

岩盤フラクチャーのフラクタル次元と水理特性の相関

Correlations between Seepage Characteristics and Fractal Dimension of Fractures in Rock Masses

さ とう くに あき* いち かわ まさ のり憲**

1. はじめに

岩盤は岩石と割れ目系（節理系）の集合体である。その力学強度や浸透流を考える際、割れ目系の空間構造、密度、開口分布といったものが不規則でかつ複雑なためにこれをどう扱えばよいか、また割れ目系情報をどのようにして定量化し、モデル化すればよいか研究が望まれる。今日までのところ物理モデル（力学的モデル）として、平行間隙モデル、ネットワークモデル、岩塊ブロックモデル、弾性ばねモデルといったものが提案されており、それらの長短に応じた使い方がなされ、いくつかの力学現象の解明に効をあげている。また統計的には割れ長さ、幅、傾斜といった幾何的基本量の分布特性により、それらを用いて岩盤の強度や浸透流の性質の把握がなされ、シミュレーションにも応用される。

一方、現場測定を通して割れ目系の量的把握には従来から走向、傾斜測定によるステレオ投影法や RQD 値といった測定量が用いられて来た。

しかし、いろいろなモデルや現場測定結果を用いて実際の岩盤割れ目系をどのように認識し、どう補えればよいかという本質となると、決定的な答えが見いだせない。その理由の一つは節理や割れ目系の幾何学的性質の本質について統一的な指標がないことに加え、幾何形状（あるいは構造）に対する絶対的な我々の認識が不足している。これも見のがせない。

本報は従来の考え方とは全く異なった最近 B.B. Mandelbrot（マンデルブロー）によって提案されたフラクタル幾何学を岩盤や岩石の割れ目系に応用することによってその幾何的性質を把握し、岩盤浸透流の特性との関係を多くの割れ目系の測定結果より検討したものである。現状では科学的に十分な体系を備える段階に至っていないまでもいくつか興味をもてる結果を得たと思えるのでここにまとめてみたので報告する。

2. 不連続面・割れ目系のフラクタル幾何構造の認識

2.1 幾何図形の認識と非ユークリッドの図形次元

通常、我々の身のまわりにある物の図形は単純な多角形、

円形、曲線形のように特徴的な長さを持ち、かつ性質がはっきりと記述でき得るもの、およびもっと一般的に自然界にある不規則で複雑・多様な、例えば、木の枝ぶり、雲の形、地形といったもののように従来の幾何学の範囲を全く超えた形がある。こういった不規則で複雑に見える物の形は全く手のつけられないものであろうか。B.B. Mandelbrot¹⁾ は必ずしもそうでない事を理論的に説明し、従来の幾何学の常識とは別の観点から図形を解析した。一般的に、こういった幾何形状は微分が定義できない図形であって、物が壊れて不規則な断片になった状態に似ていることからラテン語を引用してフラクタル (Fractal) と呼んだ。フラクタルの解析にはコンピューターが不可欠である。フラクタル幾何学の理論がここ数年来本邦でも知られるようになった新しい数学であるだけに、ここに割れ目系（節理系）の解析に必要な最小限の基礎知識について述べておく。

まず、フラクタルを考える際には幾何的および統計的自己相似に加えてフラクタル次元の概念が基本となる。

我々は日常経験を通して点が 0 次元、直線は一次元、平面は二次元、そして我々の住んでいる空間が三次元であることを知っている。図-1(a)には一辺が等しい立方体を示している。この立方体について、線分 $a''d''$ 、正方形 $ad d'a'$ および立方体 $abcd a'b'c'd'$ に注目して幾何的な次元と相似性を考えてみる。いま、線分 $a''d''$ を 2 等分すると、半分の長さの線分は 2 個となり、同様に正方形 $add'a'$ の線分とそれに直交する線分を $1/2$ すると 4 個の正方形が新たにでき、立方体の場合は 8 個の小立方体ができる。これら 2, 4, 8 個は $2^1, 2^2, 2^3$ とかくことができ、整数指数 1, 2, 3 は図形の経験的次數と一致することになる。もっと一

