

観測スピルオーバー回避のための空間フィルタ設計法に関する一考察

Spatial Filter Design for Observation Spillover Suppression

細矢直基*, 松村雄一**

Naoki HOSOYA and Yuichi MATSUMURA

This paper addresses the design method of spatial filter for suppressing modal observation spillover. To eliminate the several selected modal amplitudes from structural vibration responses, a kind of modal filter is introduced. This filtering methodology can be realized by a small number of sensors, relative to the number of dominant modes in target frequency range. The method is validated by applying it to a beam structure.

Key Words: Modal Analysis, Filter, Measurement, Modal Filter, Obsevability, Frequency Response Function, Impact Testing

1. 緒 論

センサ出力に含まれる複数のモードを同時に不可観測にする方法は、観測スピルオーバーの回避や、低次元物理モデルの作成に有用である。著者らは過去に構造物の振動をポイントセンサで測定する際に、センサ出力に含まれる多数のモードの中から、任意に選択された複数のモードを同時に不可観測とする空間フィルタの設計法を提案した⁽¹⁾。一方、モードの直交性を利用した空間フィルタであるモーダルフィルタを実現するには、分布定数系センサとポイントセンサを用いる 2 通りの手法が提案されている^{(2), (3), (4)}。しかし、分布定数系センサを利用する場合には、モード関数が既知で、モード形状にセンサを整形できるような比較的単純な構造物にしか適用できない。

また、ポイントセンサを利用すれば、複雑な構造物においても、モーダルフィルタリングが実現できるが、対象とする周波数帯域に含まれるモードと同数以上のセンサが必要であるという課題がある。

本論文では、提案する手法を解析的にモード関数が得られない一般構造物に適用する手法について検討する。また、振動試験を通してその有効性を検討する。複雑な形状や境界条件の構造物に対するモードベクトルは有限要素モデルを用いて推定する。有限要素モデルによるモードベクトル（以下、解析モードベクトルと呼ぶ）は真値ではないため、これを用いて設計した空間フィルタを振動試験により修正する。本論文では、センサ数が 2 個の場合を例に、詳細なフィルタ設計法を述べる。最後に、設計された空間フィルタを片持ちはりの打撃試験で実際に得られた加速度応答へ適用し、所望のフィルタリングが実現することを確認する。

2. 複数のモードを不可観測とする空間フィルタ

2.1 フィルタ設計法の概念 所望のモードを不可観測とする空間フィルタ設計法の概念を説明する。説明を簡単化するために、取り付けのセンサ数が 2 個 s_1, s_2, s_3 次モードの 3 つのモードを不可観測とする場合を例に説

*埼玉大学 大学院理工学研究科

Gaduate School of Science and Engineering, Saitama University, 255 Shimo-Okubo, Sakura, Saitama, Saitama 338-8570, Japan

**滋賀県立大学 工学部

Facaluty of Engineering, University of Shiga Prefecture, 2500 Hassaka, Hikone, Shiga 522-8533, Japan

明する．この概念図を図 1 に示す．はじめに，不可観測の対象とするモードのモードベクトル ϕ_{s_l} ($l=1,2,3$) が，2次元空間の中で同一の直線上に存在するようにセンサを配置する．

$$\phi_{s_1} = \lambda_1 \phi_{s_2} = \lambda_2 \phi_{s_3} \quad (1)$$

ここに， λ_1, λ_2 はゼロでない任意の実数である．今， ϕ_{s_1} に直交なベクトルとして，空間フィルタベクトル ψ_s を求めると，次式の関係が成り立つ．

$$\psi_s^T \phi_{s_l} = 0, \quad \forall l \quad (2)$$

このとき，不可観測の対象でないモードに対し，この空間フィルタベクトルは直交しないと仮定する．

$$\psi_s^T \phi_q \neq 0, \quad \forall q (\neq s_1, s_2, s_3) \quad (3)$$

2.2 フィルタの設計 センサ数 2，不可観測モード数 2 の場合の空間フィルタの設計法を示す． s_1, s_2 次のモードベクトルが 1 次従属になるセンサ配置を行うことで，所望の空間フィルタを設計する．今， s_1, s_2 次のモードベクトルを列要素とする行列の行列式を次式で定義する．

$$W_{s_1, s_2, x}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \phi_{s_1, x}(x_1) & \phi_{s_2, x}(x_1) \\ \phi_{s_1, x}(x_2) & \phi_{s_2, x}(x_2) \end{vmatrix} \quad (4)$$

