

時間遅延を有する半導体レーザにおける
コンシステンシーと複雑性解析

Consistency and complexity
in semiconductor lasers with time-delayed feedback

菅野 円隆、内田 淳史
Kazutaka Kanno, Atsushi Uchida

埼玉大学 大学院理工学研究科 数理電子情報部門
Department of Information and Computer Sciences, Saitama University

Abstract

Many nonlinear dynamical systems show the consistent behavior when they are driven repeatedly with a complex signal, which is called consistency. Application of consistency to physical one-way function has been expected. In this work, we investigate the consistency of coupled semiconductor lasers with optical feedback and measure the complexity of the coupled laser system by using Lyapunov spectrum. It is found that the complexity of coupled lasers decreases suddenly when consistency is achieved.

Key Words: chaos, laser, consistency, Lyapunov exponent, complexity

1. はじめに

多くの非線形システムは、繰り返し入力された信号に対して再現性のある振る舞いを示すことが知られており、この現象はコンシステンシー (consistency) と呼ばれている[1]。コンシステンシーとはシステムが同一の信号により繰り返し駆動された時に同一の応答信号を生成する現象である。例えば、非線形ダイナミカルシステム (Response と呼ぶ) に対して、カオスやノイズのような複雑な駆動信号を繰り返し入力することを考える。この時 Response は常に初期値が変化するために必ずしも同一の応答信号が得られるとは限らない。しかしながらコンシステンシー状態である場合、Response

は繰り返し入力される駆動信号に対して同一の応答信号を出力する。

これまでにレーザにおいてコンシステンシーは実験的に観測されており[1]、レーザカオスの超高速性を利用した GHz オーダーでの物理的一方向性関数[2]の実現への応用が考えられる。これはシステムの時間ダイナミクスを用いて物理的に一方向性関数を実現する方法であり、ハードウェア依存型の情報セキュリティ方式における重要な要素技術であると考えられる。

コンシステンシー状態におけるシステム全体の複雑性は物理的一方向性関数の実現において、その評価指標の一つとなり得る。しかし一方向に光結合されたレーザにおいてコンシステンシーが得られることは示されているが、結合状態におけるレーザシステム全体の複雑

* 〒338-8570 さいたま市桜区下大久保 255
電話 : 048-858-3490 FAX : 048-858-3716
Email : s11dm001@mail.saitama-u.ac.jp
auchida@mail.saitama-u.ac.jp

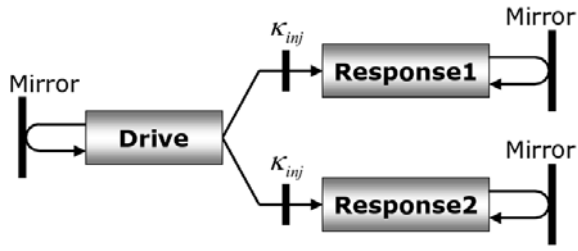


Fig. 1 Model.

性に関してはこれまでに調査されていない。特にコンシステンシーを示す場合と示さない場合において、システム全体の複雑性がどのように変化するのかについては全く分かっていないのが現状である。

そこで本研究では、時間遅延を有する光結合された半導体レーザにおいてコンシステンシーを観測し、その複雑性をリアプノフ指数を用いて評価することを目的とする。さらにリアプノフ指数からエントロピーや次元を算出し、システム全体の複雑性を定量的に評価する。

2. モデル

まず本研究で用いるモデルについて説明する。Fig. 1 は 3 つの半導体レーザ (Drive、Response 1、2 と呼ぶ) からなるモデル図である。コンシステンシーとはシステムが同一の信号によって繰り返し駆動された時に同一の応答信号を生成する現象であるが、本研究では Response 1 レーザと同一のパラメータを有し、かつ初期状態が異なる Response 2 レーザを用意する。この 2 つの Response レーザに Drive レーザから同一の信号を入力した時に同一の応答信号が得られればコンシステンシーが得られたと定義する。ここでレーザ間の結合強度 κ_{inj} と光周波数差 Δf を変化させた場合にコンシステンシーが達成されるかどうかを調査する。また各々のレーザは外部鏡からの時間遅延した戻り光によりカオスが発生している。このようなモデルを考え、数値計算では Lang-Kobayashi 方程式[3,4]と呼ばれる、複素電界とキャリア密

