄与が鋭いピークを示すものと考えられる。一方、平坦部分(図中2)からは、地表面の平坦部分に着目点がある($\partial r/\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})=0$)ため一次散乱波は全く生じず、わずかに高次の散乱波の寄与が認められる程度である。また、D点に向かい合った位置にある中央の谷部分から右側の山部分までの斜面(図中3)からの散乱波の寄与が比較的大きい値を示すことは他の着目点と同じ傾向である。

図-7(e)は5.1HzにおけるE点に対する散乱波の寄与分布を表す。E点は起伏から比較的離れた平坦部分($x=32.5\text{m}$)にあるものの、依然として起伏のある部分からの散乱波の影響が強いことがわかる。1~3次散

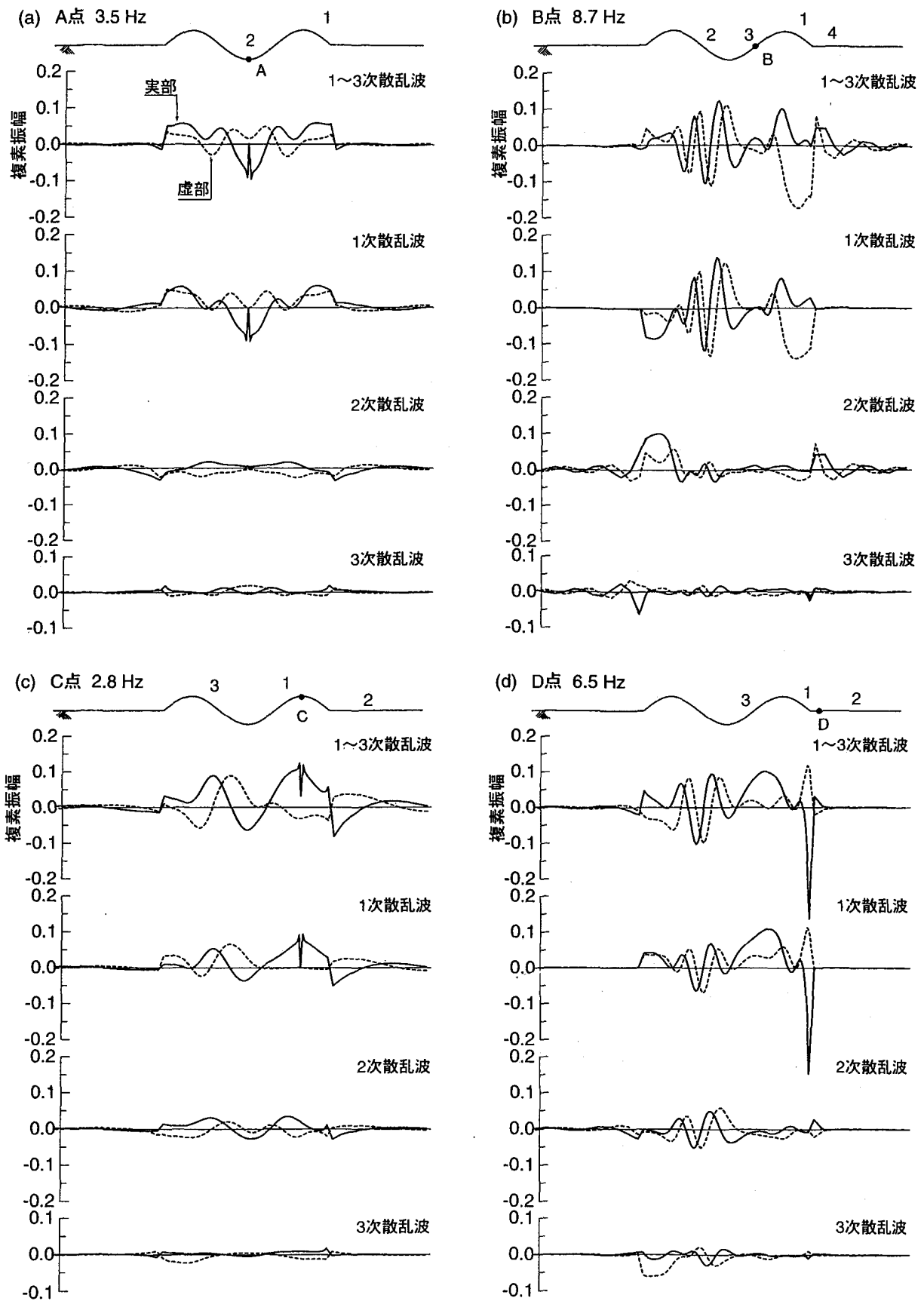


図-7 応答関数が極大値を示す振動数における散乱波の寄与分布

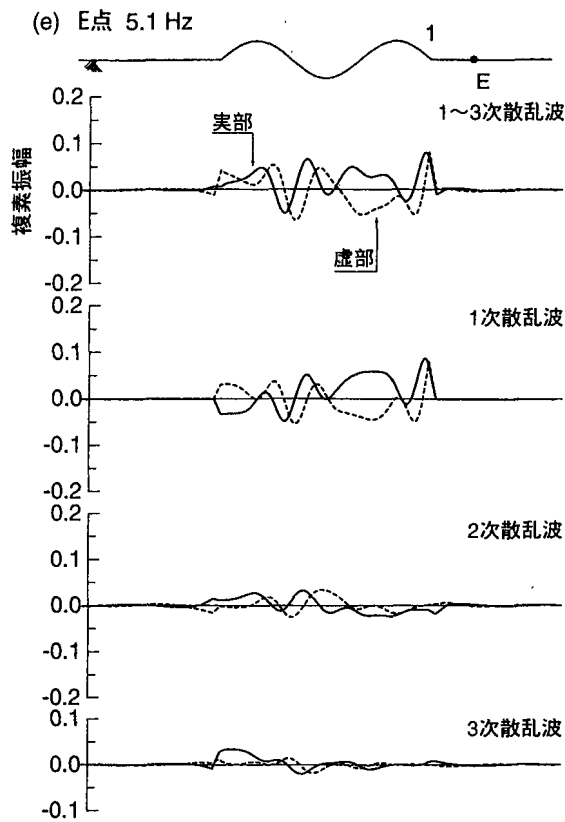


図7 応答関数が極大値を示す振動数における散乱波の寄与分布 (つづき)

