J. Saitama Univ., Fac. Educ., 56(1) : 307~321 (2007)

Un Théorème Limite de Système des Particules Aléatoires et Processus de Branchement à Valeurs dans Mesures

Isamu DÔKU*

Résumé

Nous considérons un système des particules aléatoires avec masse finie comme un modèle aléatoire, et sa caractérisation se déduit naturellement au sens de fonctionelle de Laplace. En utilisant la formule de Feynman-Kac et la représentation de grappe de Poisson nous étudierons le problème de convergence pour des fonctions caractérisées. De plus on prouvera un certain théorème limite sur le système des particules aléatoires.

Mots-clés: mesure aléatoire, particules aléatoires, théorème limite, mesure de Poisson, processus de branchement.

I Introduction

Cet article traite le problème de convergence pour un système des particules aléatoires avec masse finie $\theta > 0$, ceux qui se séparent en descendance ou bien meurent d'après le taux de branchement et le mécanisme de branchement [7]. En fait, le taux de branchement est un champ aléatoire ici, et s'écrit comme $\gamma^\theta = \gamma_t^\theta(x)$. D'autre part, le mécanisme de branchement est donné et défini par la fonction génératrice [26] $g^\theta = g^\theta(t, x, z)$, celle qui est aussi un champ aléatoire en effet.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ un espace probabilisé avec filtration usuelle, $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace mesurable [20]. Pour simplicité on l'écrit ici par $\mathcal{B}$ au lieu de $\mathcal{B}(E)$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est désignée par le symbole $\mathbb{E}[X]$. Cela signifie l'espérance par rapport au milieu aléatoire. Soit μ une mesure finie sur $(E, \mathcal{B})$. Le champ aléatoire

(1) $$\gamma^\theta = \{\gamma_t^\theta(x),\ t \geq 0,\ x \in E\},$$

*Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon. E-mail: doku@post.saitama-u.ac.jp.

c'est une application $\gamma^\theta : \mathbb{R}_+ \times E \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, celle qui remplit la condition suivante: c'est-à-dire, pour chaque $x \in E$ fixé, $\gamma_t^\theta(x)$ est croissante à paramètre t, $\mathbb{P}$-p.p. Le mécanisme de branchement g^θ, étant une fonction génératrice, est aussi un champ aléatoire, donné par

$$g^\theta : \mathbb{R}_+ \times E \times [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Chaque particule meurt à temps aléatoire et se sépare en rien d'une manière ou bien en deux particules de l'autre, des deux façon possible également; mais plus précisément, ce qui se passe d'après probabilités, déterminées par la fonction génératrice g^θ. En d'autres termes, on a en effet

$$g^\theta(t,x,z) = p_0(t,x,\omega) + z^2 p_2(t,x,\omega). \tag{3}$$

Quand on introduit ici la notation nouvelle, c'est-à-dire que l'on écrit le taux de naissance (resp. le taux de mort) par p^θ (resp. n^θ) respectivement, alors il est très raisonable d'avoir l'expression suivante:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^\theta = \gamma_t^{(\theta)} = p_t^\theta + n_t^\theta. \tag{4}$$

D'ailleurs, il est même naturel de supposer que la quantité aléatoire de différence $Y_t^\theta = p_t^\theta - n_t^\theta$ soit une variable aléatoire gaussienne. En fait nous supposons ici plusieurs conditions sur le champ Y^θ. Tout d'abord,

$$\mathbb{E}[Y_t^\theta(x)] = 0, \tag{5}$$

et

$$\mathbb{E}[Y_t^{\theta_1}(x) Y_s^{\theta_2}(y)] = \Gamma^{\theta_1 \wedge \theta_2}(s-t)\Gamma_1(x-y) \tag{6}$$

pour tout (t,x) et $(s,y) \in \mathbb{R}_+ \times E$, et $\Gamma^1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)^+ \cap L^1(\mathbb{R}_+)$, où le symbole $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)^+$ désigne l'ensemble de tous les fonctions indéfiniment dérivables, positives, et disparaissant à l'infini, cf. [24]. La fonction d'intercorrélation spatiale Γ_1 appartient à l'espace $C_0^\infty(E)^+$. Pour simplicité on va supposer que l'intégrale totale $\int \Gamma^1 \mathrm{d}t = 1$, et de plus, l'on supposera que

$$\|\Gamma_1\|_\infty + \|\Delta\Gamma_1\|_\infty < +\infty. \tag{7}$$

Noter que l'identité d'échelle

$$\Gamma_0^\theta(x) = \frac{1}{\theta}\Gamma_0^1\left(\frac{x}{\theta}\right) \tag{8}$$

est valable pour tout $\theta > 0$ et $x \in E$. En particulier, nous pouvons supposer que le moment d'ordre α du taux de naissance (resp. taux de mort) soit proportionnel à $\theta^{-\alpha/2}$ respectivement, et de plus, nous pourrons supposer que la constante proportionnelle dépende à l'ordre α si nécessaire. Dans ce cas, il est très intéressant de voir que

$$\mathcal{L}(p^\theta(t,x)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}p^1\left(\frac{t}{\theta},x\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(n^\theta(t,x)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}n^1\left(\frac{t}{\theta},x\right)\right) \tag{9}$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in E$, où $\mathcal{L}(X)$ désigne la distribution de la variable aléatoire X.