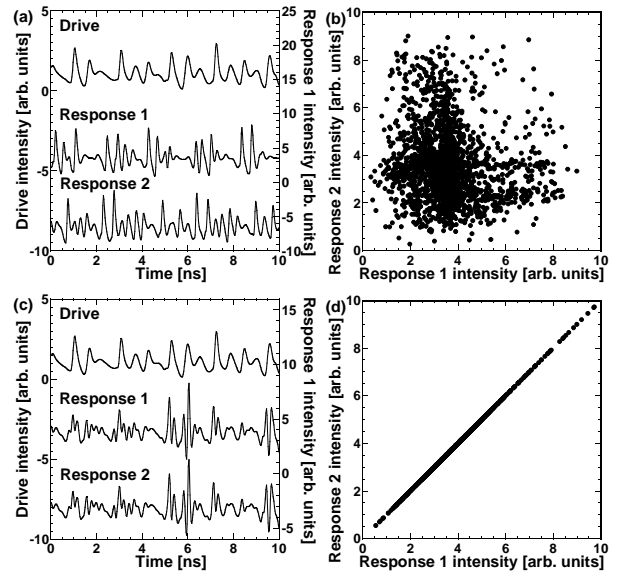


Fig. 2 (a), (c) Temporal waveforms of the three lasers and (b), (d) correlation plots between Response 1 and 2. (a), (b) The coupling strength $\kappa_{inj} = 0.0 \text{ ns}^{-1}$, (c), (d) $\kappa_{inj} = 31.1 \text{ ns}^{-1}$.

度からなるシングルモード半導体レーザのレート方程式を用いた。実際には、数値計算を簡単に行うために複素電界を実部と虚部に分け、無次元化方程式を用いて数値計算を行った。

3. 半導体レーザにおけるコンシステンシー

まず結合が無い時の 3 つのレーザの時間波形と Response 1-2 間の相関図を Fig. 2(a)、(b)に示す。Response 1、2 が異なる振る舞いをしてることを時間波形と相関図から確認することができ、コンシステンシー状態でないことが分かる。次に Drive から Response への結合強度を増加させた時 ($\kappa_{inj} = 31.1 \text{ ns}^{-1}$) の時間波形と相関図を Fig. 2(c)、(d) に示す。Response 1、2 のレーザの時間波形が等しくなっており、相関図も 45° の直線となっていることからコンシステンシー状態であることが分かる。つまり光結合された半導体レーザにおいて結合強度 κ_{inj} を増やすことによりコンシステンシーを達成した。

次にコンシステンシーを次の相互相関関数により定量的に評価した。

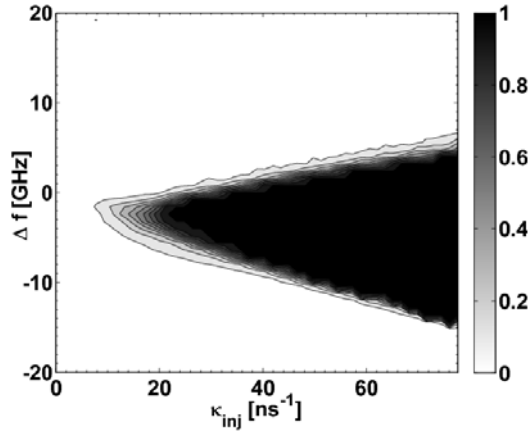


Fig. 3 Cross correlation C between Response 1 and 2 as functions of coupling strength κ_{inj} and optical frequency detuning Δf .

