J. Saitama Univ., Fac. Educ., 56(2) : 81–93(2007)

Construction des super-processus associés aux processus de branchement dépendants de l'âge

Isamu DÔKU*

Résumé

Nous considérons un système des particules aléatoires avec le mécanisme de branchement comme un modèle aléatoire, et sa caractérisation se déduit naturellement au sens de fonctionnelle de Laplace. En utilisant quelques sortes de théorèmes limites nous étudierons le problème de convergence pour des processus de branchement markoviens dépendants de l'âge. De plus on prouvera un certain théorème limite qui pouvoit de l'existence de super-processus associés aux processus de branchement dépendants de l'âge.

Mots-clés: mesure aléatoire, particules aléatoires, théorème limite, super-processus dépendant de l'âge, processus de branchement.

I Introduction

Cet article traite le problème de construction des super-processus associés aux processus de branchement dépendants de l'âge. En fait, le processus de mouvement sous-jacent dans cet article est plus général que celui de [3]. Par conséquent, notre résultat principal pourvoit d'une généralisation du théorème limite sur l'existence de super-processus structurés par l'âge (cf. théorème 2.4) en [3].

On considère un modèle aléatoire qui décrit un système des particules avec deux paramètres, c'est-à-dire, âge a dans $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ et position x dans $\mathbb{R}$. La distribution ou bien la loi de la vie τ de chaque particule, laquelle est donnée par la fonction de répartition F sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(0) = 0$, celle qui remplit [20]

$$(1) \qquad m_\tau := \mathbb{E}[\tau] = \int_0^\infty s\mathrm{d}F(s) < +\infty.$$

*Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon. E-mail: doku@post.saitama-u.ac.jp.

Le mécanisme de branchement est toujours donné par la distribution (ou bien la loi) $p = \{p_k\}_{k\geq 0}$ telle que

$$p_0 < 1, \quad m := \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 1 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - 1 < +\infty, \tag{2}$$

où p_k désigne la probabilité que la particule produit k descendantes just après la mort de cette parente-particule. Soit

$$\xi = (\xi_t, t \geq 0, \Delta, \mathcal{F}_t, P_0) \tag{3}$$

un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}$, celui qui commence par l'origine [17]. De plus, soit $\Xi = (\xi, F, p)$ un processus de branchement dépendants de l'âge avec le mécanisme de branchement p et la distribution de la vie F, cf. chapitre IV de [4]; voir aussi chapitre VI de [18]. Ensuite, soient N_t le nombre des particules en vie à temps t, et

$$C_t = \{(a_t^i, X_t^i);\ i = 1, 2, \ldots, N_t\} \tag{4}$$

l'espace de configuration pour l'âge et position de tout les individus vivants à temps t. Selon la théorie des processus de branchement [4], puisque $m = 1$ et $F(0) = 0$, il n'y a pas d'explosion en temps fini, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(N_t < +\infty) = 1. \tag{5}$$

En conséquence, C_t est toujours bien défini pour chaque $0 \leqslant t < +\infty$. Le symbole $M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ désigne l'espace de toutes les mesures boréliennes finies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, muni de sa topologie de convergence faible. Soit $M_a(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ l'espace de toutes les mesures atomiques $\nu \in M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui sont permises d'avoir la forme suivante:

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{(a_i, x_i)}(\cdot, \cdot) \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad x_i \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

L'espace de fonctions $C_b^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues, positives et bornées, définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. D'autre part, on désigne par $C_{fl}^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions f's réelles continues et positives, définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, telles que $f(a, x)$ possède une limite finie lorsque (a, x) tend vers l'infini. Pour aucun ensemble borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, soit $Y_t(A \times B)$ le nombre des particules à temps t dont l'âge appartient à A et dont la position appartient à B. Noter que le fait que $m < +\infty$ et $F(0) = 0$ implique que $Y_t \in M_a(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $t > 0$ si $Y_0 \in M_a(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Pour une fonction de test $\phi \in C_b^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ fixée, on définit

$$\langle Y_t, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \phi(a, x) Y_t(\mathrm{d}a \times \mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^{N_t} \phi(a_t^i, X_t^i). \tag{7}$$

Puisque $\xi = \{\xi_t\}$ est un processus de Markov, il est très facile de voir que $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ est aussi un processus de Markov. Ce processus Y est appelé un processus de branchement markovien associé à $\Xi = (\xi, F, p)$. La fonctionnelle L de Laplace de Y_t est donnée [16] (ou bien [5]) par

$$L_t\phi(a,x) := \mathbb{E}_{a,x}[e^{-\langle Y_t,\phi\rangle}] = \mathbb{E}[e^{-\langle Y_t,\phi\rangle}|Y_0 = \delta_{(a,x)}]. \tag{8}$$