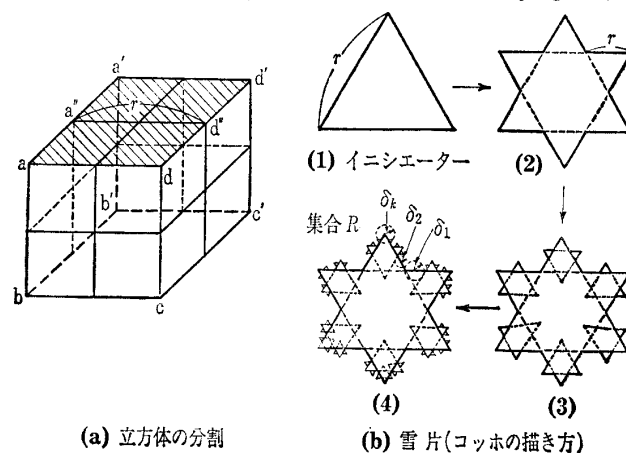


図-1 幾何的自己相似

*埼玉大学助教授 工学部

**東京都

一般的に表すと、ある図形を $1/a$ に縮小した相似図形は a^D 個となり、この指数 D が相似性次元（あるいはトポロジカル次元）と呼ばれる。この場合、線分、正方形、立方体ともに全体はそれと相似ないくつかの要素から作られていることが分かる。この性質は自己相似と呼ばれ、フラクタルを議論する際に基本的に重要な性質である。

もし、 $(1/a)$ 分割（相似比）によって相似図形個数が N となったとすれば、 $N=a^D$ であるから対数をとって、相似性次元 D は

$$D = \frac{\log N}{\log a} \dots\dots\dots(1)$$

と形式化できる²⁾。

次に、この次元 D が整数のみならず非整数になる場合にも拡張できることを証明するため図-1(b)の図形に着目する。この図は一見して雪の結晶に似ており、幾何的形狀は一見複雑でかつ明らかに微分が存在しない。しかしながら、上述した整数の幾何的自己相似の概念を拡張して描くことが可能である。(b)図の作成には初め(1)イニシエーター (initiator) と呼ばれる正三角形を(2)のように重ねると、初めの長さの $1/3$ の辺からなる星形ができ、その初めの正三角形の一边は $1/3$ 縮小して、4個の線分になる。同様のことを(3)、(4)と進めると雪片のような図形が得られる。この場合の相似性次元 D は式(1)から、

$$D = \frac{\log N}{\log a} = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1.262 \dots\dots\dots(2)$$

となることが分かる³⁾。

つまり、式(2)の D は非整数であり、トポロジカル次元（普通の次元）において、「線の次元 $1 < D = 1.262 < 2$ 」となるから直感的に複雑な図形の方が次元が高いという常識にかなっている。これは経験的次元を非整数にまで拡張した画期的な量として注目に値する。

上述の幾何的相似とフラクタル次元は規則的な図形についての概念であったが、このままでは適用範囲は限られるからランダムで不規則な図形にも適用できる次元が必要となる。そのために代表的な Hausdorff (ハウスドルフ)次元 D_h が導入される。この次元の定義は相似性によるものでなく、図-1(b)(4)のように直径 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ の球で外周を覆うことによる。 $D_h > 0$ について、集合 R を直径 $\epsilon > 0$ より小さい球でおおう時、ハウスドルフ測度 $M_{D_h}(R)$ は、

$$M_{D_h}(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \sum_{\delta_k < \epsilon} \delta_k^{D_h} \dots\dots\dots(3)$$

と定義される^{2), 3)}。

測度 (measure) とは長さや面積を一般化した概念であって、一次元測度が長さ、二次元測度が面積、三次元測度が体積を表すから、 D_h 次元は δ^{D_h} に比例すると考えてよい。フラクタル次元 D はハウスドルフ次元 D_h と区別されるが、両者が一致することが確かめられている。したがって、不規則図形のフラクタル次元も求めることができる。

実用的にフラクタル次元を求める方法を高安 (1986) は次のように5つに分類している²⁾。

- ① 粗視化の度合を変える方法
- ② 測度の関係より求める方法
- ③ 相関関数より求める方法
- ④ 分布関数より求める方法
- ⑤ スペクトルより求める方法

フラクタルがどういった図形に対してうまく定義できるかは今日まだ十分に研究が進んでいるわけではない。實際上、地球レベルのスケールの幾何形態から顕微鏡レベルのそれまで大小さまざまに現存するので、それぞれの特性に応じたフラクタル次元を定義する必要が生まれる。

3. 岩盤割れ目系のフラクタル次元

3.1 割れ目系のフラクタル次元の定義

岩盤の割れ目系のフラクタル幾何量を得るために重要なパラメーター指標の一つとなるものがフラクタル次元であることはすでに述べた。Barton (バートン)⁴⁾ は一歩先んじて節理系のフラクタル次元の定義を与え、いくつか実際の現場露頭節理に自己の定義に従ってフラクタル次元を算定した。また、佐藤ら(1986)⁵⁾ は全く独立に節理のフラクタル構造について研究を進めた。