$$C = \frac{\langle (I_{r1}(t) - \bar{I}_{r1})(I_{r2}(t) - \bar{I}_{r2}) \rangle}{\sigma_{r1}\sigma_{r2}} \quad (1)$$

ここで I はレーザー強度、 \bar{I} はレーザー強度の時間平均、 σ はレーザー強度の時間波形の標準偏差、 $\langle \cdot \rangle$ は時間平均である。また下付きの $r1$ 、 $r2$ はそれぞれ Response 1、Response 2 レーザを表す。

Fig. 3 はレーザー間の結合強度 κ_{inj} と光周波数差 Δf を変化させた時の C の絶対値をグレースケールにより表している。 κ_{inj} を増加させるとコンシステンシー状態となる Δf の領域が特に負の方向に広がっていることが分かる。つまりコンシステンシーを達成するためには、光周波数差が負の領域で結合強度を増加させれば良いことが分かる。

4. エントロピーおよび次元の算出

本節ではリアプノフ指数からエントロピーおよび次元を算出することでシステム全体の複雑性を定量化する。リアプノフ指数を算出するためには、システムを表すモデル式から導出された微小変位に関する線形化方程式を数値計算し、微小変位の位相空間におけるノルムを求めなければならない。ここで時間遅延を有するシステムの場合、遅延時間分の微小変位全てをベクトルの成分とみなさなければならないことに注意する[5]。このようにして得られたノ

ルムの時間に対する拡大率の対数の時間平均からリアプノフ指数を算出することができる。

さらにリアプノフ指数は対象とする力学系の変数の数だけ存在するため、複数のリアプノフ指数を算出することができる。これはリアプノフスペクトラムと呼ばれている。特に半導体レーザーカオスはレーザーに遅延光を付加することで生じているため、非常に多く（理論的には無限個）のリアプノフ指数が存在する。このリアプノフスペクトラムから、システムの予測不可能性を示す Kolmogorov-Sinai エントロピー（KS エントロピー、 h_{KS} ）と、システムの次元を示す Kaplan-Yorke 次元（KY 次元、 D_{KY} ）を算出することができる。KS エントロピーの上限は正のリアプノフ指数 λ_i の和から計算される[4]。

$$h_{KS} = \sum_i \lambda_i \quad (\lambda_i > 0) \quad (2)$$

ここで KS エントロピーは情報の損失率を測定する指標であり、KS エントロピーが大きいことはシステムにおける高い予測不可能性を意味する。一方で KY 次元は以下のように計算される[4]。

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}, \quad \sum_{i=1}^j \lambda_i > 0 > \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i \quad (3)$$

KY 次元はシステムを記述するために必要な変数の数に対応しており、KY 次元が大きいとより複雑なダイナミクスとなる。また KY 次元は一般に小数次元であるフラクタル次元となる。

光結合された半導体レーザーシステム全体の KS エントロピーおよび KY 次元の算出結果を Fig. 4 にグレースケールにより示す。Fig. 4 において横軸はレーザー間の結合強度 κ_{inj} 、縦軸はレーザー間の光周波数差 Δf であり、黒い領域が値が高いことを表している。まず KS エントロピー (Fig. 4(a)) に関して、Fig. 3 と比較すると KS エントロピーはコンシステンシーの有無と関