所望のセンサ配置は各センサが同位置にないという条件下で，次式を満たす解の組 (x_1, x_2) を探索することに等しい．

$$W_{s_1, s_2}(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 \neq x_2 \quad (5)$$

求めたセンサ配置 (x_1, x_2) において，モードベクトル ϕ_{s_1}, ϕ_{s_2} を算出し，これらのベクトルに共に直交な空間フィルタベクトル ψ_s を求める．具体的には s_1 次モードを用いて，次式のように算出する．

$$\psi_s = \begin{Bmatrix} \phi_{s_1}(x_2) \\ -\phi_{s_1}(x_1) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(5)は， s_1, s_2 次モードのいずれか一方あるいは両方の節の位置が，2 つのセンサ位置と同位置である場合にも満たされる．従って，式(5)は，モードの節を利用して，任意のモードを不可観測とする手法を包含したものと考えられる．いずれかのモードの節にセンサが配置されるとき，残るモードのモードベクトルに直交なベクトルを空間フィルタベクトルとすればよい．

2.3 フィルタリング 構造物上に配置された複数のポイントセンサの出力を，モード座標で表現する． N 個のポイントセンサを用いて，サンプリング Δt で振動を測定する場合について示す．対象とする周波数範囲で支

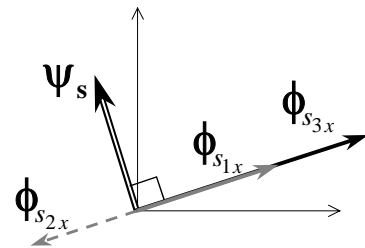
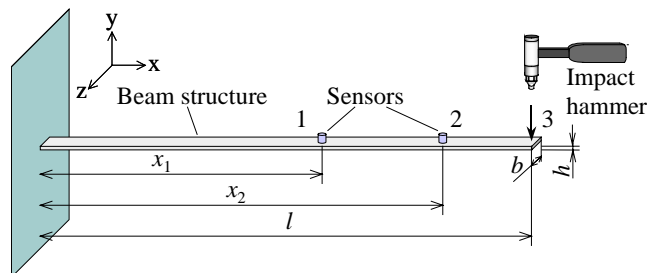


Fig. 1 Concept of proposed spatial filter (Number of sensors: 2)



Material: Brass, Mass: 406g,

Size: $b=16\text{mm}$, $h=6\text{mm}$, $l=505$

Fig. 2 Schematic of experimental system

配的なモード数は Q ，モードベクトルは実数で表せると仮定する．このとき， n 番目のセンサ位置 x_n で時刻 $t_k = k\tau$ に測定されたセンサ出力 $z(x_n, t_k)$ は，次式で表せる．

$$z(x_n, t_k) = \sum_{q=1}^Q \phi_q(x_n) \eta_q(t_k) \quad (7)$$

ここに， q 次モードベクトル ϕ_q の位置 x_n に対応する要素を $\phi_q(x_n)$ ，時刻 t_k における q 次モードのモード振幅を $\eta_q(t_k)$ と表した．式(2), (3)の関係が成り立つセンサ配置が実現できるとき，多点応答の列ベクトル $z(t_k)$ の前から，空間フィルタベクトル ψ_s の転置を乗じて得た信号において， s_1, s_2, s_3 次モードだけが不可観測となる．

$$\psi_s^T z(t_k) = \sum_{q \neq s_1, s_2, s_3} \psi_s^T \phi_q \eta_q(t_k) \quad (8)$$

式(2)と式(8)の関係より， s_1 次と s_2 次モードのみが不可観測である 1 次元の時間領域信号が得られる．

3. 振動試験への空間フィルタの適用例

本手法を片持ちはりの振動試験へ適用し，その実現性を検証する．本手法の有効性を検証するために，複雑な構造物を例にせず，あえて解析解が既知である図 2 に示す片持ちはりを対象とし，対象自由度は曲げ振動（並進 1 自由度）とした．