乱波の寄与分布はD点の場合と似た形状を示しているものと考えられるが、起伏の部分の縁(図中1)からの寄与は、D点の場合と比べて着目点との距離が大きいため鋭いピークは現れないことがわかる。

A~Eのどの着目点においても、1, 2次散乱波の寄与が3次以上の高次の散乱波と比べて大きい値を示すことがこれらの寄与分布からもわかる。また、平坦部分には起伏による散乱波の寄与が認められ、起伏が局所的なものであってもその周囲の平坦部分をも含めた広い範囲の地震動に影響を与えることがわかる。

b) 低振動数ならびに応答関数が極小値を示す振動数における散乱波の寄与分布

本節では、着目点をA点とし、応答振幅がほぼ2となる低振動数(0.5 Hz)と応答振幅が極小値を示す振動数(2 Hz)の場合(図-4参照)について散乱波の寄与分布を検討する。

図-8(a)は0.5 Hzの場合の散乱波の寄与分布を示す。この図から、A点の周囲の谷の部分(図中1)と山部分より外側の斜面部分(図中2)から1次散乱波が生じていることがわかる。一方、2次散乱波や3次散乱波の寄与は小さい。これらのことから、応答振幅がほぼ2となる場合であってもごく低次の散乱波が生じる場合があることがわかる。しかし、1次散乱波の振幅分布は正