II Formule de Grappe de Poisson

Pour un certain processus $X = (X_t)$ avec population initiale ν, on écrit ici par $P_t(\cdot,\nu)$ la mesure de probabilité de transition correspondante [4]. Le super processus de Dawson-Oitanabé (ou bien super-mouvement brownien [1]), étant un exemple typique entre la famille des processus stochastiques à valeurs dans mesures, possède la propriété de branchement, c'est-à-dire,

$$P_t(\cdot,\nu_1+\nu_2) = P_t(\cdot,\nu_1) * P_t(\cdot,\nu_2), \tag{10}$$

où $*$ désigne la circonvolution [6]. L'ensemble de tous les mesures finies sur l'espace E, celui qui est désigné par $\mathcal{M}_F(E)$. Aucun processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(E)$ dont la distribution satisfait l'équation (10), celui qui est appelé un processus de branchement.

Soit X une mesure finie aléatoire sur E. On dit que X (ou bien sa distribution, à la façon équivalente) est indéfiniment divisible, si pour chaque nombre aléatoire n on a

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1 + \cdots + X_n), \tag{11}$$

où X_k sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il est clair que le super-processus de Dawson-Oitanabé est aussi indéfiniment divisible. Un autre exemple très familier de variable aléatoire indéfiniment divisible, c'est la mesure aléatoire de Poisson usuelle avec mesure d'intensité ν [21]. Elle peut être écrite comme une superposition de n mesures aléatoires de Poisson indépendantes avec mesures d'intensité ν/n. Cela peut être étendu à la classe de processus de grappe de Poisson [3]. Voici le théorème de représentation de grappe de Poisson. Nous introduisons un tel théorème très connu ci-dessous selon le livre standard par Etheridge [17].

Théorème 1. (cf. Théorème 1.28 [17, p.18]) *Soit X une mesure aléatoire indéfiniment divisible sur $(E,\mathcal{B})$. Alors il existent une mesure $\eta \in \mathcal{M}_F(E)$ et une autre mesure $\Lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_F(E))$ avec $\Lambda \neq 0$ telles que l'on ait pour tout $\varphi \in C_b(E)$,*

$$\int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle\varphi,\nu\rangle}\right)\Lambda(\mathrm{d}\nu) < +\infty \tag{12}$$

et

$$-\log \mathbb{E}\left[e^{-\langle\varphi,X\rangle}\right] = \langle\varphi,\eta\rangle + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle\varphi,\nu\rangle}\right)\Lambda(\mathrm{d}\nu), \tag{13}$$

où $C_b(E)$ désigne l'ensemble de tous les fonctions continues et bornées sur E, et le symbole $\langle f, \mu \rangle$ désigne l'intégrale de fonction mesurable f par rapport à la mesure μ. D'ailleurs, si la mesure Λ remplit $\Lambda(\{0\}) = 0$, alors les mesures η et Λ sont uniques respectivement.

Ce théorème n'est rien de moins que l'analogie de la formule classique de Lévy-Khintchine [2] sous la charpente de processus à valeurs dans mesures, cette formule qui caractérise les fonctions caractéristiques des distributions indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}^d$ (voir aussi [27]).

En utilisant la relation (13), on va voir ci-dessous la construction formelle de processus de Markov homogènes par rapport à temps, à valeurs dans mesures, ceux qui remplissent des deux conditions: la propriété de branchement et la divisibilité indéfinie. Nous connaissons ici que, si $X = (X_t)$ est notre processus d'objectif, alors nous avons

$$P_\mu e^{-\langle \varphi, X_t \rangle} = e^{-\langle V_t \varphi, \mu \rangle}, \tag{14}$$

où l'opérateur V_t possède la propriété $V_{t+s} = V_t \circ V_s$ et P_μ désigne la mesure de probabilité sur $\mathcal{M}_F(E)$, étant la distribution de (X_t). Par comparaison entre (13) et (14), nous obtenons immédiatement

$$\langle V_t \varphi, \mu \rangle = \int_E \varphi(x) \eta(\mu, t, \mathrm{d}x) + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle \varphi, \nu \rangle}\right) \Lambda(\mu, t, \mathrm{d}\nu). \tag{15}$$

L'unicité de la représentation de Lévy-Khintchine nous donne un bien-fondé de transformation comme suit:

$$\eta(\mu, t, \mathrm{d}y) = \int_E \eta(x, t, \mathrm{d}y) \mu(\mathrm{d}x) \quad \text{et} \quad \Lambda(\mu, t, \mathrm{d}\nu) = \int_E \Lambda(x, t, \mathrm{d}y) \mu(\mathrm{d}x). \tag{16}$$

Tout d'abord, noter que l'équation (13) est équivalente à l'équation suivante:

$$\mathbb{E}[\exp\{-\langle \varphi, X \rangle\}] = \exp\left\{ -\langle \varphi, \eta \rangle - \int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle \varphi, \nu \rangle}\right) \Lambda(\mathrm{d}\nu) \right\}. \tag{17}$$