3.1 空間フィルタの設計方法の流れ

空間フィルタ設計法の流れを図3で説明する。まず、本手法により (i)解析モードベクトルに基づいてセンサ配置を仮に決定し、空間フィルタを設計する。次に、(ii)設計された仮のセンサ配置に従い、対象構造物にポイントセンサを取り付け、振動試験を行い、(iii)モード特性(固有振動数、固有モードベクトル(以下、実験モードベクトルと呼ぶ))を同定する。(iv)有限要素解析と振動試験で得られたモードベクトルを比較することで、有限要素モデルのモード特性の精度を検証する。ここで、一般的には、両者のモデルには違いが存在するため、(v)振動試験により得られたモード特性に基づいて空間フィルタを再設計する。(vi)再設計された空間フィルタに基づき、センサの再配置(センサ位置の修正)を行い、モードベクトル間の角度が所望の許容誤差範囲に収束した後、(vii)フィルタリングを行う。

3.2 有限要素モデルに基づく空間フィルタの仮設計

本論文で対象としたはり、長さが505mm、16×6mmの長方形断面を持ち、黄銅製である。縦弾性係数は92.8GPa、密度は8429kg/m³、ポアソン比0.33とした。節点数は1011、要素数は1010とした。減衰比は、モード減衰比(0.5%)として考慮した。まず、はりの曲げ振動(並進1自由度)を対象とした固有値解析を行い、有限要素モデルの検証を行った。表1に有限要素解析により得られた固有値を示す。比較のためはりの解析解により得られた固有値を示してある。表1を見ると、両者はほぼ一致しており、作成したはりのFEモデルが妥当であることがわかる。次に、FEモデル、解析解から得られたそれぞれのモードベクトルの相関性をモード信頼性評価基準(Modal Assurance Criterion: MAC, 以下MACと略記)により検証する。表2に有限要素モデルと解析解の相互MAC値を示す。表2より両者のモードベクトルの相関性が高いものの、若干の誤差が存在することがわかる。

次に、有限要素モデルを用いて、提案法により空間フィルタを仮設計する。空間フィルタは、取り付けるポイントセンサ数を2、不可観測とするモード数を2として設計した。図2のように2つのセンサは、はりの固定端からそれぞれ x_1, x_2 に1個ずつ配置した。このとき、それぞれのセンサ位置は($x_1 < x_2$)となるようにした。センサ距離は、はりの長さ l で正規化し、はりの長さに依存しな

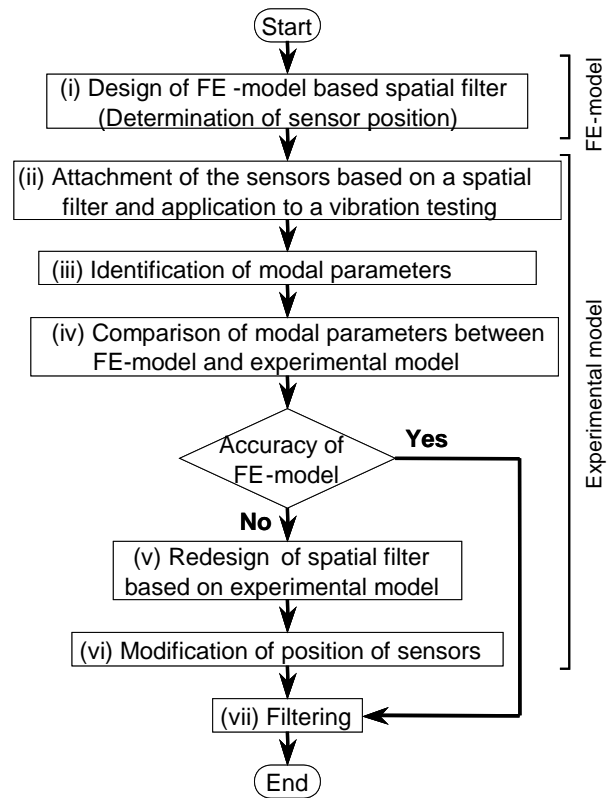


Fig. 3 Procedure of spatial filter design

Table 1 Natural frequency of the beam structure

| Natural frequencies [Hz] | | |
|--------------------------|-------|-------------|
| Mode | FEM | Theoretical |
| 1st | 12.6 | 12.6 |
| 2nd | 79.0 | 79.0 |
| 3rd | 221.2 | 221.2 |
| 4th | 433.3 | 433.7 |

