

ケプラーの火星楕円軌道について

On Kepler's Elliptical Orbit for Mars

都 築 正 信*

TSUZUKI, Masanobu

1. はじめに

本稿は、2001年日本科学史学会年会（早稲田大学）において発表した内容を詳しく述べたものである。当時の内容は年会要項集に収められているが、なにぶんあまりに簡略にすぎる。ここにあらためて論文にするに至った理由は、2013年に、ヨハネス・ケプラー(1571-1630)の『Astronomia Nova』がラテン語から邦訳されて、『新天文学』（以下、KANと略記）として出版されたことである¹⁾。これによりこれまでわからなかった部分が明らかになり、また、とくにケプラーの楕円軌道発見のくだりを記述する文の意味が明確に理解され、上の発表内容を詳細に論述できるようになった。KANの訳者の偉業に感嘆するとともに、深く感謝したい。

KANは大著である上に、説明は難しく、筆者にはその全容を理解できたわけではなく、いまだに不分明な部分も少なくない。ここでは、楕円軌道発見の契機となった図形を基に、ケプラーが、火星の太陽を回る軌道は楕円であるという結論を得るに至った経緯を考察する。

KANの序文には楕円軌道発見について次

の文がある²⁾。

「私の労苦がようやく終わったのは、非常に多くの苦心を要する証明と膨大な観測結果から、天における惑星の行路が円ではなく、卵形、とというより完全な楕円軌道であることを発見して、物理的仮説への四歩目の歩みをふみだしたからだった。」

「四歩目の歩み」とは、KANが五部からなり、火星の楕円軌道が本格的に論じられているのは第四部のためである。この文を読むかぎり、ケプラーは楕円軌道を見出した後に、火星運動の物理的原因を探究したように受け止められる。実際のところ、ケプラーは第四部の終わりに近い第56章で初めて、火星の楕円軌道発見のきっかけとなったアイディアを述べ、それに深く関わる図形は後の第59章に置き、そこであらためて楕円運動の物理的根拠を詳しく論じている。本稿もそれに従い、最初に第二節では、上の図形を取り上げ、その中で彼が指摘した曲線が楕円となることを簡明に、しかし、確実に示そう。これによって、ケプラーの楕円理論自体は理解されよう。この理論から算出された理論値は、チコ・ブラーエの観測データとの誤差を十分小さくするものであった³⁾。

一方、ケプラーは理論から算出された数

* つづき・まさのぶ
埼玉大学名誉教授

値とブラーエの観測値が極めて近くなっても、そのことだけに満足できなかった。彼は火星軌道の物理的根拠を探究しないではいられなかった。KAN を難解している大きな要因は、その物理的根拠の説明である。本稿第三節では、筆者の理解できた範囲で、彼の説明のあらすじを追いかけてみる。

最後の第四節で、KAN に記載されているデータに基づいて、ケプラーが発見した火星軌道を図示してみよう。それは彼が当時の最新にして最も精密な観測記録によって把握した楕円軌道である⁴⁾。楕円とはいえ、この論文の紙幅では円と同然になってしまうほど円に近い軌道である。このような図は、内外の書において筆者には未見であり、ケプラーの火星軌道の理解に役立つであろう。

なお、ケプラーの火星軌道は、すでに多くの人が論じているテーマである。ここでは、付節において、とくにケプラーの楕円軌道発見の鍵となった図に言及している文献に触れておきたい。それは本稿の論旨を理解する一助になるだろう。

ケプラーの楕円軌道発見は、天体運動に対して、いわゆる「円の呪縛」⁵⁾を解いたという点で、近代科学史上最も重大な出来事の一つであり、それを科学史の中に位置づける作業は極めて重要であるが、それは別の論稿にゆだねたい⁶⁾。本稿は、彼の楕円軌道発見のきっかけを与えた図を中心して、彼の軌道理論の、とくに数学的側面に焦点をあて述作したものである。

2. 火星軌道の発見

KAN には非常に多くの図形が描かれている。そのうち楕円軌道に最も深く関わるの

は、前述した第59章のものであろう。同じ図がKAN に五度掲載されていて、ケプラーが格別に重視した図形であることを思わせる。それが本稿の図1である⁷⁾。

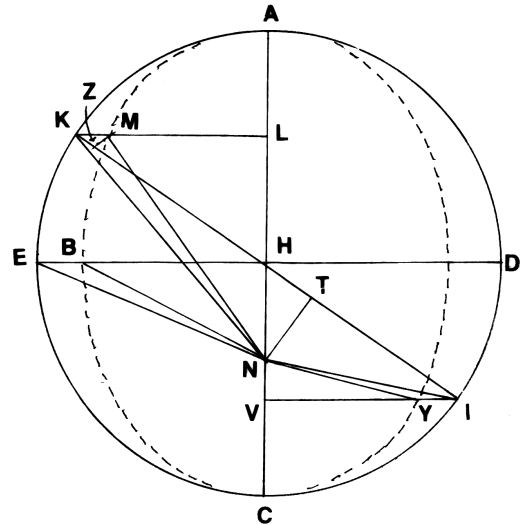


図1

図1の説明に入ろう。

図において実線で描かれている円の中心はHで、A, E, C, Dは円上の点である。Nは太陽の位置を表す。太陽は円の中心から少し離れた地点にあるわけで、この円は、ヒッパルコスープトレマイオス以来の、いわゆる離心円である。

Aは太陽から最も離れた点で遠日点、Cは太陽に最も近づいた点で近日点である。したがって直線ACは火星軌道の長径である。遠日点の方向と長軸の長さ、および太陽Nの位置を決めるにケプラーは膨大な計算をしなければならなかった。直線EDは中心Hにおいて長軸と垂直に交わる直線である。

円の内側を走る点線は、チコ・ブラーエの観測値から得られた、火星の軌道と推定される曲線である。その形を決めるのが問題なのである。E, K, Iは離心円上の点

であり、E, K, I から長軸に垂線を下ろしたとき、垂線の足が、それぞれH, L, Vである。点M, B, Yはそれら垂線と軌道との交点である。

図1に関してケプラーが言い添えた文が次である⁸⁾。これは第56章に出てくる。

「改めて考えてみると第45章では意味のあることは何一つ述べていなかったから、火星に対する勝利はむなしなものだったと思ううちに、まったく偶然に最大の視覚的均差を図り取った5°18′という角度の正割に思い至った。この値が100429であることを見たとき、まるで新たな光のもと、眠りから目覚めたかのように、以下の推論を始めた。平均的な長さを取る所で均差の視覚的部分が最大になる。平均的な長さを取る所で三日月形つまり距離の短縮分が最大になり、ちょうど最大の視覚的均差の正割100429が半径100000を上回る分になる。したがって、平均的な長さを取る所で正割の代りに半径を用いると観測結果のとおりとなる。」