Après l'échange de φ contre $\lambda\varphi$ (avec paramètre λ) dans (17), nous calculons sa différentielle par rapport à λ et posons $\lambda = 0$ (cf. [14]). Par suite nous pouvons obtenir immédiatement

$$\begin{aligned} P_\mu \langle \varphi, X_t \rangle &= \langle \varphi, \eta_{\mu,t} \rangle + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \langle \varphi, \nu \rangle \Lambda_{\mu,t}(\mathrm{d}\nu) \\ &= \int_E \varphi(y) \eta(\mu, t, \mathrm{d}y) + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \langle \varphi, \nu \rangle \Lambda(\mu, t, \mathrm{d}\nu), \end{aligned} \tag{18}$$

tant que le terme gauche de (18) est fini, où $P_\mu \langle \varphi, X_t \rangle$ désigne l'espérance mathématique de $\langle \varphi, X_t \rangle$ relative à la mesure P_μ de probabilité. De (18) avec (15) il est facile de voir

$$(19) \qquad \langle V_t\varphi, \mu\rangle = P_\mu\langle\varphi, X_t\rangle + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle\varphi,\nu\rangle} - \langle\varphi,\nu\rangle\right)\Lambda_{\mu,t}(\mathrm{d}\nu).$$

De plus, quand nous choisissons $\mu = \delta_x$ (la mesure de Dirac), alors nous avons naturellement l'identité suivante:

Lemme 2. *Pour tout $x \in E$, on a alors*

$$(20) \qquad V_t\varphi(x) = P_{\delta_x}\langle\varphi, X_t\rangle + \int_{\mathcal{M}_F(E)} \left(1 - e^{-\langle\varphi,\nu\rangle} - \langle\varphi,\nu\rangle\right)\Lambda_{x,t}(\delta\nu).$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante, celle qui est le résultat principal dans cette section.

Proposition 3. *Soit $X = (X_t)$ un processus de branchement markovien et homogène par rapport à temps, à valeurs dans mesures, dont la fonctionnelle de transition de Laplace [10] est donnée par (14). Dans ce cas, la fonction $v(t,x) = V_t\varphi(x)$ remplit l'équation suivante:*

$$(21) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= Av(t,x) - b(x)v(t,x) - c(x)v(t,x)^2 \\ &\quad + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\beta v(t,x)} - \beta v(t,x)\right)\ell(x,\mathrm{d}\beta), \end{aligned}$$

où A est le générateur d'un semi-groupe de Feller [18], b et $c \geq 0$ sont des fonctions mesurables et bornées, et ℓ est un noyau de $(0,\infty)$ en $(0,\infty)$, satisfaisant la condition

$$(22) \qquad \int_0^\infty (\beta \wedge \beta^2)\cdot\ell(x,\mathrm{d}\beta) < +\infty$$

uniformément par rapport à $x \in E$.

Démonstration. On désigne ici par le symbole P_t le semi-groupe linéaire associé à l'opérateur V_t, c'est-à-dire,

$$(23) \qquad P_t\varphi(x) = \mathbb{E}_{\delta_x}[\langle\varphi, X_t\rangle] \qquad \text{pour} \quad \forall x \in E.$$

Nous supposerons maintenant sans perte de généralité que $V_t\varphi$ et $P_t\varphi$ soient tout dérivables par rapport à temps. Quand on écrit comme

$$(24) \qquad \left.\frac{\partial P_t\varphi}{\partial t}(x)\right|_{t=0} = A\varphi(x),$$

celle qui détermine un nouveau générateur infinitésimal, alors sa dérivée $(\partial/\partial t)V_t\varphi$ est obtenue naturellement comme suit:

$$(25) \qquad \left.\frac{\partial V_t\varphi}{\partial t}(x)\right|_{t=0} = A\varphi(x) + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathcal{M}_F(E)}\left(1 - e^{-\langle\varphi,\nu\rangle} - \langle\varphi,\nu\rangle\right)\Lambda_{x,t}(\mathrm{d}\nu).$$

L'existence de la limite de (25) permet d'obtenir une estimation

$$(26) \qquad \int_{\mathcal{M}_F(E)} \langle 1, \nu\rangle \wedge \langle 1, \nu\rangle^2 \frac{1}{t} \Lambda_{x,t}(\mathrm{d}\nu) \leqslant C, \qquad \text{pour} \quad \forall t < 1,$$

pour une certaine constante C, où nous avons posé $\varphi = 1$ ci-dessus. D'ailleurs, nous avons besoin d'hypothèse nouvelle, c'est-à-dire, ce que l'évolution de $X = (X_t)$ soit donnée par des règles locales. En d'autres termes, cela signifie que notre processus d'objectif peut être obtenu comme une limite des processus de branchement markoviens, où la descendance d'une particule individuelle soit née à la place même de mort de son parent qui s'est passé. Dans ce cas, il est connu bien (par exemple, voir [17]) que la mesure $\Lambda_{x,t}(\cdot)$ se concentre sur des mesures du type $\beta\delta_x$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+$. En vertu de (26), il suit donc que la condition d'intégrabilité

$$(27) \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \beta \wedge \beta^2 \cdot \frac{1}{t} \Lambda_{x,t}(\mathrm{d}\beta) \leqslant C, \qquad \text{pour} \quad \forall t < 1,$$

soit valable. Grâce à l'argument de compacité [4] (voir aussi [13] et [18]), nous pouvons penser à l'opération de limite lorsque $t \to 0$, et en outre on en déduit que

$$(28) \qquad \left.\frac{\partial V_t\varphi}{\partial t}(x)\right|_{t=0} = A\varphi(x) - b(x)\varphi(x) - c(x)\varphi(x)^2 + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\beta\varphi(x)} - \beta\varphi(x)\right) \cdot \ell(x, \mathrm{d}\beta),$$

où la mesure $\ell(\cdot, \mathrm{d}\beta)$ sur $(0, \infty)$ satisfait la condition (22): c'est-à-dire que $\int_0^\infty (\beta \wedge \beta^2) \cdot \ell(x, \mathrm{d}\beta) < +\infty$. De plus, il est évident que la fonction quadratique s'élève de la mesure de $\Lambda_t(x, \cdot)/t$ qui s'accumule sur $\{0, \infty\}$ lorsque $t \to \infty$.