Table 2 Modal assurance criterion

| Mode | MAC |
|------|------------------|
| 1st | 0.9999999999665 |
| 2nd | 0.99999999502509 |
| 3rd | 0.99999994048669 |
| 4th | 0.99999976004308 |

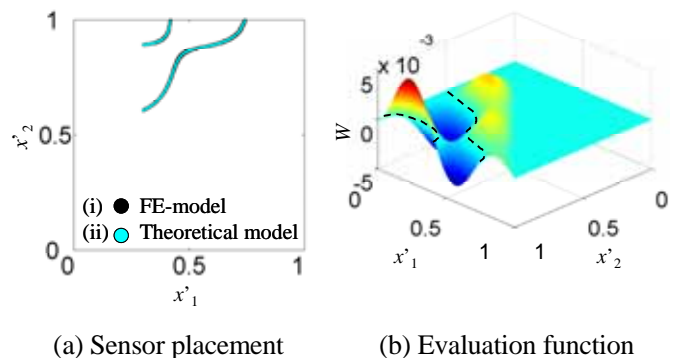


Fig. 4 Selected sensor placement by using two sensors (target modes:3, 4)

いセンサ配置を求めた．

$$x'_1 = \frac{x_1}{l} \quad (9)$$

$$x'_2 = \frac{x_2}{l} \quad (10)$$

有限要素モデルでは離散的なセンサ配置しか選択することができないため、式(5)を満たすセンサ配置を求めることは困難である．そこで、本論文では、以下の式を満たすセンサ配置を探索することとした．

$$|W_{s_1, s_2}(x_1, x_2)| \leq \alpha, \quad x_1 \neq x_2 \quad (11)$$

ここで、 α は許容誤差を表す任意の正の実数である．このとき、センサ配置は離散的な値となるため、 s_1 次モードと s_2 次モードは必ずしも同一直線上にない．式(6)の空間フィルタベクトルは、 s_1 次モードにのみ直交しているため、 s_2 次モードに対しては完全に不可観測にならない．そこで、 s_1, s_2 次のモードを共に同程度の精度で不可観測とするため、空間フィルタは次式で設計する．

$$\Psi_s = \begin{cases} \phi_{sum}(x_2) \\ -\phi_{sum}(x_1) \end{cases} \quad (12)$$

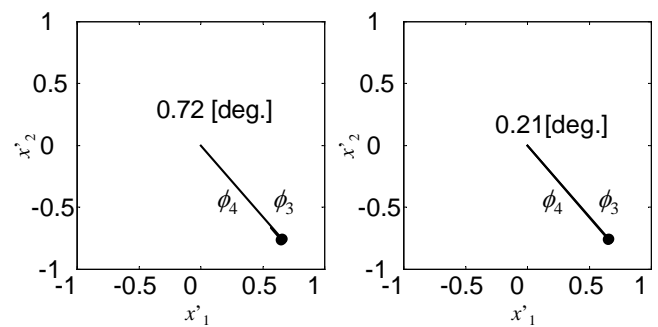
ここに、

$$\phi_{sum} = \phi_{s_1} + \phi_{s_2} \quad (13)$$

図 4 は解析モードベクトルに基づいて設計されたセンサ配置の一例で、不可観測とするモードは 3, 4 次モードである．ここに、1, 2 次モードを不可観測とするセンサ配置は存在しなかったことを注記しておく⁽¹⁾．図 4(a)では、(i) 解析モードベクトルに基づいて設計した空間フィルタ、(ii) 解析解から設計したフィルタを重ねて示してある．図 4(a)はセンサ位置を点で表したものであるが、点が重なることで実線となっている．本設計例では、実際の振動試験を考慮すると固定端の近くで SN 比の低下が予想されるため、固定端から 0.3 (正規化された長さ) 以下にはセンサ配置を行わないようにした．図 4(a)より(i)のフィルタは(ii)のフィルタとほぼ一致していることがわかる．図 4(b)に示した評価関数 W を見ると、 W がゼロを通過する点 (図中の破線) が図 4(a)に示すセンサ配置と一致しており、図 4(a)のセンサ位置の組み合わせ以外には解が存在しないことが確認できる．正規化されたセンサ位置として (0.728, 0.968) を選択したところ、2 つのモードベクトルがなす角度は 0.12deg. でほぼ同一