KANでは円の半径を100000とし、5°18′の正割(セカント)を100429としている。しかし、三角関数などでは現代の数値にはそぐわないので、ここでは半径を1としよう。すると、上の100429は、1.00429となる。すなわち角5°18′の正割(セカント)は1.00429である。

以下では、二点A, Bの距離を[AB]で表す。これは線分ABの長さである。円の半径1のとき、観測データから図1の三日月形の最も厚い部分の長さ[EB]は0.00429であり⁹⁾、離心の幅[HN]は、0.09265である¹⁰⁾ことが算出されている。

視覚的均差とは、離心円上の点から中心

Hと太陽の位置Nを見たときできる角のことである。図では、∠HKN, ∠HEN, ∠HINがそれに相当する。いま、半径HEから上方の部分の円弧 \widehat{AE} の各点における視覚的均差を考えると、それは点Eにおいて最大になる¹¹⁾。すなわち、Kをその円弧の上の任意の点とすれば、

$$\angle NKH < \angle NEH$$

が成立する。このとき、∠NEH=5°18′であり、円弧 \widehat{AE} に限れば、これが最大の視覚的均差である。

平均的な長さとは、太陽と離心円上の点との距離の平均的な長さを意味し、それはENの長さ[EN]である。

上の文によれば、ケプラーは偶然5°18′のセカントを計算したところ1.00429を得た。一方、NEの長さは、[NE]²=1+0.09265²より、[NE]=1.00428であり、次が成立する。

$$[EH] \sec 5^\circ 18' = [NE]$$

$$[NE] \cos 5^\circ 18' = [EH] = 1$$

一方、ブラーエのデータから次がわかる。

$$[NB]^2 = [BH]^2 + [HN]^2$$

$$= (1 - 0.00429)^2 + 0.09265^2$$

ゆえに、[NB]=1.00001。これは1としてよい。

これより、次式が成り立つ。

$$[NE] \cos 5^\circ 18' = [EH] = [NB]$$

最後の[NB]は太陽と火星の距離を表す。この式は、上の引用文の最後の部分:「正割[NE]の代りに半径[EH]を用いると、観測結果[NB]のとおりとなる」を示すものである。

さらに、この式は次を意味している。

平均的な長さをとる離心円上の点Eにおいて、その点と太陽との距離[NE]に視覚的均差の余弦(コサイン)を乗じたとき、そ

の値は火星と太陽との距離[NB]を与える。

この命題を離心円の円弧 EA 上の任意の点に一般化すれば、次の命題が得られよう。

離心円上の点から太陽を見たとき、その点と太陽との距離に視覚的均差の余弦を乗じたとき、その値は火星と太陽との距離を与える。

ケプラーを目覚めさせたのは、この関係である。本稿では、これを**目覚めの命題**と呼ぼう。

この命題を円弧AE上の点に適用する。

図1において、Kをその円弧の任意の点とし、Kから長軸上に垂線を下す。これはすでに述べたことである。ここで直線 KH をHの方に延長し、Nからその直線に垂線 NT を下す。このとき、Kにおける視覚的均差 $\angle NKH = \delta$ とおくと、これは $\angle NKT$ と同じであるが、**目覚めの命題**から、

$$[NK] \cos \delta = [KT]$$

が火星と太陽との距離を与えると推定される。

いま、Nを中心とし、半径[KT]の円を描き、それと上の垂線KLとの交点をMとする。

このとき、もちろん、次式が成り立つ。

$$[KT] = [MN]$$

いま、火星が点Mを通ると仮定しよう。

ここで、 $[NH] = e$ と置き、次のように推理を進める。

$\angle KHA = \beta$ とおく。離心円の半径は 1 だから、

$$\begin{aligned} [KL] &= \sin \beta \\ [ML]^2 &= [MN]^2 - [NL]^2 \\ &= [KT]^2 - [NL]^2 \\ &= (1 + e \cos \beta)^2 - (e + \cos \beta)^2 \\ &= (1 - e^2) \sin^2 \beta \end{aligned}$$

したがって

$$[KL] : [ML] = 1 : \sqrt{1 - e^2} \quad (1)$$

また、 $[BN] = 1$ 、 $[NH] = e$ のゆえ

$$[EH] : [BH] = 1 : \sqrt{1 - e^2} \quad (2)$$

このことは次の結果を意味する。

円弧EAの任意の点Kから長軸 AC 上に垂線 KL を下すとき、この垂線は点Mにおいて同一の比 $1 : \sqrt{1 - e^2}$ に分割される。

同様な推論は中心Hについて点対象である円弧CDにおいても成り立つ。

いま、I を直線 KT を延長したとき離心円と交わる点とする。Kが円弧AEの任意の点であるから、I を円弧CDの任意の点とみなすことができる。I から長軸 AC 上に垂線を下し、その足をVとする。ここで、上の**目覚めの命題**を適用すると、 $\angle HIN = \gamma$ とおけば、

$$[NI] \cos \gamma = [IT]$$

が火星と太陽との距離を与えると推定される。このとき、Nを中心として半径[IT]の円を描き、その円と垂線 IV との交点をYとし、火星がYの位置にあるとすれば、上の推定から

$$[NY] = [IT]$$

が成立する。

$\angle IHV = \beta$ だから、

$$\begin{aligned} [YV]^2 &= [NY]^2 - [NV]^2 \\ &= [IT]^2 - [NV]^2 \\ &= (1 - e \cos \beta)^2 - (\cos \beta - e)^2 \\ &= (1 - e^2) \sin^2 \beta \end{aligned}$$

ゆえに、

$$[IV] : [YV] = 1 : \sqrt{1 - e^2} \quad (3)$$

これによって、点Yは垂線 IV を(1)、(2)の式と同じ比に分割する。すなわち、点Yの集合は楕円を作る。

以上の推理において、離心円上の点Kに対して $\angle KHA = \beta$ を離心アノマリあるいは

離心近点離角と呼び、本稿の全体を通して重要な役割を果たす角である。

こうして、得られた点MとYの集合、およびBは楕円を形成する。ケプラーはこのことを認識していた。第59章の冒頭にある文はそのことを示している¹²⁾。

「互いに反対側にある頂点として円に内接する楕円を円の中に描き、円の中心と接点とを通る直径を引き、他の円周上の点からこの直径に垂線を下す。そうすると、これらの垂線はすべて楕円周によって同じ比に分割される。」

これを**アポロニウスの楕円命題**と呼ぼう。実は、KANでは、上に引用した楕円軌道発見のきっかけ述べる第56章の文から、この第59章の文までにあるはずの推論はほとんど述べていないのである。言いかえると、**目覚めの命題**から、上の(1), (2), (3)を含め、この**アポロニウスの命題**までに至る過程はすっぱり抜けている。この部分は上にみるように、幾何学的には簡単な内容であり、幾何学に通じていたケプラーにおいては述べるまでもないことであつたと思われる。このことがケプラーの楕円軌道発見に関する諸文献に混乱が見られる要因の一つであろう。