Rappelons ici la définition de noyau: on dit que $n(x, B)$, $(B \in \mathcal{B})$ est un noyau d'un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ dans un espace mesurable $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{B}})$ si, pour tout $x \in E$, $n(x, \cdot)$ est une mesure sur $\tilde{E}$, et pour tout $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$, $n(\cdot, \tilde{B})$ est une fonction $\mathcal{B}$-mesurable sur E. Ce que nous avond déjà discuté ci-dessus, signifie qu'il est raisonable de construire un processus de branchement à valeurs dans l'espace de mesures, dont la fonctionnelle de transition de Laplace soit donnée par (14), et dont la fonction caractérisée $v(t, x) = V_t\varphi(x)$ apparaissant en (14) remplit l'équation (21). En effet, il est possible de construire un tel super-processus [4], et en outre on peut vérifier que le problème de martingale correspondant possède une unique solution [18] (voir aussi [13]). En fait, une telle classe de super-processus peut être obtenue par un théorème limite de système des particules aléatoire de branchement dont l'échelle des paramètres soit échangée (voir [15] et [16]). Supposons ici que telles particules puissent être obtenues comme un système des particules aléatoires de branchement dont l'échelle des paramètres soit échangée à une certaine manière.

Vu du cas de construction de super-processus de Dawson-Oitanabé, nous supposerons ici que la population commence de $O(n)$ particules individuelles à la n-ème étape de l'échelle, et de plus aussi que la masse de chaque particule individuelle soit $1/n$. Des particules individuelles possèdent ses vies, celles qui sont distribuées selon une loi exponentielle. Pendant toutes ses vies, elles se déplacent dans l'espace conformément à la loi des copies indépendantes de processus de Markov ζ_t spécifié. Si une particule individuelle est à le point x lorsqu'elle meure, alors elle y laisse un nombre aléatoire de descendantes, celles qui sont déterminées par la distribution

$$\{p_k^{(n)}(x);\ k \geq 0\}. \tag{29}$$

Noter ici que la vie espérée d'une particule individuelle est β_n, et que

$$\beta_n \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{30}$$

Cependant, le choix de β_n dépendra de la distribution de descendance. Dès que l'étroitesse de processus approximatifs est établie une fois, tout calcul est vérifié, sous la condition satisfaite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\beta_n} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)}(x) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \right\} = \Phi(x, \lambda), \tag{31}$$

où le mécanisme de branchement est donné par

$$\Phi(x, \lambda) = -b(x)\lambda - c(x)\lambda^2 + \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda\beta} - \lambda\beta) \cdot n(x, \mathrm{d}\beta). \tag{32}$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. c.q.f.d. □

III Système des Particules Aléatoires avec Masse Finie

Le but de cet article est de discuter le problème de convergence de notre système des particules aléatoires avec masse finie, de donner ses caractérisation, d'établir l'expression par la fonctionnelle de transition de Laplace pour le processus de branchement limite, et de démontrer un théorème limite de système des particules aléatoires à l'échelle échangée. Tout d'abord nous commençons de définir notre modèle aléatoire.

Soit $\{B = (B_t); W, \mathcal{F}^B, (\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}\}$ un mouvement brownien standard. Maintenant nous considérons ici des particules à masse θ, celles qui se déplacent à la façon du mouvement brownien $B = (B_t)$, et qui se séparent conformément au taux de branchement, donné par la fonctionnelle γ^θ (voir (1) dans la première section), et aussi conformément au mécanisme de branchement, donné par g^θ (voir (2) et (3) dans la première section). On désigne par $P_{s,\mu}$ l'espérance mathématique par rapport au branchement aléatoire avec mesure initiale μ à temps s, sous la réalisation donnée de milieu ω, et d'autre part on désigne par $\mathbb{E}_x$, $(x \in E)$, l'espérance mathématique par rapport au processus de mouvement spatial $B = (B_t)$. La mesure aléatoire Z_t^θ est définie par

$$Z_t^\theta = \sum_{i=1}^{N(t)} \delta_{w_t^i}, \tag{33}$$

celle qui est déterminée par le triple $(B=(B_t),\gamma^\theta,g^\theta)$, où le symbole $N(t)$ dsigne le nombre de particules de descendance à temps t et w_t^i est la position de la i-ème particule individuelle à temps t. Ensuite on pose ici

$$\psi_{s,t}^\theta(x)\equiv\psi^\theta(s,t,x)=P_{s,\delta_x}[\exp\{-\langle\varphi,\theta Z_t^\theta\rangle\}], \tag{34}$$

étant la fonctionnelle de transition de Laplace pour notre mesure aléatoire, où l'on a

$$\langle\varphi,Z_t^\theta\rangle=\int_E\varphi(x)Z_t^\theta(\mathrm{d}x) \tag{35}$$

pour φ appartenant à l'espace $C_+^\infty(E)$ de tous les fonctions indéfiniment dérivables et non-négatives sur E. Soit

$$\tau:\Omega\times W\ni(\omega,w)\mapsto\tau(\omega,w)\in\mathbb{R}_+ \tag{36}$$

le temps du premier branchement. On a alors

$$\psi_{s,t}^\theta(x)=\mathbb{E}_{s,x}[P_{\tau,\delta_{w_\tau}}\left\{e^{-\langle\varphi,Z_\tau^\theta\circ\pi_{t-\tau}\rangle}\right\}] \tag{37}$$

avec le changement π_t.