Table 3 Natural frequency of the beam structure

| Natural frequencies [Hz] | | | |
|--------------------------|--------------|-------|---------------|
| Mode | Experimental | FEM | Difference[%] |
| 1st | 12.1 | 12.6 | -4.0 |
| 2nd | 76.6 | 79.0 | -3.0 |
| 3rd | 214.7 | 221.2 | -2.9 |
| 4th | 420.8 | 433.3 | -2.9 |



(a) Before modification (b) After modification

Fig. 5 Angle between modal vectors in selected sensor placement

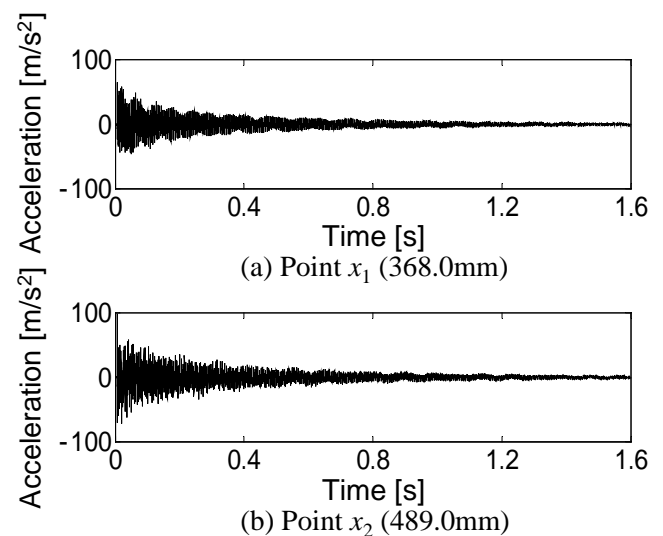


Fig. 6 Measured accelerations

直線上に存在していた．有限要素モデルが妥当であれば、所望のモードを同時に不可観測にする空間フィルタがほぼ実現されることになる．この有限要素モデルを用いて数値的に求めた加振応答に対してフィルタリングして得た信号においては、所望のモードのモード峰がほぼ不可観測になることが確認された．