以上によって、KAN第59章の図については、点Zを残して、すべての要素が説明されていると思う。要点は、火星が点MやYの位置にあれば、火星は楕円軌道を描くのである。この証明は**アポロニウスの命題**から容易である。しかし、ケプラーは迷いに迷った末にMやYにたどり着くのである。点Zは、その迷いの一つである。それは楕円とは直接には関わらないが、ケプラーにあつては、実は極めて重要であつた。ここ

で一言触れておこう。

図1を振り返ってみよう。

そこでは、上で示したように、

$$[EH] = [BN], [KT] = [MN]$$

であつた。ケプラーは、これらの左辺の距離を直径距離と名付けた。それらが円の中心Hを通るためであろう。この直径距離を含む直線を直径距離直線と呼ぼう。直線EH, KTがそれにあたる。

点Zは、直径距離直線の上にあつて、太陽との距離[ZN]が直径距離と等しいものとして定められる。すなわち、図1では、 $[ZN] = [KT]$ が成立している。点Eでは、点BがZと同じ役割をはたしている。点Zは、実は、点Bを一般化したものである。直線ZNについては、ここではとくに名前をつけないでおく。直線MNについては、上に説明した。

ケプラーの楕円理論に至る過程を理解するためには、少なくとも以上の三つの直線を頭に入れておかねばならない。同時にここで注意しなければならないことは、初めから火星が点MやYの位置にあることはまったくわからないということである。あらかじめ、MやYが火星の位置として選ばれる理由は何もないということである。

ケプラーが楕円軌道の決め手となつた点MやYを選択したのは最終段階であつた。その直前に選択したのが点Zである。これは、点Zが点Bの一般化であつたから、ケプラーにとって当然であつたのである。次節では点Zの、それ以上の意味を説明しよう。それは火星固有の力とも関わるので、火星の運動を引き起こす物理的力全体の中で論じたほうがよいだろう。

3. 火星運動の物理的根拠

ケプラーは天体理論の示す数値と観測値との差を小さくすることに異常な情熱を傾けていた。KAN は、その情熱によって生まれた書物といっても過言ではない。一方、ケプラーは、当時の知識人の常識であるアリストテレスの哲学にも通じていた。当然、アリストテレス運動論の原理「動くものには動かすものがある」を学んでいたであろう。この原理は、太陽を回る惑星にも適用されねばならない。では、惑星を動かす実体は何か。この問題に対して、ケプラーは KAN 第 39 章で、自己の思考を整理して次の命題を公理として提示した¹³⁾。

「第一は、孤立した惑星本体はその場所に自然本性として静止しようとする。第二は、惑星は太陽の力によって獣帯の経度に従い[黄経を変えて]場所を移動する。第三は、惑星と太陽の距離が変わらなければ、この移動によってできる道筋は円になる。・・・第五は、惑星本体に具わっている単独の力だけでは、その本体のある場所から他の場所に運ぶのに十分ではない。第六は、それにもかかわらず惑星が太陽に近づいたり離れたりするのには、惑星の固有の力に起因する。

言うまでもないが、ケプラーは、太陽は静止し、惑星はその周りを巡り動くという地動説を信奉していた。彼によれば、静止する太陽が惑星を動かす。しかも、惑星は太陽との距離を変えながら動く。すなわち、太陽は惑星の円運動の中心ではない。さらに、惑星は固有の力によって太陽に近づいたり遠ざかったりする。ケプラーの火星軌道論は以上を原理として展開されている。

ケプラーは、最初、火星軌道は円である

という前提から出発した。ただし、ブラーエの観測データから太陽は、その円の中心ではなく、中心からやや離れた位置にあると判断した。いわゆる離心円である。この場合、もちろん太陽の位置の決定が重要である。彼は観測データに基づき、離心の位置と離心円の半径を割り出し、理論とデータとの一致を図った。最終的には 8' 程度のずれしか伴わない離心円が得られたが、ブラーエのデータを「神の恩寵」と信じるケプラーは、この離心円をあきらめる¹⁴⁾。しかし、このとき得られた離心円を彼は「代用仮説」と呼び、後の軌道理論の形成の「試金石」¹⁵⁾とする。

天体運動が円を描くという考えは、古代ギリシャ以来すべての天文学者を捉えていた。しかし、この 8' のずれを見出した後、ケプラーは、こう述懐する¹⁶⁾。

「私の第一の誤りは、惑星の行路を完全な円としたことだった。これは時間を奪った盗人で、あらゆる哲学者たちの権威で武装している上に特に形而上学にも相応しいので、とりわけ有害であった。」

「時間を奪った盗人」という言葉には、円運動に固執し、時間を無駄にしたという思いが込められている。ケプラーにおいては、もはや天体の円運動という観念は有害なものでしかなかった。

ケプラーが次いで導入したのは、卵形の軌道である。卵形とは、円の「両方の側で徐々に内側に入り込み、近日点で出てきて再び円の大きさになる」¹⁷⁾軌道である。数多くの試みの末に、観測データとのずれが極めて小さくなる卵形を見出した。それは、主要な三地点で十分に確実な代用仮説の示す値との誤差がいずれも 5' 以下となった

18)。しかも、彼が設けた、「物理的原因の援用の仕方がより巧妙でかつ計算法の調整にかなったもの」¹⁹⁾であったから、彼は大いに喜んだ。もしもケプラーがこの時点でその結果に満足し、火星軌道の研究を終らせていたら、科学の歴史はかなり異なっていたであろう。ケプラー研究の碩学エイトンはこの時を評して次の感懐を述べている²⁰⁾。

「この極めてあぶない時に、惑星運動を物理的要因によって引き出そうとするケプラーの方式としてのアリアドネの糸が切れなかったのは、天文学の歴史において幸いであった。」

科学の歴史において幸いであったというべきかもしれない。しかし、結局、「この(第38)章で格闘した度重なる拙劣な試行錯誤に嫌気がさしたので、どうしてもっと確実に容易な道をあゆめないのかと落ち着けなかった²¹⁾」のであった

ケプラーは自分の理論に自信を失ったのであろう。つまるところ、これも捨てるのである。

KAN ではもちろん最終的には上の2節に述べた楕円軌道にたどり着く。しかし、それに至る直前にケプラーは豊頬形と名づけた軌道を選択した。これを図2において説明しよう。

図2はKANの第58章にある図とほぼ同一である。ただ、アルファベット記号はかなり異なる。ここでは図1との継続性を重視し、図1の記号はそのまま残した。図1との違いは、垂線IVを左側に移したことと、新たに点Uを加えたことである。Uは、Nから直線IHに下した垂線の足である。