負ほぼ等しく生じた結果、これらの散乱波を足し合わせると打ち消し合っほぼ0となり、A点の応答振幅がほぼ2になったものと理解できる。

図-8(b)はA点の応答関数が極小値を示す振動数2 Hzにおける散乱波の寄与分布を示す。この図を見ると、A点周辺(図中1)の一次散乱波の寄与は3.5 Hzの場合と類似している(前述のようにこの部分からの寄与はあまり振動数に依存しない)が、頂上の外側の斜面部分(図中2)の寄与がこの振動数では負となるため散乱波全体の振幅が大きな負値となり、これが入射波の振幅と打ち消し合うために、A点の応答関数が極小値を示すことがわかる。逆に、このように入射波を打ち消すような大きな負値の散乱波は、着目点周囲からの寄与が常に正となる頂上付近では生じにくく、このために、C点の応答関数にはあまり明瞭な落ち込みが現れないものと考えられる。

4. 結論

本研究では境界要素法と摂動解法を組み合わせた、地表面に起伏のある地盤の地震応答解析手法を展開した。以下に得られた知見を列挙する。

- 1) 振動数領域における境界要素法によって得られる連立一次方程式の係数行列(境界要素行列)をノイマン級数に直接展開する摂動解法を示した。
- 2) 本手法によって得られる級数解によって、地表面での地震応答を入射波と境界の各点からの次数ごとの散乱波の寄与とに分解することができる。
- 3) 本手法によって、それぞれの境界要素から着目点に至るまでの幾何減衰を含む波動関数である $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ と両者の位置関係が振幅に与える影響を表す項 $\partial r / \partial n(\mathbf{X})$ の二つのファクターを用いて散乱波の振幅について論じることができる(式(19)参照)。
- 4) 本手法の有効性を示すために、1.5波分の正弦波の形状の地表面を有する地形モデルに適用し、地表面の応答関数や散乱波の寄与分布について考察を加えた。
- 5) 本手法によって得られる級数解は本地形モデルにおいては急速に収束し、ごく低次の級数項で厳密解とほぼ等しい近似解が得られることを確認した。そして、1次散乱波、2次散乱波などのごく低次の散乱波の寄与が地盤の応答振幅に顕著な影響を与えることを示した。
- 6) 起伏の谷の部分では、この点に向かい合った外側の斜面部分からの散乱波の寄与が大きい。これは、この部分の地表面の法線の方向と着目点への方向との関係から $\partial r / \partial n(\mathbf{X})$ の値が大きいためである。
- 7) 起伏の頂上や谷底では、これらの点の周囲の部分