Barton のフラクタル次元 D は次のように定義づけられている。測定された二次元平面上の節理、割れ目系の図上全体を図-2のように一边の長さ η の正方格子網でおおい節理と交差した格子の数 $N(\eta)$ とすると、フラクタル次元 D は、

$$D = -d \log_2 N(\eta) / d \eta \dots\dots\dots(4)$$

とした。

一方、大西・鍵本(1985)^{6), 7)} は同様に

$$D = -\frac{d \log N(\eta)}{d \eta} \dots\dots\dots(5)$$

で定義し、人為的にコンピューターによって発生させた割れ目系のフラクタル次元を求めて $D = 1.625$ と得た。具体的に上式によって D を求めるためには測定された η , $N(\eta)$ を両対数紙上にプロットし、この直線の傾きを求めると、

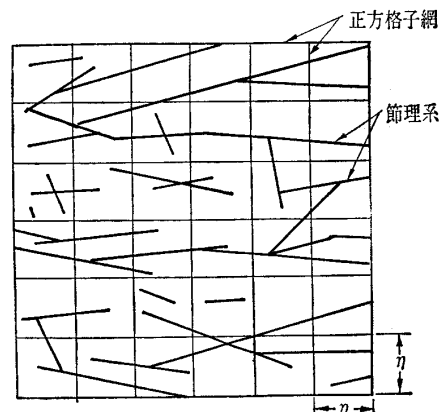


図-2 節理系ネットワーク

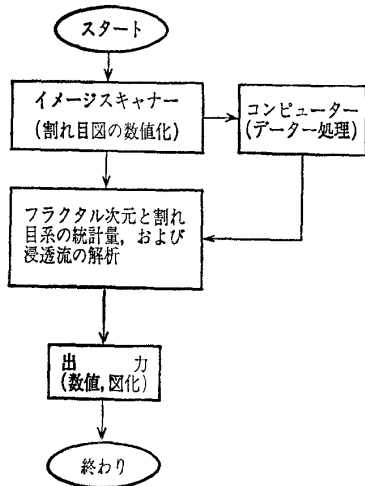


図-3 割れ目の情報処理システム

それがフラクタル次元となる。

実際に、測定された割れ目系、節理の図からフラクタル次元のみならず幾何情報を量的に得るには、図-3に示すようにコンピューターシステムによって行うのが有利である。用意された割れ目系の図（生データをトレースした図）をAD変換（イメージスキャナーの利用）してコンピューターに記憶させておき、フラクタル次元の算定や統計処理を行い、浸透流解析を実行した後に数値化・図化をして出力する⁵⁾。

3.2 いろいろな岩石・岩盤のフラクタル次元

割れ目系と一言でいうものの航空写真で判読されるような大スケールのリニアメントから顕微鏡で測定されるようなマイクロクラックまでスケールは大小様々である。

ここで、このようなスケールの大小にかかわらずフラクタル次元を求めてみることにする。今回解析した節理系および割れ目系は全部で15個であり、中で顕微鏡レベルのデータは6個である。

図-4, 5には現場の節理系と岩石顕微鏡写真から読み取ったマイクロクラックが示されている。両者は対照的に大小スケールが異なっている。これらのフラクタル次元は式(5)によるもので図-6, 7に示したように寸法 η が大きくなると当然ともいえようが、直線からはずれてくる。フラクタル次元はこの直線部の勾配を求めてくると、それぞれ図-4, 5の場合に対応して $D=1.340$, 1.506 となる。すでに述べたように、普通のユークリッド幾何学の感覚からして直線が一次元、平面が二次元であるから、直感的に図-4, 5の割れ目系を見て図-4より図-5の割れ目系の方が割れ目の数、総数とも多いからフラクタル次元は図-5の方が大きい値をもつのはうなづける。このようにフラクタル次元によって従来は量的評価ができなかった割れ目系の最も基本となる複雑さの情報を表現できることは画期的なものと考えられる。次に、浸透流を考える際に大切となる脈絡した有効流路系のみを図-4のデータから解析したものが図-8である。つまり独立した割れ目はすべて除かれたもので割れ目系全体の7割程度に減少している。いう