第56章にあった目覚めの命題を導いた関係は、図2において、 $\angle HEN$ が $5^\circ 18'$ であ

り、線分ENの $\angle HEN$ に関する余弦EHが火星から太陽までの距離を与え、それが線分NBと等しいのであった。重要な点はEHが中心を通ることであり、 $\triangle EHN$ が直角三角形であることである。ここで豊頬形に至るケプラーの推理は大略次のようだったと思われる。

以下は、KANを読み下して、ケプラーの説く複雑な内容を筆者なりに大幅に縮約整序したものである。

太陽は火星を離心円上に沿って動かす。例えば、火星を点Eまで動かす。その後、火星固有の力により、直径距離直線上の点Bまで揺れ動かす。これを火星の秤動(ひょうどう)と呼ぶ。

では、この一連の動きを離心円の他の点に一般化するとどうなるか。

半径EHより上方の円弧 \widehat{AE} 上の任意の点Kを取る。まず太陽は火星を点Kまで動かす。次いで、火星の固有の力により、すなわち、火星の秤動によって直径距離直線上

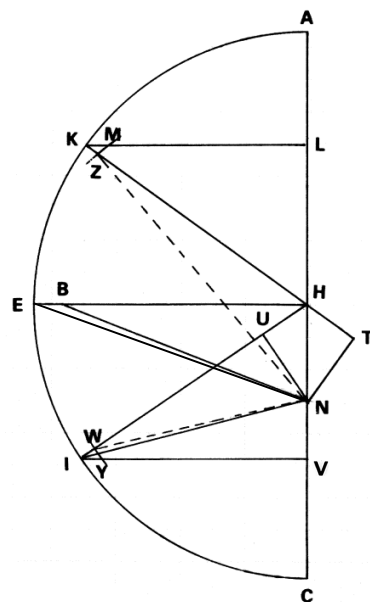


図2

の点Zまで動くのである。ここで、Zは、 $[KT]=[ZN]$ を満たす点である。こうしたZによって作られる曲線は、点Mが作る楕円（これは第2節で証明した）より外側に出してしまう。このため、ケプラーは点Zの作る曲線を豊頬(ふくらんだほほ)形(ほうほおけい)と名づけたのであろう²²⁾。

半径EHの下方の円弧EC上でも同様に考える。任意の点Iを取る。太陽の力は火星を点Iまで運び、次いで火星固有の力によって直径距離直線上の点Wまで動かす。ここで、Wは、 $[IU]=[WN]$ を満たす点である。この場合、Wの集合は楕円を作る点Yの曲線（これも第2節で証明した）より内側にきてしまうので、貧頬形呼んだほうがよいのだが。

ケプラーは、一時、このようなZやWから作られる曲線を火星軌道とみなしたのだった。しかし、幸いなことにというべきだろう、この軌道が示す理論値はブラーエの観測値とのずれが大きいことが判明する。上方の半円で $5' 30''$ 外に大きくなるずれ、下方の半円で $4'$ の内に小さくなるずれが生じる²³⁾。(このとき、上方で豊頬形、下方では貧頬形となるであろう。)このため結局、この軌道形もあきらめる。軌道としてはあまりに複雑にすぎる。

ケプラーはこうした経過の最後に点ZやWを捨て、点MやYを選び取ることによって楕円軌道に到達する。これらの点の集合が楕円を作ることは、すでに第2節で解説した通りである。

結局、ケプラーは最終的に、次のような仕方では火星が楕円軌道を描いて太陽を周回すると考えたものと思われる。

まず太陽が火星を離心円上で動かし、離

心円のある点(例えば、点K)に至らせ、ついで、点Kから火星の固有の力によって、Kにおける直径距離を維持しつつ、Kから長軸に下した垂線上の点に至る。図2では、Kにおいて直径距離[KT]を維持しつつ、直線KL上の点Mに至る。この場合、点KからMに至る動き(その詳細は難解)が火星の秤動である。図2において、離心円の半径EHより下方の部分では、点Iにおいて、直径距離[IU]を維持しつつ、Iから点Yに至る動きが秤動である。

以上において、半径EHの上方では、火星は直径距離直線(直線KH)から右に揺れ、EHの下方では、直径距離直線(直線IH)から左に揺れる。図の上では、秤動にふさわしい動きに見える。

この火星自身の力による秤動の尺度として、ケプラーは、第57章で $1 - \cos \beta$ (β の正矢)を置いた²⁴⁾。 β が $\pi/2$ より大きい場合は、言い換えると、離心円上の点が半径EHより下方にあれば $\cos \beta$ はマイナスになるから、正確には $1 + \cos \beta$ とすべきであろう。このとき、 $\beta \rightarrow 0$ 、 π において0になり、 $\beta = \pi/2$ のとき最大になる。この尺度は、ケプラーも指摘することだが、結局、 $\sin \beta$ に準じている²⁴⁾。ある意味でそれは当然である。なぜなら、離心円上の点から、秤動によって点MやYに至るのは三日月形を横断することに他ならないからである。このとき、 $\beta = \pi/2$ で最大になり、 $\beta = 0$ 、 π で0になるのである。

ケプラーは最終的に点ZやWを捨て、MやYを選ぶことによって楕円に到達した。エイトンは、ケプラーがMやYを選んだ理由として、大略、ZとM、WとYはそれぞれ太陽への距離が等しく、かつ、それぞれが

極めて近くにあり、火星の秤動の及ぶ範囲にあると考えられるためMやYを取ったという見解を表明している²⁵⁾。これに異議を唱えるわけではないが、ケプラーがZやWの代りに、MやYを選択した説明は極めてわかりにくい。火星がもつ磁石に似た物理的力、これはケプラーの想像でしかないのだが、これを幾何学的方法によって根拠づけようとするところに難しさの原因があるのではないか。

さて、豊類形は失敗の記録である一方、楕円は成功の記録である。ケプラーはKANにおいて、自分の研究の成功と同時に失敗とその要因を詳細に記録した。KANは学術書として異例である。彼は、当時、いまだに社会の大勢であった天動説を打破しようと努めた。このため静止する太陽が惑星を動かすということと、惑星がそれぞれに固有の力をもつという考えを人々に納得させる必要があった。しかし、いかに言葉を費やしても、はるかに離れた太陽や惑星が物理的力をもつことを示すことは不可能だったろう。彼に残されていた道は、自分の理論と観測記録が十分合致することを示す以外になかった。ケプラーがKANにおいて、楕円軌道と面積法則（本稿ではまったく触れなかったが）に対し、その理論と観測値との整合性に執念を燃やしたのは、そのことが大きな要因であったと思われる。理論と観測や実験データの整合性の追求、これこそ近代科学の本質である。その意味でケプラーは近代科学への道を開いたのである。

次節でケプラーが見出した火星の楕円軌道を極端に縮小した形で図示してみよう。

4. ケプラーの火星軌道

ケプラーはKANの中に、上に導出された楕円軌道上の火星の位置（これを理論値とする）とブラーエの観測値を併記したデータを表として記載している。それが本稿の表である²⁶⁾。図3は、そのデータに基づいて火星の楕円軌道と地球の軌道を図示したものである。これは筆者の作成にかかる。