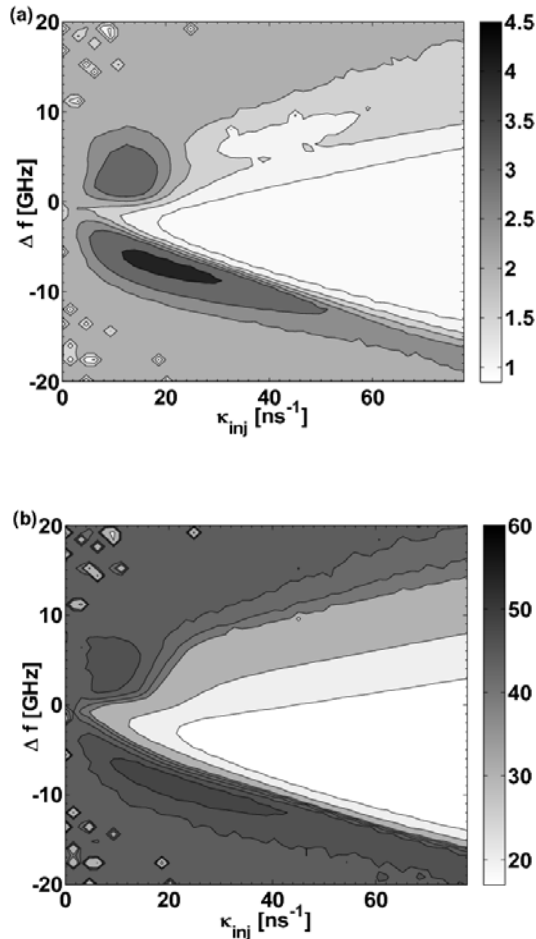


Fig. 4 (a) KS entropy and (b) KY dimension as functions of coupling strength κ_{inj} and optical frequency detuning Δf .

連付けることで3つの領域に分けることができる。Fig. 3でコンシステンシー状態となる領域では、KS エントロピーは結合が無い時の値 ($h_{KS} = 2.03 \text{ ns}^{-1}$) よりも低くなり、ほぼ一定値 ($h_{KS} = 0.85 \text{ ns}^{-1}$) に収束している (Fig. 4(a)の白色領域)。注目すべきはこの収束値が Drive のみに対して算出された値 ($h_{KS} = 0.86 \text{ ns}^{-1}$) と同程度であることである。これはコンシステンシー状態となると Response の位相空間内での軌道が Drive によって決定される軌道に収束し、Response のリアプノフ指数が全て負になるためである。次にコンシステンシー状態でない領域では、結合しているにも関わらず広範囲で結合が無い時の値と同程度であった (Fig. 4(a)の灰色領域)。しかしながらコンシステンシー状態となる領域の境界付近で KS エントロピーは結合が無い時

の値よりも高くなり (Fig. 4(a)の黒色領域)、最大で $h_{KS} = 4.37 \text{ ns}^{-1}$ となった。このようにコンシステンシーの有無がシステム全体の KS エントロピーを大幅に変化させることが分かった。一方 KY 次元 (Fig. 4(b)) も KS エントロピーと同様にして3つの領域に分けることができる。しかしながら KY 次元は最大で $D_{KY} = 49.2$ であり、結合が無い時の値 ($D_{KY} = 44.1$) と比較して大きく増加しないことが KS エントロピーとは異なる点である。

5. まとめ

本研究では、光結合された半導体レーザーにおいてコンシステンシー状態を観測し、リアプノフスペクトラムから KS エントロピーと KY 次元を計算することによって複雑性の定量化を行った。その結果、システム全体の複雑性はコンシステンシーの有無に大きく関連しており、結合が無い時の値よりも低い領域、同程度の領域、高い領域の3つに分けられることが明らかとなった。特にコンシステンシー状態であるとき、システム全体の複雑性は Drive のみの値と同程度となるため、物理的の一方向性関数への応用を考えた時には Drive の複雑性を増加させることが重要である。

参考文献

- [1] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy, Phys. Rev. Lett., Vol. 93, pp. 244102 (2004).
- [2] R. Pappu, B. Recht, J. Taylor, and N. Gershenfeld, Science, Vol. 297 pp. 2026 (2002).
- [3] R. Lang and K. Kobayashi, IEEE J. Quantum Electron., Vol. 16, pp. 347 (1980).
- [4] R. Vicente, J. Dauden, P. Colet, and R. Toral IEEE J. Quantum Electron., Vol. 41, pp. 541 (2005).
- [5] K. Pyragas, Phys. Rev. E, Vol. 58, pp. 3067 (1998).