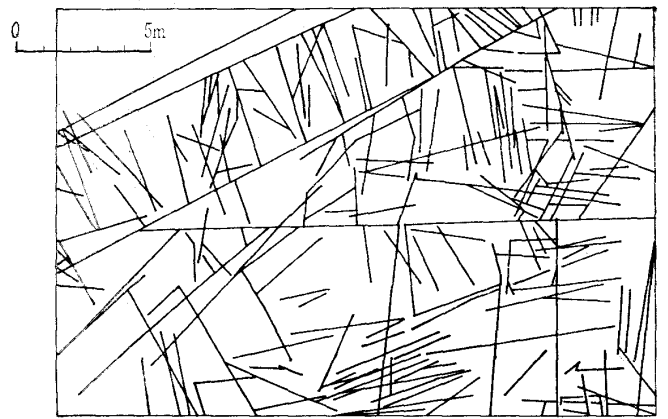


図-4 花崗岩の割れ目系トレース（長野県木曾川上流の寝覚床の露頭より測定）

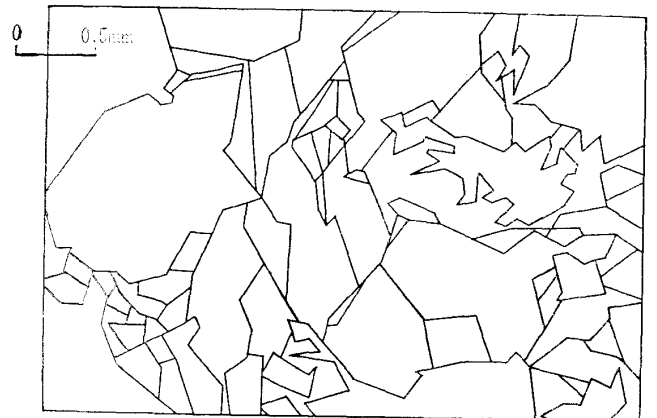


図-5 ベスビアナイトの顕微鏡クラック

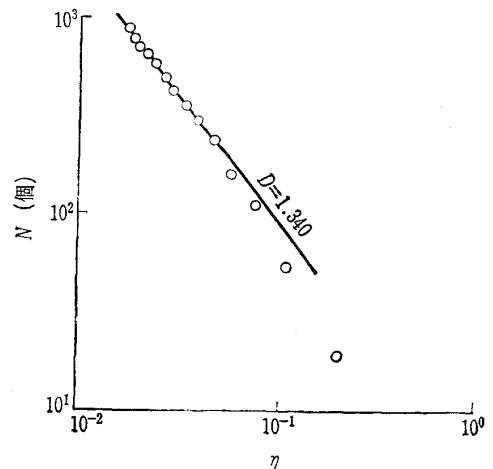


図-6 花崗岩の場合（図-4）のフラクタル次元

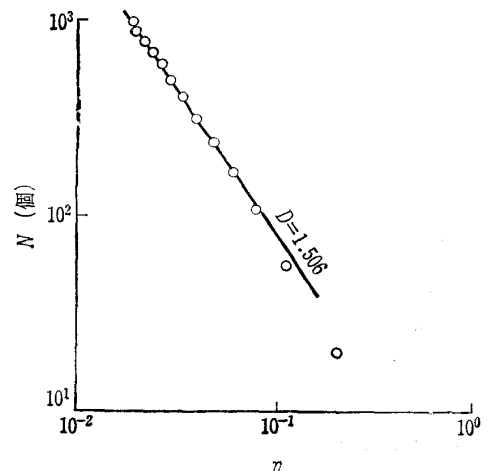


図-7 顕微鏡クラック（図-5）のフラクタル次元

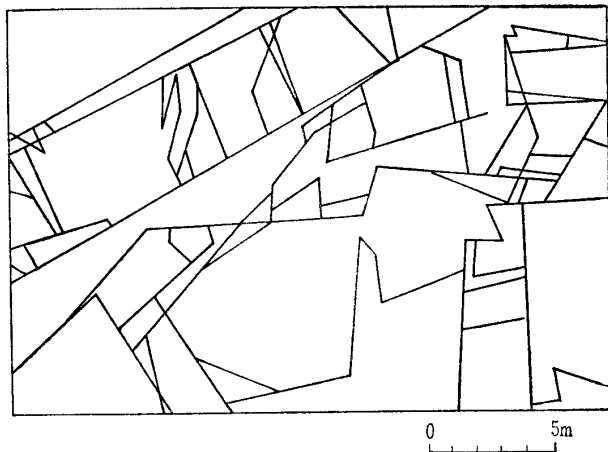


図-8 花崗岩割れ目系の有効流路

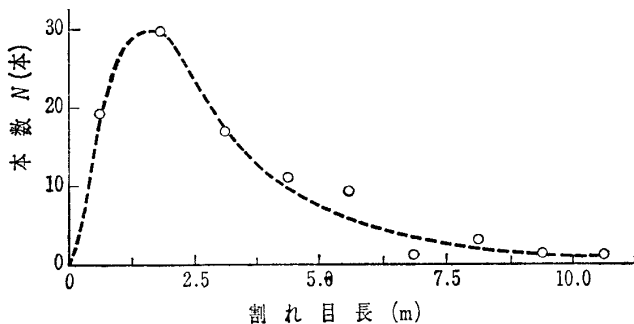


図-9 花崗岩の割れ目長の分布

までもなく浸透流は有効流路に支配される。そこで、フラクタル次元と割れ目系長さ、本数および節点数（直線割れ目の交差する数）の関係に注目する。すべての割れ目系データの解析結果が表-1, 2にまとめてある。これらの表から図-9, 10には割れ目の長さの分布を示している。図-9は図-4の割れ目系に対応し、図-10は図-5のそれに相当する。顕微鏡レベルのクラック系の方が全体に長さの小さいものが多いことが分かる。その理由は現象的に明らかであり、顕微鏡レベルのクラック系はその形成プロセスがスケールの大きい花崗岩のそれと違っているためである。つまり、顕微鏡レベルのクラックは岩石が形成される時にできたものであって結晶と同程度の寸法のクラックが多いわけである。一方、岩盤の割れ目系は風化を伴う外力によって力学的に作られたものであるだけに地質構造運動や風化など外力の影響を強く受ける。図-11, 12には今回解析したデータすべてを用いてフラクタル次元と割れ目本数、節点数の関係をプロットしたものである。いずれもかなり高い相関が見られる。フラクタル幾何の本来の概念からして、フラクタル次元が大きくなることは割れ目の本数が増えることおよび節点数が増すことと理論的には一致した傾向をもつと考えても不思議ではない。つまり、割れ目の数が増えると、当然平面における図形の複雑さや構成は密になるから割れ目系の密度は高くなると考えられるからである。しかし、フラクタル次元と割れ目本数が線型的に変化するとは限らず、現場で観測される割れ目系についてはフラクタル次元は1.6程度が上限のように思える。少なくとも本報で用いたデータではこの事が読みとれる。