火星軌道は地球から見た火星の観測値を基にしている。したがって火星軌道は地球の軌道が確定しなければ決められない。このためKANでは、同時に地球の軌道も求めている。図3の円環は獣帯十二宮を表す。十二宮それぞれは30°の広がりをもち、それぞれにおいて反時計回りに0°から始まり30°で終わる。

Sは太陽の位置、Oは離心円の中心である。[AC]は楕円の長軸、それと直角に交わる軸が短軸である。Bは短軸の端点、Eは短軸を延長した直線と離心円との交点。したがって、線分[EB]は第2節で述べた三日月形の最も厚い部分の幅である。図の離心円の半径は47mmであり、図では、その幅はたかだか0.2mmしかなく、ほとんど同じ点となってしまう。仮に半径を250mmとしても、その厚さはようやく1mmである。楕円軌道といっても、普通の本に火星の軌道を描けば円と変わらないのである。

したがって、天の円運動を主張するアリストテレスの自然学を修めていたケプラーが、初めに火星の円軌道（離心円）を信じたのは無理からぬことである。それに疑念が生じたのは、ブラーエの精密な観測データと自ら設定した円軌道とのずれのためである。円軌道に固執すれば、ブラーエのデータをないがしろにすることになる。ケプ

表

	時点	太陽位置	[E-S]間 距離	[M-S]間 距離	黄道上の 火星位置	理論値	観測値	差異	緯度
1	1582. 23 Nove. H. 16. 0	11°. 41' ♄	98345	158852	0°. 42'. 11" ☿	26. 40. 0 ☿	26. 38. 30 ☿	1'. 30" +	Bor. 2. 49
	26 Dece. H. 8. 30	15. 4 ♄	98226	162104	16. 7. 18 ☿	17. 44. 19 ☿	17. 40. 30 ☿	3. 49 +	4. 7
2	30 Dece. H. 8. 10	19. 9 ♄	98252	162443	17. 56. 32 ☿	16. 6. 20 ☿	16. 0. 30 ☿	5. 50 +	4. 8
	1583. 26 Janua. H. 6. 15	16. 33 ☿	98624	164421	0. 6. 24 ♀	8. 17. 57 ☿	8. 20. 30 ☿	2. 33 -	2. 52
4	1584. 21 Dece. H. 14. 0	10. 16 ♄	98207	164907	3. 51. 45 ♀	1. 14. 34 ♀	1. 13. 30 ♀	1. 4 +	3. 31
	1585. 24 Janua. H. 9. 0	14. 53 ☿	98595	166210	18. 47. 8 ♀	24. 3. 58 ♀	24. 7. 30 ♀	3. 32 -	4. 31
5	4 Febr. H. 6. 40	26. 10 ☿	98830	166400	23. 33. 41 ♀	19. 43. 52 ♀	19. 47. 0 ♀	3. 8 -	4. 28
	12 Mart. H. 10. 30	2. 16 ♀	99858	166170	9. 9. 14 ♀	11. 43. 31 ♀	11. 46. 0 ♀	2. 29 -	3. 22
8	1587. 25 Janua. H. 17. 0	16. 1 ☿	98611	166232	8. 13. 40 ♀	4. 41. 50 ☿	4. 42. 0 ☿	0. 10 -	3. 26
	4 Mart. H. 13. 24	24. 0 ♀	99595	164737	24. 56. 50 ♀	26. 24. 41 ♀	26. 25. 40 ♀	0. 59 -	3. 38
9	10 Mart. H. 11. 30	29. 52 ♀	99780	164382	27. 35. 54 ♀	24. 5. 15 ♀	24. 5. 15 ♀	0. 0	3. 29
	21 April. H. 9. 30	10. 48 ♀	101010	161027	16. 44. 51 ☿	15. 49. 50 ♀	15. 48. 20 ♀	1. 30 +	1. 48
10	1589. 8 Mart. H. 16. 24	28. 36 ♀	99756	161000	16. 55. 14 ☿	12. 14. 7 ♀	12. 16. 50 ♀	2. 43 -	2. 4
	13 April. H. 11. 15	3. 38 ♀	100810	157141	4. 1. 50 ♀	4. 45. 0 ♀	4. 43. 20 ♀	1. 40 +	1. 10
11	15 April. H. 12. 5	5. 36 ♀	100866	156900	5. 1. 41 ♀	3. 58. 57 ♀	3. 58. 20 ♀	0. 37 +	1. 4
	6 Maji. H. 11. 20	25. 49 ♀	101366	154326	15. 30. 36 ♀	27. 8. 17 ☿	27. 7. 20 ☿	0. 57 +	0. 7
12	1591. 13 Maji. H. 14. 0	2. 10 ♀	101467	147891	12. 7. 38 ♀	2. 15. 36 ♄	2. 20. 0 ♄	4. 24 -	Aust. 2. 25
	6 Junii H. 12. 20	24. 59 ♀	101769	144981	25. 38. 48 ♀	27. 11. 45 ♀	27. 15. 0 ♀	3. 15 -	3. 55
13	10 Junii H. 11. 50	28. 47 ♀	101789	144526	27. 56. 49 ♀	25. 57. 57 ♀	26. 2. 36 ♀	4. 39 -	4. 8
	28 Junii H. 10. 24	15. 51 ☿	101770	142608	8. 29. 32 ♄	21. 4. 21 ♀	21. 10. 0 ♀	5. 39 -	4. 45
15	1593. 21 Julii H. 14. 0	8. 26 ♀	101498	138376	20. 1. 38 ☿	17. 43. 14 ♀	17. 45. 45 ♀	2. 31 -	5. 46
	22 Aug. H. 12. 20	9. 11 ♀	100761	138463	10. 15. 25 ♀	13. 9. 39 ♀	13. 10. 15 ♀	0. 36 -	6. 7
17	29 Aug. H. 10. 20	11. 54 ♀	100562	138682	14. 37. 15 ♀	11. 11. 41 ♀	11. 14. 0 ♀	2. 19 -	5. 52
	3 Octo. H. 8. 0	20. 15 ☿	99500	140697	6. 19. 39 ♀	7. 49. 54 ♀	7. 50. 10 ♀	0. 16 -	3. 17
19	1595. 17 Sept. H. 16. 45	4. 18 ☿	99990	143222	22. 49. 19 ♀	26. 5. 45 ♀	26. 7. 12 ♀	1. 27 -	1. 42
	27 Octo. H. 12. 20	13. 59 ♀	98851	147890	15. 35. 38 ♀	18. 50. 46 ♀	18. 51. 15 ♀	0. 29 -	0. 6
21	3 Nove. H. 12. 0	21. 2 ♀	98694	148773	19. 26. 33 ♀	16. 18. 33 ♀	16. 18. 30 ♀	0. 3 +	0. 17
	18 Dece. H. 8. 0	6. 43 ♄	98200	154539	13. 2. 29 ♀	11. 39. 1 ♀	11. 40. 0 ♀	0. 59 -	1. 40