Lemme 4. *Nous avons l'identité*

(38)
$$\begin{aligned}\psi_{s,t}^\theta(x)=\mathbb{E}_x\Bigg\{e^{-\varphi(w_{t-s})}&-\int_0^t g^\theta(r,w_{r-s},\psi_{r,t}^\theta(w_{r-s}))\cdot\gamma_r^{(\theta)}(w_{r-s})\mathrm{d}r\\&+\int_0^t\psi_{r,t}^\theta(w_{t-s})\gamma_r^{(\theta)}(w_{r-s})\mathrm{d}r\Bigg\},\end{aligned}$$

pour tout $s,t\in\mathbb{R}_+$, $(s\leqslant t)$ *et* $x\in E$.

Démonstration. Supposons maintenant que le milieu aléatoire soit donné. En ce cas on considère l'existence et temps du premier branchement, en outre l'on considère de récrire (37) sous l'espérance conditionnelle. Alors un simple calcul permet d'obtenir

(39)
$$\begin{aligned}\psi_{s,t}^\theta(x)=&\;\mathbb{E}_x\left\{e^{-\theta\varphi(W_{t-s})}\cdot\exp\left\{-\int_0^t\gamma_r^{(\theta)}(w_{r-s})\mathrm{d}r\right\}\right\}\\&+\mathbb{E}_x\left\{\int_0^t e^{-\int_0^s\gamma_r^{(\theta)}(w_{r-s})\mathrm{d}r}\cdot g^\theta(r,w_{r-s},\psi_{r,t}^\theta(w_{r-s}))\cdot\gamma_r^{(\theta)}(w_{r-s})\mathrm{d}r\right\}.\end{aligned}$$

Selon la discussion de [4], nous lui appliquons l'intégration par parties deux fois, et il en suit que l'expression (38) est valable. Ce qui donne la preuve. c.q.f.d. □

IV Procédé de Limite sur Mesures Aléatoires

Dans cette section, on considère une mesure aléatoire de Poisson comme la condition initiale, au lieu de la mesure de Dirac δ_x étant une particule à unité située au point x. C'est-à-dire, on y considère la mesure de Poisson $\Lambda_\lambda^\theta \equiv \Lambda_\lambda^\theta(\mathrm{d}x)$ avec l'intensité $\lambda(\mathrm{d}x)/\theta$, $\theta > 0$, et l'on désigne ici par le symbole $P_{t,\Lambda_\lambda^\theta}$ l'esérance mathématique par rapport à la mesure aléatoire sur $\mathcal{M}_F(E)$ avec la mesure initiale Λ_λ^θ à temps t. Une application de la formule de grappe de Poisson (voir Théorème 1 dans la seconde section) permet d'obtenir une expression importante de caractérisation de notre processus d'objectifs sur le système des particules aléatoires, celle qui nous donne, en fait, la fonctionnelle de transition de Laplace de Z_t^θ.

Lemme 5. (Caractérisation de Z_t^θ) *Soient Λ_λ^θ une mesure aléatoire de Poisson avec l'intensité $\lambda(\mathrm{d}x)/\theta$, et Z_t^θ la mesure aléatoire empirique donné en* (33). *On a alors pour $\varphi \in C_+^\infty(E)$*

$$P_{s,\Lambda_\lambda^\theta}[e^{-\langle\varphi,\theta Z_t^\theta\rangle}] = \exp\left\{\left\langle\frac{\psi_{s,t}^\theta(x)-1}{\theta},\lambda\right\rangle\right\}. \tag{40}$$

Noter que la fonctionnelle exponentielle caractérisée en (40) est en effet donnée par

$$\exp\left\{\int_E\frac{\psi_{s,t}^\theta(x)-1}{\theta}\lambda(\mathrm{d}x)\right\}. \tag{41}$$

Nous désignons ici par le symbole $\mathcal{P}(E)$ l'espace de tous les mesures de probabilités sur E, et soit

$$T_+^2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; 0 \leqslant s \leqslant t\}. \tag{42}$$

Maintenant on prend $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(E)$. On définit une norme $|||\cdot|||_{p,T,\hat{\mu}}$ avec $0 < T < +\infty$ par

$$|||f|||_{p,T,\hat{\mu}}^p = \mathbb{E}^{\hat{\mu}\otimes\mathbb{P}}\iint_{K_{t,T}}|f(s,t,x,\omega)|^p\mathrm{d}s\times\mathrm{d}t < +\infty, \tag{43}$$

pour tout $T > 0$, $p > 0$, et $K_{t,T} = [0,t]\times[0,T] \subset T_+^2$, et ensuite l'on définit l'espace