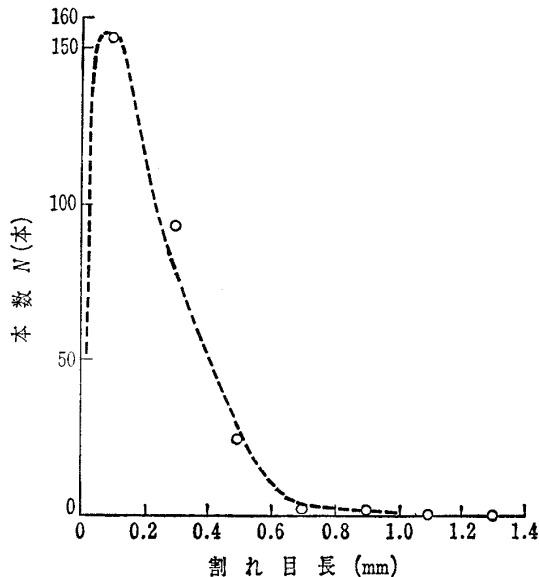


図-10 顕微鏡クラック系の長さ分布

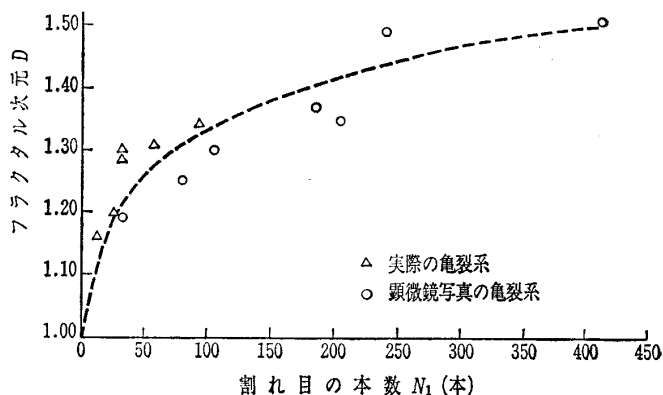


図-11 フラクタル次元と割れ目の本数の関係

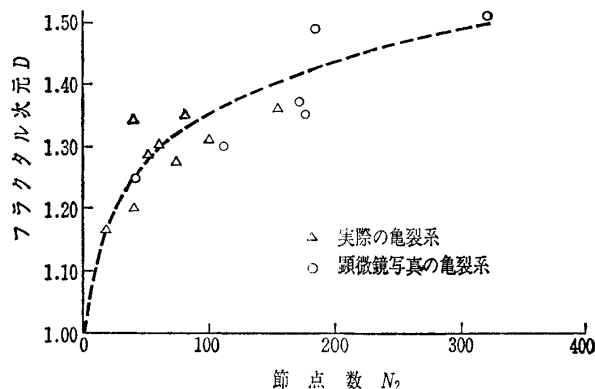


図-12 フラクタル次元と節点数の関係

以上のほかにフラクタル次元と割れ目の方向角分布についても検討を加えたがあまりいい相関は見いだされ得なかった。むしろ割れ目の方向は地質や力学的な影響により物理的に決まるためではないかと思われる。

4. 水理特性とフラクタル次元の相関

4.1 割れ目系の流れとモデル

岩盤が岩石と割れ目系からなるわけであるから浸透流は両者を同時に生じることになる。したがって、砂岩や礫岩のように岩の透水性の大きい岩盤は割れ目系も岩石部分も同程度の透水性をもつことになるが、堅硬でかつ緻密な岩石の透水性は主として割れ目系を水が流れることにより支

表-1 実際の割れ目の特性

資料番号 特性量	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
フラクタル次元 D	1.198	1.285	1.164	1.340	1.306	1.301	1.275	1.351	1.342	
割れ目長の標準偏差 σ_l	有次元 (m)	0.351	0.347	0.509	3.016	0.208	1.772	0.663	0.939	1.545
	無次元	0.185	0.137	0.201	0.127	0.131	0.233	0.195	0.178	0.138
割れ目方向の標準偏差 σ_d (°)	58.49	63.58	43.49	50.48	56.15	53.60	59.75	61.09	59.80	
割れ目の本数 N_1	26	32	11	94	59	32	38	41	39	
節点数 N_2	43	53	20	154	101	62	74	82	72	
流量 Q	有次元 (m ³ /s)	0.606×10^{-7}	0.139×10^{-3}	0.143×10^{-5}	0.520×10^{-2}	0.257×10^{-4}	0.429×10^{-3}	0.150×10^{-4}	0.210×10^{-3}	0.106×10^{-2}
	無次元	0.108×10^{-12}	0.314×10^{-9}	0.243×10^{-11}	0.356×10^{-11}	0.648×10^{-11}	0.120×10^{-10}	0.410×10^{-10}	0.119×10^{-9}	0.841×10^{-10}
有効流路数 N_3	48	62	21	195	130	73	101	111	95	
有効流路長 l_i	有次元 (m)	14.951	17.134	9.319	302.056	17.843	9.121	27.872	69.020	96.914
	無次元	7.869	6.763	3.678	12.718	11.269	12.001	8.215	13.078	8.671

表-2 顕微鏡写真サンプルの特性

資料番号 特性量	1	2	3	4	5	6	
フラクタル次元 D	1.493	1.299	1.368	1.252	1.506	1.346	
鉱物および岩石名	角閃石岩	ドロマイト	ガラス質石英安山岩	ドロマイト	ベスビアナイト	モンティセライト	
割れ目長の標準偏差 σ_l	有次元 (mm)	0.208	0.302	0.134	0.416	0.131	0.164
	無次元	0.088	0.137	0.057	0.097	0.034	0.055
割れ目方向の標準偏差 σ_d (°)	62.34	52.96	53.65	57.33	50.58	56.03	
割れ目の本数 N_1	241	106	187	81	415	207	
節点数 N_2	185	114	173	43	321	178	
流量 Q	有次元 (mm ³ /s)	0.324×10^{-3}	0.424×10^{-3}	0.330×10^{-7}	0.525×10^{-6}	0.190×10^{-3}	0.885×10^{-4}
	無次元	0.133×10^{-3}	0.868×10^{-11}	0.388×10^{-10}	0.107×10^{-12}	0.383×10^{-9}	0.933×10^{-10}
有効流路数 N_3	136	88	144	31	274	124	
有効流路長 l_i	有次元 (mm)	34.42	21.58	27.79	19.39	57.33	39.00
	無次元	14.50	9.77	11.69	4.49	15.08	13.13