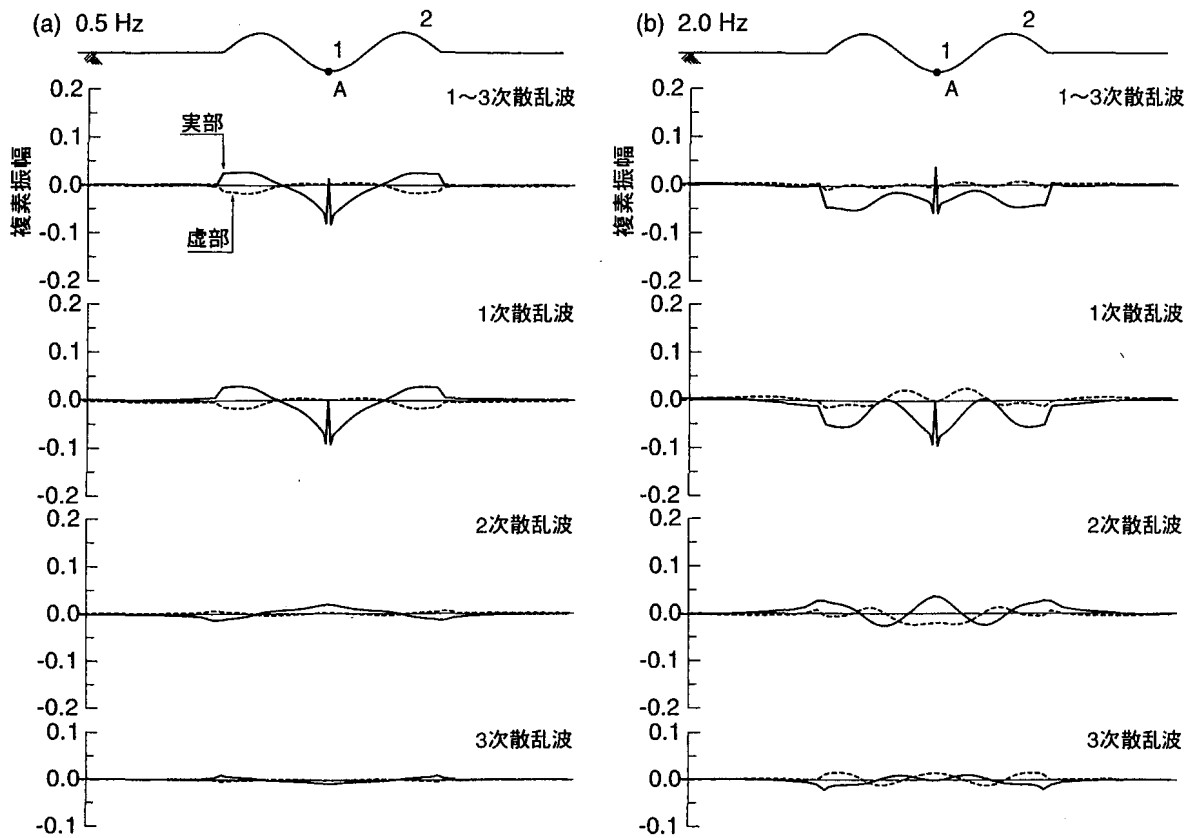


図-8 A点への散乱波の寄与分布 (a) 0.5 Hz, (b) 2.0 Hz

からの散乱波の寄与も大きい。これは散乱波の発生地点と着目点の距離 r が短いため幾何減衰の影響が小さく、波動関数 $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ 自体が卓越するためである。また、この寄与は2点間の距離 r が影響しないため、振動数にあまり依存しない。

- 7) 一方、着目点が起伏の中腹部分にある場合、着目点の周囲からの寄与は殆ど生じない。これは、この部分の地形が直線的な形状であるため、 $\partial r / \partial n(X)$ がほぼ0となるためである。
- 8) 平坦部分には起伏のある部分からの散乱波の寄与が広い範囲で生じる。すなわち、起伏によってその周囲の平坦部分をも含めた範囲の地震動が影響を受ける。

謝辞： 本研究を遂行するにあたり、独立行政法人原子力安全基盤機構による原子力安全基盤調査研究のご援助を頂いた（研究代表者：岩下和義）。記して深謝の意を表す。

参考文献

- 1) 額縁一起：不整形地盤における地震動，土木学会論文集，No.437/I-17，pp.1-18，1991。
- 2) Boore, D. M. : A note on the effect of simple topography on seismic SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.62, No.1, pp.275-284, 1972.