3.3 振動試験での空間フィルタリングの検討

片持ちりの振動試験に対して、解析モードベクトルから設計した仮の空間フィルタの適用し、空間フィルタ

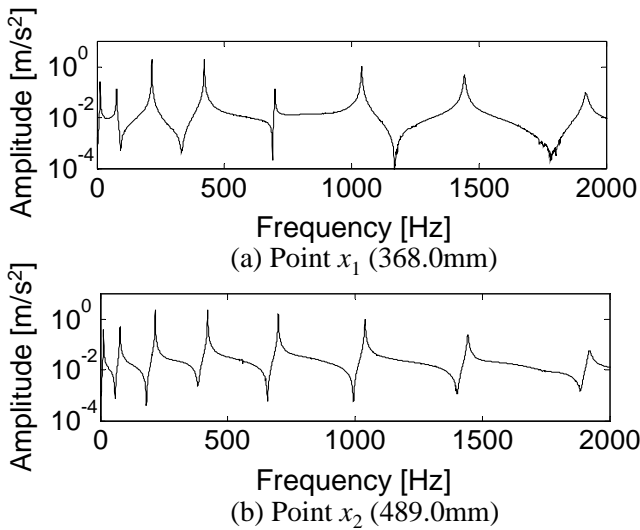


Fig. 7 Spectra of measured accelerations

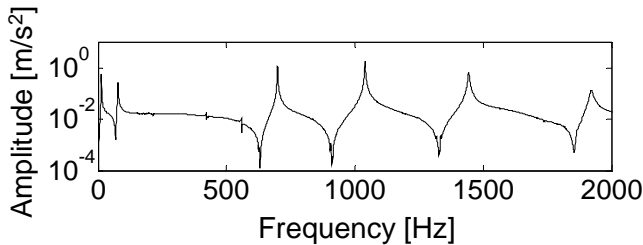


Fig. 8 Spectrum of filtered accelerations (target modes: 3,

リングの有効性を確認する．実験モードベクトル間の角度が所望の許容誤差範囲より大きい場合には，空間フィルタを実験モードベクトルを用いて修正する．

3.3.1 応答の測定方法 図2に振動試験に用いた片持ちはりを示す．加振点は，はりの点3（自由端）とした．測定点はそれぞれ点1, 2とし，固定端からの距離をそれぞれ x_1, x_2 とした．測定点には，加速度センサ(PCB M352C65/C66: 2g)をそれぞれワックスで取り付けた．インパクトハンマで点3に加振力を作用させたときのそれぞれの時刻歴応答を測定した．また，モード特性を同定するために周波数応答関数（Frequency Response Function: FRF, 以下FRFと略記）の測定を行い，FRF測定時の平均化回数は4回とした．

3.3.2 空間フィルタリング まず，解析モードベクトルと実験モードベクトルを比較することで，有限要素モデルに基づいた仮の空間フィルタがそのまま実機に適用できるかを検証する．表3にはりの固有振動数で，表の一番右の列には有限要素モデルと実験モデルとの差が示してある．表を見ると，実験モデルは有限要素モデルに比べ約4%の差が生じていることがわかる．これより，

解析モードベクトルより仮設計した空間フィルタを振動試験に適用すると，十分なフィルタリング精度が得られないことが考えられる．そこで，解析モードベクトルから仮設計した空間フィルタを実験モードベクトルにより再設計した．図5に空間フィルタの再設計時のモードベクトルのなす角度を示す．図5(a)を見ると，2つのモードベクトルがなす角度が若干大きいことがわかる．これは，実験の境界条件，センサ質量などの影響によるものと考えられる．ここでは，2つのモードベクトルをさらに同一の直線上に存在させるために， x_1 のセンサ位置を $\pm 3\text{mm}$ の範囲で0.5mmずつ変化させ，センサ位置の修正を行った．修正後のモードベクトルのなす角度を図5(b)に示す．図5(b)を見ると，図5(a)に比べ，モードベクトルがほぼ同一の直線上に存在していることがわかる．このときの図5(a)と図5(b)における x_1 の位置の差は1mmであった．

図6,7にはりの点1, 2で測定された加速度応答とそのスペクトルを示す．図6の加速度応答に対してフィルタリングした結果を図8に示す．これらは，図5(b)の空間フィルタを適用したもので，不可観測の対象モードを3, 4次モードとした場合のフィルタリング結果である．図8より，3, 4次モードがほぼ不可観測となっており，本手法による空間フィルタはセンサ応答に含まれるモード成分の数には全く依存せず，所望のモードだけを不可観測にできることが確認できる．

4. 結 論

本論文では，解析解を持たない一般構造物に対して，所望の複数モードを同時に不可観測とする空間フィルタを設計する手法と，これを実験的に実現するための手法について検討した．これにより以下の結論を得た．

- (1) 片持ちはりの打撃試験により得られた加速度信号に対して空間フィルタを適用し，本手法が振動試験において実現できることを示した．また，センサ応答に含まれるモード成分の数には依存せず，所望のモードだけを精度良くフィルタリングできることを示した．
- (2) 対象構造物の有限要素モデルを利用して，所望のモードを複数同時に不可観測とする仮の空間フィルタの設計し，振動試験によって修正していく方法を提案し，空間フィルタリングの精度が向上することを示した．

謝 辞

本研究の一部は、スズキ財団の助成、及び平成17年度埼玉大学総合研究機構研究プロジェクト経費を受けて遂行されました。ここに、深く感謝の意を表します。

文 献

- (1)Matsumura, Y. and Hosoya, N., Spatial Filter Design for Observation Spillover Suppression, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71, No.706 (2005), pp.1976-1982.
- (2)Balas, M. J.,Active Control of Flexible Structures, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 25, No. 3, (1978), 415-437.
- (3)Meirovitch, L. and Baruh, H., Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Systems, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, (1982), 60-66.
- (4) Shelly, S. J., Freudinger, L. C. and Allemang, R. J., Development of an On-Line Parameter Estimation System Using the Discrete Modal Filter, Proceedings of 10th International Modal Analysis Conference, (1992), 173-183.