(44)

$$L_{T,\hat{\mu}}^{p,+}(T_+^2 \times E \times \Omega) = \{f(s,t,x,\omega);\ \text{étant des fonctions } \mathcal{B}\otimes\mathcal{F}\text{-mesurables}$$
$$\text{et positives, et } |||f|||_{p,T,\hat{\mu}} < +\infty \quad \text{pour tout} \quad 0 < T < +\infty\}.$$

Théorème 6. *Soit Z_t^θ une mesure aléatoire définie par* (33), *dont la fonctionnelle de transition de Laplace soit donnée en* (40). *On pose ici*

$$(45) \qquad V_{s,t}^{\theta}[\varphi](x) = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \psi_{s,t}^{\theta}(x)).$$

(a) *La fonction $V_{s,t}^{\theta}[\varphi](x)$ remplit l'équation*

$$(46) \qquad \begin{aligned} V_{s,t}^{\theta}[\varphi](x) &= \mathbb{E}_x[\Xi_\theta(s,t,\varphi,w)] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \int_s^t V_{s,t}^{\theta}[\varphi](w_{r-s}) \cdot \Pi_\theta(Y_r^\theta)[V_{r,t}^{\theta}](w_{r-s})\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

où nous avons posé comme suit:

$$(47) \qquad \Xi_\theta(s,t,\varphi,w) = \frac{1}{\theta}\left\{1 - e^{-\theta\cdot\varphi(w_{t-s})}\right\},$$

et

$$(48) \qquad \Pi_\theta(Y_r^\theta)[V_{r,t}^{\theta}](w_{r-s}) = Y_r^\theta - \theta \cdot V_{r,t}^{\theta}[\varphi](w_{r-s}) \cdot p_r^\theta(w_{r-s}).$$

(b) *Il y a une unique solution pour* (46)*, telle que l'on ait*

$$(49) \qquad V^\theta[\varphi] \in L_{T,\hat{\mu}}^{p,+}(T_+^2 \times E \times \Omega).$$

Démonstration. Rappelons ici la discussion dans la seconde section. A la façon similaire, avec lemme 4 on en déduit que

$$(50) \qquad V_{s,t}^{\theta}[\varphi](x) = \mathbb{E}_x\left\{\frac{1 - e^{-\theta\cdot\varphi(w_{t-s})}}{\varepsilon}\right\}$$

$$+\mathbb{E}_x\left\{\int_s^t \psi_{r,t}^{\theta}(w_{r-s})V_{r,t}^{\theta}[\varphi](w_{r-s})p_r^\theta(w_{r-s})\mathrm{d}r - \int_r^t V_{r,t}^{\theta}[\varphi](w_{r-s})n_r^\theta(w_{r-s})\mathrm{d}r\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_x\left\{\frac{1}{\theta}\left(1 - e^{-\theta\cdot\varphi(w_{t-s})}\right)\right\} + \mathbb{E}_x \int_s^t V_{r,t}^{\theta}[\varphi](w_{t-s}) \cdot Y_r^\theta(w_{r-s})\mathrm{d}r \\ &\qquad - \theta \cdot \mathbb{E}_x \int_s^r (V_{r,t}^{\theta}[\varphi])^2 p_r^\theta(w_{r-s})\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_x[\Xi_\theta(s,t,\varphi,w)] + \mathbb{E}_x \int_s^t V_{r,t}^{\theta}[\varphi](w_{r-s}) \cdot \Pi_\theta(Y_r^\theta)[V_{r,t}^{\theta}](w_{r-s})\mathrm{d}r.$$

Cela signifie que la fonction $V_{s,t}^{\theta}[\varphi](x)$ remplit l'équation (46). Notre méthode adopté ici est très connue et plus standard pour l'existence et unicité des solutions de (46), voir [9] et [23]. Parce qu'il est évident d'un simple calcul que la solution soit bornée et même majorée facilement par la quantité

$$(51)\qquad W^{\theta}_{s,t}[\varphi](x) = \mathbb{E}_x[\Xi_\theta(s,t,\varphi,w)] + \mathbb{E}_x \int_s^t W^{\theta}_{r,t}[\varphi](w_{r-s}) \cdot Y^{\theta}_r(w_{r-s})\mathrm{d}r,$$

il en suit aisément que

$$(52)\qquad \begin{aligned} |||V^{\theta}_{s,t}[\varphi]|||^p_{p,T,\hat{\mu}} &\leqslant C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \int_E \left(\iint_{K_{t,T}} |W^{\theta}_{s,t}[\varphi](x)|^p \mathrm{d}s \times \mathrm{d}t \right) \hat{\mu}(\mathrm{d}x) \\ &\leqslant C \cdot |||W^{\theta}_{s,t}[\varphi]|||^p_{p,T,\hat{\mu}} < +\infty, \end{aligned}$$

pour une certaine constante C positive. D'ailleurs, il est facile de voir que

$$(53)\qquad \left|\left|\left| V^{\theta}_{s,t}[\varphi] - \tilde{V}^{\theta}_{s,t}[\varphi] \right|\right|\right|_{L^{p,+}_{T,\hat{\mu}}(T^2_+ \times E \times \Omega)} \leqslant C' |||W^{\theta}_{s,t}[\varphi] - \tilde{W}^{\theta}_{s,t}[\varphi]|||_{p,T,\hat{\mu}},$$

et de plus le dernier terme devient nul en (53), où $\tilde{V}^{\theta}_{s,t}[\varphi]$ est une autre solution de l'équation (46) et $\tilde{W}^{\theta}_{s,t}[\varphi]$ est une autre fonction correspondante de $W^{\theta}_{s,t}[\varphi]$, associée à $\tilde{V}^{\theta}_{s,t}[\varphi]$. D'où il existe une unique solution de (46) dans l'espace $L^{p,+}_{T,\hat{\mu}}(T^2_+ \times E \times \Omega)$. Ce qui donne le résultat souhaité. c.q.f.d. □