配される。例えば、簡単のため図-13のような割れ目系を考えて、岩石部分の流れを無視して割れ目系のみのネットワーク流路の流れに注目すると、任意の平行な直線流路 ij について流量 Q_{ij}' は

$$Q_{ij}' = \frac{\rho g}{12\mu} b_{ij}^3 \frac{h_i - h_j}{S_{ij}} \dots\dots\dots (6)$$

で表される⁹⁾。ここに、 ρ : 流体密度、 g : 重力加速度、 μ : 流体粘性係数、 b : 割れ目幅、 h : ピエゾ水頭、 S : 流路長とする。

同様に基準とすべき流量として何を選定するかであるが、ここではフラクタル次元 $D=2$ の場合、つまり Q_0 は

$$Q_0 = \frac{\rho g}{12\mu} B^3 \frac{H_a - H_b}{L} \dots\dots\dots (7)$$

とする。ここに、 L : 岩盤長、 B : 岩盤幅、 H_a 、 H_b : 岩盤の上下流境界でのピエゾ水頭とする。

両式の比をとって、

$$Q_{ij} = \frac{Q_{ij}'}{Q_0} = \sum \left(\frac{b_{ij}}{B} \right)^3 \frac{(h_i - h_j)/(H_a - H_b)}{(L/S_{ij})} \dots\dots\dots (8)$$

が無次元流量となる。

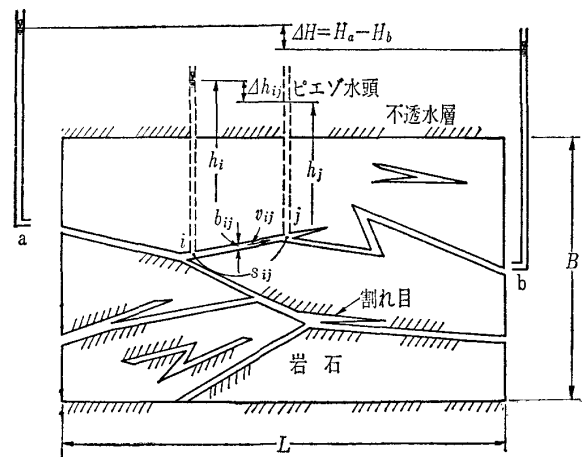


図-13 割れ目系の流れとそのモデル化

同様に多数の標準偏差 σ_a は

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (S_i - S_j)^2} \dots\dots\dots (9)$$

で計算する。ここに、 n : 割れ目本数である。

また、割れ目の傾き θ_{ij} は水平とのなす角とする。

4.2 フラクタル次元と浸透流の特性

式(8)を用い表-1および2(表中の岩盤、鉱物は本邦の

各地から鉱山を中心に調べたものである)に示した割れ目系について無次元流量を算定するため、割れ目幅分布はLong (ロング, 1982)^{9),5)}による解析法を採用し、図-8に示したような有効流路からこれを求めた。図-14には有効流路長とフラクタル次元の関係を示した。この関係が直線であるか、二次式であるか、その判断は今の段階では決めにくい。しかし、正の相関を持っても不合理ではない。フラクタル次元が増すことは割れ目の数が増加することに結びつくわけであるから、必然的に有効流路の数が増すことになっても不都合ではないからである。この事が顕微鏡レベルのクラック系についても成り立つことは興味深い。

図-15は式(8)より現場で判定された割れ目について計算した無次元流量とフラクタル次元の関係を示す。この相関を定式化すると、

$$Q = \alpha(1-D/2)^{-n} \dots\dots\dots(10)$$

の形となる。ここに、 α , n : 各々定数, 指数である。この式中 α , n が非常に小さい値をとるのは式(8)の無次元化の方法にあるわけで、式(8)の分母に岩盤サンプルの幅 B を用いたためである。したがって、別の量を採用すると α , n は変わってくる。しかし、本質的な相関傾向を損うものではない。式(10)の関係がどうして出て来たかは現時点で明快な説明を与えることはできないが、フラクタル次元が一定値に近づいて流量が大きくなるような性質をもっている。この式は一応形式的に考えると、フラクタル次元 D が決まれば、流量が求まるような関係になっているが、現時点でそう限定するのは危険であろうと思う。その意味で実用に供することはできないかも知れないが、大変興味深い関係ではないだろうかと思う。