[E-S]距離とは地球と太陽間の距離。平均距離を、100000 とした。[M-S]距離とは火星と太陽間の距離、その基準は[E-S]距離に
 ならう。星座記号は、♄ おひつじ座、♃ おうし座、♂ ふたご座、☿ かに座、♁ しし座、♊ おとめ座、♋ てんびん座、♌ さ
 そり座、♍ いて座、♎ やぎ座、♏ みずがめ座、♐ うお座。図3の番号と表の番号は対応する。ただし、KAN 所載のデータから6
 個のケースを除いた。緯度の Bor. は北緯、Aust. は南緯。時点の読みは、例えば、1の、1582. 23 Nove. H. 16. 0 は、1582年11月23
 日16時0分である。

ラーは、ブラーエを裏切ることができなかつたのである。

火星の遠日点の方向は、ケプラーによれば、1588 年には、しし座 29°の方向である²⁷⁾。遠日点は観測値から直接には得られないから、これを決めるのは容易ではない。KAN では数十回にわたる試行を経て求められたようである。筆者も彼の方法によって数回試みたが、火星の四つの位置から遠日点方向を導き出すことを何回も行わなければならず、しかも三角関数の細かい値などを必要とするので膨大な計算量が要求される。

図3の火星の楕円軌道上の位置は理論値

である。しかし、理論値も観測値もわずかな相違しかなく、図3のような小さなものでは、それらの位置は同じ地点になってしまう。

図の1から22までの番号の位置は、表の番号のデータに対応する。例えば、1の地球から1の火星を観測すると、その方向は、かに座 26°40'0" である。平行線は恒星が太陽と地球からはほとんど無限ともいえるほど遠いために描かれたものである。番号14の場合も同様である。

遠日点は移動する。ケプラーは紀元 140 年から 1587 年までの遠日点の動きを把握し、その1年の動きを 1'4" と算出している

28)。プラーエのデータによれば、火星の近日点は、1588年時点で、みずがめ座29°の方向である。一方、1960年では、火星の近日点は、335°32'で²⁹⁾、これは、うお座5°19'である。1588年から1960年まで372年経過している。遠日点とともに近日点も動くと考えられるから、近日点は、この間に、みずがめ座29°から6°36'8"動いたことになる。その方向は、うお座5°36'8"である。ケプラーの数值は、この現代の数值とかなりずれている。これをどう評価すべきか。筆者には判断しかねる問題である。

ところで、図3の基になった表のデータ

をよく見ると、理論値と観測値とのずれが5'を越えるケースが二つある。番号2では、5'50"、番号14では、5'39"のずれがある。上に述べたように、豊頬形の場合では、ずれが5'を越えていた。そのときには、その軌道をしりぞけている。楕円の場合は5'を越えているにもかかわらず、理論を許容している。ケプラーのこの判断は、彼が単に理論と観測値との整合性だけを追求しただけではないことを示している。理論の選択取捨にあたっては、理論がもつ単純性や美しさなども重要な基準になり得るだろう。さらに大事なことは、数学理論によって、

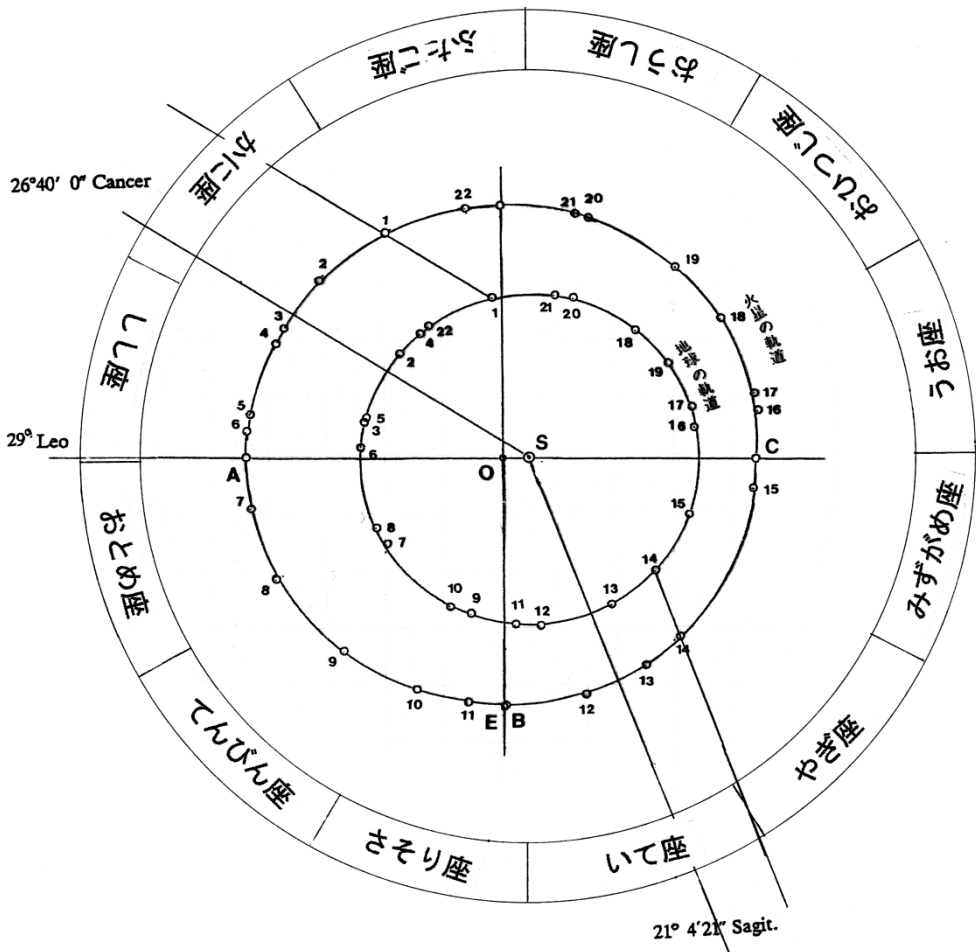


図3

データ全体を一挙に把握できることである。楕円では離心率と長軸の長さが判れば、形全体が決まる。これに速度が判明すれば、理論値データをすべて容易に決定できる。このようなことは、複雑な卵形や豊頬形には期待できないことであろう。

ともあれ、ケプラーが見出した楕円軌道は、彼の面積法則を併用することにより、惑星の位置を正確に求めるのに極めて有効であった。その成果はルドルフ表として刊行され実際的な目的に寄与した³⁰⁾。