Une application de la formule de Feynmam-Kac [8] (ou bien voir [19]) permet d'avoir l'expression suivante de solution pour (46):

Lemme 7. *La solution $V^{\theta}_{s,t}[\varphi]$ possède la représentation de Feynman-Kac suivante:*

$$(54)\qquad V^{\theta}_{s,t}[\varphi](x) = \mathbb{E}_x \left\{ \Xi_\theta(s,t,\varphi,w) \cdot \exp\left(\int_s^t \Pi_\theta(Y^{\theta}_r)[V^{\theta}_{r,t}](w_{r-s})\mathrm{d}r \right) \right\}.$$

Ensuite, nous pouvons déduire de la formule de Feynman-Kac [8], à la même façon ci-dessus, que la fonction $W^{\theta}_{s,t}[\varphi]$ ait la représentation de Feynman-Kac, c'est-à-dire:

Lemme 8. *La fonction $W^{\theta}_{s,t}[\varphi]$ possède la représentation de Feynman-Kac suivante:*

$$(55)\qquad W^{\theta}_{s,t}[\varphi](x) = \mathbb{E}_x[\Xi_\theta(s,t,\varphi,w) \cdot \exp\left\{ \int_s^t Y^{\theta}_r(w_{r-s})\mathrm{d}r \right\}].$$

Le théorème suivant est notre résultat principal dans cet article, celui qui nous donne la caractérisation de processus limite de branchement à valeurs dans l'espace de mesures.

Théorème 9. *Soit $X = (X_t)$ la mesure aléatoire limite telle que l'on ait*

$$(56)\qquad \lim_{\theta \to 0} P_{s,\Lambda^{\theta}_{\lambda}}[e^{-\langle \varphi, \theta Z^{\theta}_t \rangle}] = P_\lambda e^{-\langle \varphi, X_t \rangle}.$$

Alors la caractérisation du type de la fonctionnelle de Laplace est valable, c'est-à-dire que nous avons

$$P_\lambda e^{-\langle\varphi, X_t\rangle} = e^{-\langle V_t\varphi, \lambda\rangle}, \tag{57}$$

où $V_t\varphi$ est obtenu par

$$V_{s,t}[\varphi](x) = \lim_{\theta\to 0} V^\theta_{s,t}[\varphi](x), \qquad \text{pour tout} \quad x \in E, \tag{58}$$

et $V^\theta_{s,t}[\varphi]$ satisfait l'équation donnée en (46) dans le théorème 6.

Démonstration. En prenant lemme 7 et lemme 8 en considération, nous pouvons déduire de (56) et (45) du théorème 6 que la transformation de Laplace pour la mesure aléatoire $X = (X_t)$ est donnée par l'identité (57), parce que nous obtenons par caractérisation de Z^θ_t (40) du lemme 5

$$P_{s,\Lambda^\theta_\lambda}[e^{-\langle\varphi, \theta Z^\theta_t\rangle}] = e^{-\langle V^\theta_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle}, \tag{59}$$

où nous avons employé l'expression limite (58). D'autre part, nous pouvons savoir la convergence de $\{V^\theta_{s,t}[\varphi]\}_\theta$ par la considération suivante. Maintenant posons $\theta = 1/n$ et employons le même symbole $V^n_{s,t}[\varphi]$ ci-dessous au lieu de $V^{1/n}_{s,t}[\varphi]$. Un simple calcul avec la discussion similaire dans la démonstration du théorème 6, permet d'obtenir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |\langle V^n_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle - \langle V^m_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle|^{2p} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\cdot\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \langle W^n_{s,t}[\varphi] - W^m_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle^{2p} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &\to 0 \qquad (\text{lorsque} \quad n, m\to\infty). \end{aligned} \tag{60}$$

Cela signifie que $\{\langle V^n_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle\}_n$ devient une suite de Cauchy dans l'espace

$$\mathcal{S}_p = \{f : T^2_+ \to \mathbb{R}_+;\ \mathbb{E}\left\{\int_0^T\int_s^T |f(s,t,\omega)|^{2p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}^{1/2p} < +\infty\}. \tag{61}$$

Donc, il en suit que

$$\lim_{\theta\to 0}\langle V^\theta_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle = \langle V_{s,t}[\varphi], \lambda\rangle. \tag{62}$$

D'autre part, la représentation de Feynman-Kac du lemme 8 permet d'obtenir l'estimation suivante. D'abord, posons ici

$$u^\theta_t(x) = \mathbb{E}_x[\Xi_\theta(0,t,\varphi,w)\cdot\exp\left\{\int_0^t Y^\theta_r(w_{t-s})\mathrm{d}s\right\}]. \tag{63}$$

On a alors

(64)

$$\mathbb{E}|u^\theta_{s,t}(x) - u^\eta_{s,t}(x)| = \mathbb{E}[\mathbb{E}_x[\Xi_\theta(s,t,\varphi,w)\cdot \exp\left\{\int_s^t Y^\theta_r(w_{t-r})\mathrm{d}r\right\}\cdot \times \left(1-\exp\left\{\int_s^t |Y^\theta_r - Y^\eta_r|(w_{t-r})\mathrm{d}r\right\}\right)]].$$