- 3) Ohtsuki, A. and Harumi, K. : Effect of topography and subsurface inhomogeneities on seismic SV waves, *Earthq. Engng. Struct. Dyn.*, Vol.11, pp.441-462, 1983.
- 4) 上杉真平，大津政康：境界要素法における半無限弾性体における二次元波動場の解析，土木学会論文集，No.374/I-6，pp.457-465，1986。
- 5) Takemiya, H. and Fujiwara, A. : SH-wave scattering and propagation analyses at irregular sites by time domain BEM, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.84, No.5, pp.1443-1455, 1994.
- 6) Bouchon, M., Schultz, C. A. and Toksöz, M. N. : Effect of three-dimensional topography on seismic motion, *J. Geophys. Res.*, Vol.101, No.B3, pp.5835-5846, 1996.
- 7) Aki, K. and Larner, K. L. : Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident SH waves, *J. Geophys. Res.*, Vol.75, No.5, pp.933-954, 1970.
- 8) Bard, P. Y. and Bouchon, M. : The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.70, No.4, pp.1263-1286, 1980.
- 9) 清野純史，土岐憲三，佐藤忠信：AL法の確率応答計算への拡張とその地盤震動解析への応用，土木学会論文集，No.513/I-31，pp.179-190，1995。
- 10) 片岡俊一，大町達夫：盆地内のやや長周期地震動の簡便な推定手法，土木学会論文集，No.675/I-55，pp.63-71，2001。
- 11) 原田隆典，黒田拓氏，大角恒雄：3次元直接境界要素法による震源断層-不整形地盤系の応答解析と震源断層近傍地震動の渦現象，第26回地震工学研究発表会講演論文集，Vol.1，pp.517-520，2001。

- 12) 小牧昭三, 毎熊輝記, 音田功: 崖の近傍における振動特性—SH波による実験—, 第7回自然災害シンポジウム, pp.45-48, 1970.
- 13) 茂木秀則, 川上英二: 不整形地盤におけるSH波の入射境界増幅率と分布入射波平均増幅率, 土木学会論文集, No.605/I-45, pp.91-103, 1998.
- 14) Trifunac, M. D. : Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.61, No.6, pp.1755-1770, 1971.
- 15) Ishii, H. and Ellis, R. M. : Multiple reflection of plane SH waves by a dipping layer, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.60, No.1, pp.15-28, 1970.
- 16) 丹羽義次, 廣瀬壮一: 傾斜層を有する地盤における理論的地震動解析, 土木学会論文報告集, No.337, pp.57-66, 1983.
- 17) Fujiwara, H. and Takenaka, H.: Calculation of surface waves for a thin basin structure using a direct boundary element method with normal modes, *Geophys. J. Int.*, Vol.117, No.1, pp.69-91, 1994.
- 18) 藤原広行, 竹中博士: 堆積盆地内で発生する表面波, 第9回日本地震工学シンポジウム, Vol.1, pp.469-474, 1994.
- 19) Hatayama, K. and Fujiwara, H. : Excitation of secondary Love and Rayleigh waves in a three-dimensional sedimentary basin evaluated by the direct boundary element method with normal modes, *Geophys. J. Int.*, Vol.133, No.2, pp.260-278, 1998.
- 20) 中川克也, 北原道弘, 浜田政則: 3次元弾性波動問題への積分方程式法の応用, 境界要素法研究会, 第1回境界要素法シンポジウム, pp.163-168, 1984.
- 21) 小林昭一: 積分方程式法(境界要素法)の発展, 土木学会論文集, No.350/I-2, pp.9-22, 1984.
- 22) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 計算力学とCAEシリーズ2 境界要素法, 培風館, 1991.
- 23) 加川幸雄: 開領域問題のための有限/境界要素法, サイエンス社, 1983.
- 24) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 25) 加藤敏夫: 行列の摂動, 丸山徹訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.
- 26) 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学, 共立出版, 1997.

(2004. 4. 9 受付)

BOUNDARY ELEMENT-PERTURBATION METHOD USING NEUMANN SERIES EXPANSION FOR SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF THE GROUND WITH IRREGULAR SURFACE

Hidenori MOGI, Hideji KAWAKAMI and Koji FUKUHARA

It has been pointed out that the ground with an irregular surface causes complicated seismic responses. However, the process of generating this complex response is not yet clarified. In this study, boundary element-perturbation method has been developed to investigate scattering of seismic waves due to an irregular surface. This method is based on the boundary element method in frequency domain and perturbation technique employing the Neumann series. By using this method, the ground response can be separated into those induced by incident waves and scattered waves. Numerical results showed that the amplitudes of the scattered waves are affected by both distance and direction of the irregular surface to the observation points.