地動説と楕円軌道論は江戸時代日本にも伝えられ、日本の天文学者（暦家）の知るところとなった。しかし、広瀬によれば、

「江戸の暦家はほとんど興味を示さなかった。江戸時代第一の暦家と称すべき高橋至時（1764-1804）でさえ、‘西洋近説は地を運動ならしめ、・・・太陽は天心にありて不動の物とす’とは書いているが、周転円運動も楕円軌道論もしょせんは暦算家のテクニックであると述べ、要するに天体の推算位置と観測位置と合さえすればよいという中国古来の思想をそのまま受けついでいる。地動説を受け入れるなら、天動説は否定されるべきものというような徹底した考え方はなかった³¹⁾。」ルドルフ表を作り、算出位置と観測位置の一致を図ったケプラーにあっては、地動説と楕円軌道論は天体運動の真実であった。かれはその真実を人々に伝えるために生涯を捧げたのである。

誤解されないために、いそいで付け加えると、このことによって、高橋至時の事績を少しも貶めるつもりはないということである。彼は江戸時代にあってケプラーの楕円軌道論をいち早く学び、それに基礎にして、寛政の改暦を成し遂げている³²⁾。また、

伊能忠敬の師として、彼の地球の大きさの測定や日本全国の地図作成にも指導者としての役割をはたしている。

ケプラーの場合は、世界の真実の探求というアリストテレス以来の学問の伝統を背負っていたであろう反面、高橋にあっては、生活に役立つ実学を第一とする日本の伝統の下にあったとも考えられる。両者は異なる歴史を背景に学問研究に励んでいたのである。

本稿はもともと、KAN 所載の図1の解明を目的として考察を開始した。筆者自身はその図に限れば目的は十分達成できたと考えている。しかし、ケプラーの楕円軌道に関する物理的説明には不明な部分が残る。

例えば、図2のKAN の原図には周転円に相当する円が描かれている。図4がそれに相当する。図において四辺形KHNP および四辺形IHNQ はいずれも平行四辺形で、円の一つは、P を中心とし、半径[HN]をもつもの、他は、Q を中心とし同じ半径[HN]をもつもの

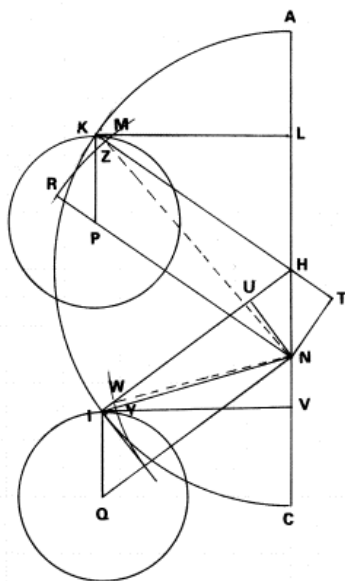


図4

のである。点Rは、直線NPの延長上にあり、 $[RN]=[KT]$ を満たすものである。

ケプラーの楕円軌道に関する著書で、この図に言及しているのは、クリストファー・ウォーカー編『望遠鏡以前の天文学』である³³⁾。これは、ケプラーの天文学解説書として魅力的な本である。図4に関する説明では、直線NRが、RPを通る周転円の直径上を「揺れる」としている。しかし、この動きは楕円とは何ら関係ないであろう。また、直線RPがNを中心として「揺れる」としても、この揺れ動きも楕円とは何の関係もない。結局、そこでも周転円と楕円とのつながりが不明である。おそらく火星の秤動に関連する円であろうが、秤動と円との接続は、現時点で筆者にはわからない。もし、この周転円の意味が解明されれば、ケプラーの火星の物理的力に関する考えが一層明らかになるであろうが、現状ではまだ不明のままである。

それにしても、望遠鏡の発明以前、肉眼と簡便な道具のみで、地球と火星の運行軌道を図3にあるような単純性と明確性と、同時に実用性を備えて把握できたことは、驚嘆に値することではなかろうか。ケプラー以外誰にもなしえなかった偉功であろう。

ともあれ現在の時点では、図1の数学的解明と、ケプラーの楕円軌道に至る大筋の把握、そして図3の楕円軌道の提示をよしとして本稿の本論を終わろう。

付節

ケプラーの火星軌道の関しては、翻訳書を含めて、日本語で書かれている文献は数多くある。科学史の本はほとんどが火星軌道の楕円について言及している。しかし、

その述べ方は様々であつさり軌道が楕円であることのみを述べているものや、楕円軌道を描いて面積法則を提示しているもの、さらには、本稿の図1に踏み込んでやや詳しく説明しているものまでである。以下、本稿の趣旨から、図1を、その一部だけでも、使用して楕円軌道を論じている文献をとりあげよう。

その種の本として、古くから、ダンネマンの『大自然科学史』³⁴⁾がある。そこでは、第二節図1のケプラーの原図が掲載されていて、図中の点線が楕円となることを、アポニウスの命題が適用されることを説いている。しかし、図については、それのみで多数の実線について何ら説明がない。 $\angle 5^{\circ}18'$ の指示もない。研究書でないからやむをえないであろうが。

中山 茂編『天文学史』³⁵⁾は光学的均差(本稿の視覚的均差)と $\angle 5^{\circ}18'$ に言及している。それらに関する図と本稿の図1を比較すると、図の三日月形の厚さは $e^2/2$ としている。この場合、図1では、NBの長さ $[NB]^2 = (1 - e^2/2)^2 + e^2 > 1$ から $[NB] > 1$ となってしまう。ケプラーでは、 $[NB] = 1$ でなければならない。また、 $\angle 5^{\circ}18'$ の数値はあるが、その場所は明示されていない。

これら二書より以前に出版されたアーサー・ケストラーの『ヨハネス・ケプラー』は、近年復刻版が出された(2008年)³⁶⁾。そこでは、火星から見たときの太陽と離心円の中心との角を「光学差」としている。「光学差」とは、ケプラーの視覚的均差のことであろう。しかし、重要な $\angle 5^{\circ}18'$ は図1の $\angle HBN$ となっている。これではケプラーのその後の推論に適応できない。第二節の**目覚めの命題**は得られないからである。その

ためか、火星と太陽を結ぶ距離を表す式： $[NM] = 1 + e \cos \beta$ について、ケプラーは次のように述べている³⁷⁾。

ケプラーは、「この公式が明確に軌道を楕円に定めるものだというをまだ自覚していなかった。今日では、ちょっとした解析幾何学の知識がある学生ならば、一見してこのことを了解するであろう。」

だが、この文言は、ケプラーがケプラーの数学の知識を低く見すぎた結果書かれたものであろう。この程度の知識は、ユークリッド幾何学とアポロニウスの円錐曲線や三角関数の知識があれば容易に理解できるものである。ケプラーはそれらに精通していた。何も解析幾何学の知識をもちだすまでもないのである。ケプラーは「夢遊病者ケプラー」を強調するあまり、彼の数学的知識を軽んじているようだ。