5. むすび

不規則でかつ複雑に見える岩盤割れ目系をうまく理解・記述できるパラメーターあるいは指標量が今日まだ見いだされていない。しかし、岩盤の力学や浸透流を考える際、これは大切となるためいろいろな角度から研究が進められている。こういった背景から、本報は十分とはいえないまでもフラクタル幾何学の理論を割れ目系の形態解明と記述量を見いだすために応用した。その結果、いくつか新しい知見を得た。その結論は次のように要約される。

岩盤の割れ目系のみならず岩石の結晶レベルのクラック系のフラクタル次元 D は本報で解析されたデータからすると $D=1.15 \sim 1.60$ 程度であった。基本的に割れ目系の密度が小さいと、 D は小さくなり、データのサンプリングスケールによって D が変化する。つまり、当然ともいえるが、統計的に標本数が少なくなると、フラクタル次元は不安定となる。割れ目本数、節点数とフラクタル次元にはある程度相関があり、これらが増すとフラクタル次元は大きくなる。一方、浸透流との関係で見ると、割れ目系の中で

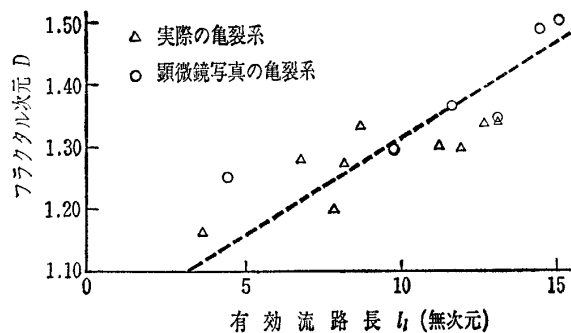


図-14 フラクタル次元と有効流路長の関係

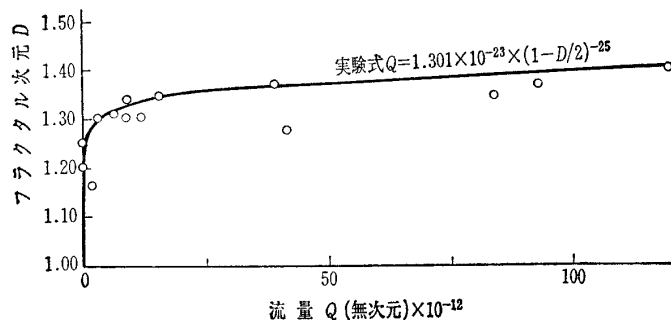


図-15 フラクタル次元と流量の関係

真に浸透流となり得る有効脈絡流路は実際の割れ目系より小さく、いわゆる浸透流の有効空隙率は小さくなる。また、これら有効流路系の無次元流量 Q はフラクタル次元といい、相関をもち、 $Q = \alpha(1-D/2)^{-n}$ (α : 定数, n : 指数) の形で表されることが分かった。

本報はフラクタル次元を中心に割れ目系の幾何学的性質を論じたが、これを現地測定法と関連して検討する必要がある。

最後に、現場の岩盤割れ目データ収集に当たって三菱金属中央研究所佐々木康夫氏および埼玉大学工学部小田田寛助教授の協力を得た。記して心よりお礼申し上げます。

参考文献

- 1) ベンワー・マンデルブロー: フラクタル幾何学, 広中平祐監訳, 日経サイエンス社, 1985.
- 2) 高安秀樹: フラクタル, 朝倉書店, 1986.
- 3) 寺阪英孝編: 現代数学小事典, 講談社, 1977.
- 4) Barton, C.C. & Larsen, E.: Fractal geometry of two-dimensional fracture networks at Yucca mountain Southwestern Nevada, Int. Sym. on Fundamental Rock Joints, Björhllinden, 1985.
- 5) 佐藤邦明ほか: 岩盤浸透流におけるきれつ系のフラクタル構造に関する基礎研究, 第35回水理講演会論文集, pp. 319~324, 1986.
- 6) 大西有三・鍵本広之: フラクタル幾何学の岩盤工学の適用についての基礎的検討, 岩盤力学に関するシンポジウム, pp. 186~190, 1986.
- 7) 大西有三・鍵本広之: 割れ目ネットワークのフラクタル化による評価手法についての考察, 岩盤力学に関するシンポジウム, pp. 927~931, 1987.
- 8) 川谷 健ほか: 数値モデルによる岩盤亀裂浸透流の研究, 第29回水理講演会論文集, pp. 869~874, 1986.
- 9) Long, J.C.S. et al.: Porous media equivalents for networks of discontinuous fracture, Water Res. Res., Vol. 18, No.3, pp. 645~658, 1982.

(原稿受理 1987.3.31)