Par conséquent on obtient aisément

(65)

$$\mathbb{E}|u^\theta_{s,t}(x) - u^\eta_{s,t}(x)|^p \leqslant \|\Xi_\theta\|^p_\infty \cdot e^{p^2(t-s)\Gamma_1(0)}\mathbb{E}[\mathbb{E}_x\left\{1-e^{\int_s^t |Y^\theta_r - Y^\eta_r|(w_{t-r})\mathrm{d}r}\right\}^{2p}]^{1/2}$$

$$\leqslant C(p,T,\|\Xi_\theta\|_\infty)[\sum_{i=1}^{2p}\binom{2p}{i}\cdot \times \mathbb{E}_x\left\{\exp\left(\frac{i^2}{2}\int_s^t\int_s^t |\Gamma^\theta - \Gamma^\eta|(r-q)\cdot\Gamma_1(w_{t-r}-w_{t-q})\mathrm{d}r\mathrm{d}q\right)\right\}]^{1/2}.$$

Comme notre champ Y^θ est gaussien, par la discussion pour l'estimation dans le théorème 3 [26] (pp.429–430), nous pouvons obtenir finalement que le premier terme en (65) est majoré par

(66)

$$C(p,T,\|\Xi_\theta\|_\infty,\|\Delta\Gamma_1\|_\infty)\sqrt{\theta}.$$

D'où la convergence de suite de $\{V^\theta_{s,t}[\varphi]\}_\theta$ dans l'espace $L^{p,+}_{T,\hat{\mu}}(T^2_+\times E\times\Omega)$ peut être vérifiée facilement. Ce qui termine la preuve. c.q.f.d. □

Remerciments. Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche pour le projet de recherche élémentaire : No A06–513 (année d'exercice 2006) sur "les théorème limites de super-processus", ceux qui ont été distribués par le centre d'organisation de recherches innovatrices (CORI) à l'université de Saïtama.

Références

[1] R. Abraham et J.-F. Le Gall: Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Theory Relat. Fields* **99** (1994), 251–275.

[2] D. Applebaum: *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge UP, Cambridge, 2004.

[3] D.J. Daley et D. Vere-Jones: *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume I: Elementary Theory and Methods.*(2nd Edition), Springer-Verlag, New York, 2003.

[4] D.A. Dawson: *Measure-Valued Markov Processes.* Lect. Notes in Math. **1541**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] C. Dellacherie et P.-A. Meyer: *Probabilité et Potentiel : Théorie des Martingales.* Tome II, Hermann, Paris, 1980.

[6] J.-F. Delmas: Super-mouvement Brownien avec catalyse. *Stochastic Stochastic Rep.* **58** (1996), 307–347.

[7] J.-F. Delmas et B. Jourdain: *Modèles Aléatoires.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] P. Del Moral: *Feynman-Kac Formulae : Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[9] I. Dôku: Sur le problème du principe de moyenne pour une équation stochastique du type parabolique. *J. Saitama Univ. Math. Nat. Sci.* **38**(1) (1989), 7–17.

[10] I. Dôku: Exponential moments of solutions for nonlinear equations with catalytic noise and large deviation. *Acta Appl. Math.* **63** (2000), 101–117.

[11] I. Dôku: Removability of exceptional sets on the boundary for solutions to some nonlinear equations. *Sci. Math. Jpn.* **54** (2001), 161–169.

[12] I.Dôku:Stochastic convergence of superdiffusion in a superdiffusive medium. *Quant. Inform.* **III** (2001), 197–217.

[13] I. Dôku: Compacité étroite des lois relatives à la densité de processus suggérée par un problème de martingale. *J. Saitama Univ. Math. Nat. Sci.* **51**(2) (2002), 1–15.

[14] I.Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.

[15] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6**(2) (2006), 145–205.

[16] I. Dôku: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.

[17] A.M. Etheridge: *An Introduction to Superprocesses.* Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[18] S.N. Ethier et T.G. Kurtz: *Markov Processes : Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.

[19] N. Ikéda et S. Oitanabé: *Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion).* (en russe) Naouka, Moscou, 1986.

[20] J. Jacod et P. Protter: *L'essential en Théorie des Probabilités.* Cassini, Paris, 2003.

[21] J. Jacod et A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[22] A.N. Kolmogoroff et S.V. Fomine: *Elementy theorii funktsiï i funktsionalinovo analiza (Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle).* (en russe) Naouka, Moscou, 1976.

[23] P. Kotelenez: Comparison methods for a class of function valued S.P.D.E.'s. *Probab. Theory Relat. Fields* **93** (1992), 1–19.

[24] M.-T. Lacroix-Sonrier: *Distributions, Espaces de Sobolev, Applications.* Ellipses, Paris, 1998.

[25] G. Letta: *Martingales et Intégration Stochastique.* Scuola Normale Superiore, Pisa, 1984.

[26] J.M. Noble: Measure valued branching in random medium. *Stoch. Anal. Appl.* **14**(4) (1996), 421–432.
[27] K.-I. Sato: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge UP, Cambridge, 1999.

(Received September 29, 2006)
(Accepted October 13, 2006)