2008年に初版がでたクリストファー・ウォーカー編『望遠鏡以前の天文学』³⁸⁾では、図1における太陽Nと火星Mの距離 $[NM]$ に相当する式として、 $[NM] = R + e \cos \phi$ を得ている。ただし、Rは離心円の半径、eは太陽と離心円の中心との距離、 ϕ は図1の $\angle KHA$ である。これは第二節の $1 + e \cos \beta$ に対応する。さらに第三節の豊類形についても適切な説明がなされている。しかし、楕円軌道を得るのに必要で重要な関係 $[NM] = [KT]$ が示されていない。したがって、 $[NM]$ の上式が導かれる過程が不明である。

KANについて踏み込んで考察しているのが、山本義隆の『世界の見方の転換』3.である³⁹⁾。とくに、ケプラーの楕円軌道と面積法則について詳しい。この書には、本書の図1をやや簡略化した図が載せられている。そこでは、図1の $\angle NBH$ が $5^\circ 18'$ とさ

れ、

$$[NB] = [HB] \sec 5^\circ 18' = 1 \quad (4)$$

と算出し、ケプラーは、この式で「新しい眠りから覚まされた」としている。そして、これを一般化して、 $[KT] = a(1 + e \cos \phi)$ を得ている。ただし、aは離心円の半径。本書では1としたものである。Kは離心円上の点である。

しかし、一般化した時に、離心円上の点Kを考えておきながら、最初の関係式(4)では、楕円上の点Bを考えている。これにはやはり疑問が残る。最初としては、離心円上の点Eを含む線分EHをとるべきではなかったのではないか。

ケプラーが眠りから目覚めた関係は、第2節で述べたように、図2において

$$[NE] \cos 5^\circ 18' = [EH] = 1 = [BN]$$

という関係が成り立つ。

これを一般化すれば、

$$[NK] \cos \angle NKT = [KT] = 1 + e \cos \beta$$

が得られるのである。そして、最終的には、この式が火星と太陽との距離を与える。このことが上の第3節で述べたことにほかならない。

以上、図1に言及している従来の文献を取り上げ、主として本稿との相違点について述べてみた。最後に取り上げた『世界の見方の転換』3は、著者の緻密な論理、該博な知識、関連する諸論稿への言及、どれも敬服に値する。ことにケプラーおよび彼以前の近代科学誕生前夜のヨーロッパの知識人たちを活写していて興味尽きない書であった。ただ、ここでは、本稿と関連する個所について疑問を呈したまでである。

注]

- 1) ヨハネス・ケプラー著『新天文学』岸本良彦訳、工作舎、2013年。以下では、本文と同様に、これをKANと略記する。筆者の以前の発表は、原書の英訳である J. Kepler 『New Astronomy』 tr. by W. H. Donahue, Camb. Univ. Press, 1992 によったものである。
- 2) KAN、序文、p. 59
- 3) チコ・ブラーエ(1564-1601)はデンマークの貴族にして天文研究者。望遠鏡以前の時代に、肉眼による観測として最も精密なデータを残した。彼の20年にわたる観測データは死後ケプラーに受けつがれKAN執筆の基盤となった。
- 4) 火星軌道に関するブラーエの観測データとケプラーの理論値の一部は本稿表にまとめられている。
- 5) これに類する言葉は科学史の本に多数みられる。代表的なものとして、村上陽一郎『西欧近代科学』(新版)新曜社、p. 87。そこでは「円の魔力」という言葉が使われている。
- 6) 現在、準備中の「パタンと表象」IV[言語と真理]において論じる。
- 7) KAN、第59章、p. 542。他に、pp. 547, 550, 556, 561にも同じ図が現れる。
- 8) KAN 第56章、p. 510
- 9) KAN 第58章、p. 540
- 10) KAN 第42章、pp. 413-4、第54章、p. 507
- 11) 図4の $\angle NKH$, $\angle NEH$, $\angle NIH$ はすべて視覚的均差。ただし、 $\angle AHE$, $\angle ANJ$ はいずれも直角。EHより上の部分では、 $\angle NEH$ が最も大きい。一般に、 $\angle NJH$ で最大となる。ケプラーは幾何学的手法で、これを証明している。KAN、第29章、p. 337。微分法を使えば簡単に分かる。

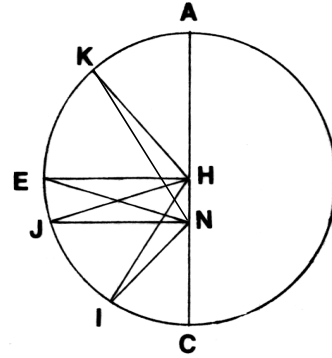


図5

- 12) KAN 第59章、p. 542
- 13) KAN 第39章、p. 378
- 14) KAN 第19章、p. 266
- 15) KAN 訳者注、p. 639
- 16) KAN 第40章、p. 388
- 17) KAN 第44章、p. 422
- 18) KAN 第48章、p. 456
- 19) KAN 第48章、p. 456
- 20) E. J. Aiton, Kepler's Path to the Construction and Rejection of his First Oval Orbit for Mars, *Annals of Science*, 35(1978), p.190
- 21) KAN 第48章、p. 456
- 22) KAN 第58章、p. 538
- 23) KAN 第57章、p. 539
- 24) KAN 第57章、p. 522
- 25) E. J. エイトン、『円から楕円へ』渡辺正雄監訳、共立出版、pp. 62-3
- 26) KAN 第53章、P. 504。ここでは、Max Casper 編集による、Johannes Kepler *Gesammelte Werke BAND III 『Astronomia Nova』* 所載の表を用いた。
- 27) KAN 第42章、p. 413。同書 第57章、p. 524
- 28) KAN 第17章、p. 257
- 29) 佐伯恒夫『火星とその観測』、恒星社厚生閣、1977年、p. 21

- 30) ケプラーは晩年天文表の作製に専念。1627年『ルドルフ表』として出版。
- 31) 広瀬秀雄 『年・月・日の天文学』、中央公論社、1978年、p. 41
- 32) 同書、p. 190
- 33) クリストファー・ウォーカー編『望遠鏡以前の天文学』、山本啓二、川和田晶子訳、恒星社厚生閣、2008年、p. 267
- 34) フリードリヒ・ダンネマン『大自然科学史』
4 安田徳太郎訳、三省堂、1978年、p. 275
- 35) 中山 茂編『天文学史』、1982年、pp. 92-3
- 36) アーサー・ケストラー『ヨハネス・ケプラー』小尾信弥/木村 博訳、1971年、河出書房新社、p. 189(訳注)。復刻版は、ちくま学芸文庫、2008年
- 37) 同書、p. 190
- 38) クリストファー・ウォーカー編、前掲書
p. 267
- 39) 山本義隆『世界の見方の転換』3、みすず書房、2014年、p. 1065