Ce processus $Y = \{Y_t\}$ peut être déterminé uniquement [5] comme un processus de Markov à valeurs dans l'espace $M_a(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ tel que

$$L_{t+s}\phi(a,x) = L_t\{L_s\phi\}(a,x) \qquad \text{pour} \quad \text{tout} \quad t, s \geq 0. \tag{9}$$

II Processus de branchement markovien à valeurs dans mesures

Soit ζ une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ $(0 < \lambda < +\infty)$ indépendante. Nous avons alors $\mathbb{E}[\zeta] = \lambda^{-1}$. Pour chaque élément $f \in C_{fl}^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, on définit le semi-groupe $\{U_t\}$ par

$$U_t f(x) = \mathbb{E}[f(\zeta, x + \sqrt{\lambda v} W_t)] \tag{10}$$

où, quand $\xi = (\xi_t, t \geq 0, \varDelta, \mathcal{F}_t, P_0)$ est une processus de Markov donné dans §I, tel que

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0, \quad V[\xi](t) := \mathbb{E}[\xi_t^2] < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} V[\xi](s) < +\infty, \tag{11}$$

alors $V[\xi](t)$ satisfait la condition suivante:

$$v_\xi := \int_0^\infty V[\xi](t)\mathrm{d}F(t) < +\infty. \tag{12}$$

Ici on désigne par $W = \{W_t; t \geq 0\}$ un processus de diffusion avec générateur infinitésimal A, et il s'appelle A-diffusion [19] pour simplicité.

Définition 1. *On dit que le processus $\{Z_t; t \geq 0\}$ est un processus de branchement markovien à valeurs dans $M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, dont la fonctionnelle de Laplace est donnée par*

$$\mathbb{E}_{\zeta \times \mu}[e^{-\langle Z_t, f\rangle}] = e^{-\langle \mu, V_t f\rangle}, \quad \textit{pour} \quad t \geq 0, \tag{13}$$

où $f \in C_{fl}^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $V_t(f)(x) \equiv u^{[f]}(t,x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. De plus, la fonction $u^{[f]}(t) = u^{[f]}(t,\cdot)$ est la solution unique pour l'équation intégrale non-linéaire

$$u^{[f]}(t,x) = U_t f(x) - \lambda \int_0^t U_{t-s}(u^{[f]}(s,\cdot)^2)(x)\mathrm{d}s. \tag{14}$$

Noter que l'existence d'un tel processus Z_t remplissant (13) et (14) est garantie par la théorie des processus à valeurs dans l'espace de mesures [5] (ou bien [15]; cf. voir aussi [1], [8], [10]).

III Résultat principal

On considère un problème de convergence pour une suite des processus de branchement markoviens. Le but de cet article est de discuter un théorème limite de sa suite sous la condition appropriée. Dans ce formalisme on va démontrer une assertion de convergence pour un système des particules aléatoires à l'échelle échangée, dont le processus limite pourvoit d'un nouveau processus de Markov à valeurs dans mesures, c'est-à-dire, ce n'est rien de moins que le super-processus associé aux processus de branchement dépendants de l'âge (cf. [12], [13]; voir aussi [11], [14]).

Soit $\Xi_n = (\xi_n, F_n, p_n)$, $n \geq 1$ une suite des processus de branchement dépendants de l'âge, dont la définition a été introduite dans §I. Pour simplicité nous écrirons ici par $Y_n = \{Y_t^n; t \geq 0\}$ la suite des processus de branchement markoviens associés à Ξ_n. Nous supposons ici plusieurs hypothèses suivantes:

(i) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons $Y_0^n = \pi_{n\nu}$, où π_ν est une mesure aléatoire de Poisson avec son intensité $\nu = \alpha \otimes \mu \in M_f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ (cf. [9], [14]).

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de la vie τ_n de chaque particule est distribuée comme la distribution exponentielle $Ex(\lambda)$ de paramètre λ, et sa fonction de répartition est donnée par F_n.

(iii) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le mécanisme de branchement est donné par $p_n = \{p_{n,k}\}_{k\geq 0}$, et sa génératrice [9] est donnée par

$$\Phi_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k p_{n,k}, \tag{15}$$

qui satisfait le comportement asymptotique suivant: pour tout $N > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|n^2\{(\Phi_n \circ g_n)(\cdot) - g_n(\cdot)\} - g_0(\cdot)\|_N = 0, \tag{16}$$

où $g_n(x) = 1 - \frac{x}{n}$, $g_0(x) = x^2$ et $\|f\|_N = \sup_{0\leqslant u\leqslant N} |f(u)|$.

(iv) Une suite des processus de mouvement $\{\xi_t^n\}_{n\geq 1}$ est donnée pasr

$$\xi_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sigma(s) \mathrm{d}W_s, \quad t \geq 0 \tag{17}$$

pour chaque $n \geq 1$, où σ est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^\infty \sigma^2(s) \mathrm{d}F(s) < +\infty, \tag{18}$$

et $\{\xi_t^n\}_{n\geq 1}$ remplit les conditions (11) et (12), et W_t est A-diffusion.

Le théorème suivant est notre résultat principal dans cet article, celui qui nous pourvoit d'un nouveau super-processus associé aux processus de branchement markoviens dépendants de l'âge.

Théorème 2. *Soit $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement. Soit $Y_n = \{Y_t^n; t \geq 0\}$, $n \geq 1$, la suite des processus de branchement markoviens à valeurs dans l'espace $M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, associés à la suite $\Xi_n = (\xi_n, F_n, p_n)$, $n \geq 1$ étant processus de branchement markovien dépendant de l'âge, celle qui remplit les conditions* (i), (ii), (iii) *et* (iv) *ci-dessus. On définit alors le processus à l'échelle échangée $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)};\ t \geq \varepsilon\}$ par*

$$Y_t^{(n)} := \frac{1}{n} Y_{nt}^n, \qquad \textit{pour} \quad \textit{chaque} \quad n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq \varepsilon. \tag{19}$$

Alors $Y^{(n)}$ converge faiblement sur l'espace de Skorokhod $D([\varepsilon, \infty), M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ vers le super-processus $Z = \{Z_t;\ t \geq \varepsilon\}$ associé aux processus de branchement dépendants de l'âge, ceux qui sont définis en Définition 1 ci-dessus.

Remarque 1. La loi de l'âge dans le processus limite Z_t n'est pas aléatoire. La fonction $u^{[f]}(s, x)$ apparaissant en sa définition est en mesure d'être interprétée comme une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec $u^{[f]}(s, a, x) = u^{[f]}(s, x)$ pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2. L'évolution spatiale de Z_t n'est rien de moins que celle de super-processus au mouvement des particules qui suit diffusion dont la variance est proportionelle à l'espérance sur la vie de la variance de particule dépendante de l'âge.

Remarque 3. En [6] ils ont obtenu un résultat similaire, où la limite de super-processus non-local est considérée sous le cas spécial de $p_1 = 1$ en distribution de descendance.

IV Processus de branchement dépendant de l'âge

Dans cette section, on considère des propriétés élémentaires de processus de branchement dépendant de l'âge. Soit $\{\Xi_t; t \geq 0\}$ un processus de branchement dépendant de l'âge avec le mécanisme de branchement $p = \{p_k\}$ et la distribution de la vie F. De plus, soient M_t le nombre de génération, et a_t l'âge de ce individu vivant à temps t. Tout d'abord nous commencerons la présentation d'un résultat facile sur la probabilité conditionelle. Pour tout $\varepsilon > 0$, il est très facile de voir que

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{M_t}{t} - \frac{1}{m_\tau} \right| > \varepsilon \Big/ \Xi_t > 0 \right) = 0, \tag{20}$$

cf. Proposition 3.1 (c), p.6 de [3]. Ensuite nous présenterons un résultat sur la loi des grands nombres [20]. Soit $\{V_{t_i};\ 1 \leqslant i \leqslant M_t\}$ une collection des vies de leur ancêtres. Quand la fonction $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu borélienne et remplit $\mathbb{E}|g(V_1)| < +\infty$ avec $V_1 \sim F$ (i.e., $\mathcal{L}(V_1) = F$, où $\mathcal{L}(X)$ est la loi de la variable aléatoire X), alors pour $\forall \varepsilon > 0$, nous avons

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{M_t} \sum_{i=1}^{M_t} g(V_{t_i}) - \mathbb{E}[g(V_1)] \right| > \varepsilon \Big/ \Xi_t > 0 \right) = 0, \tag{21}$$

cf. Proposition 3.2, p.6 de [3]. Le résultat suivant est une assertion sur une version du théorème-limite central. Soient $\{V_k\}_{k\geq 1}$ une suite des vies successives des individus, dont la distribution satisfait $\mathcal{L}(V_k) = F$ pour tout $k \geq 1$, et $\{\xi_k\}_{k\geq 1} = \{\xi_t^k;\ t \geq 0\}_{k\geq 1}$ des copies d'i.i.d. (indépendantes de même loi) de $\xi = (\xi_t, t \geq 0, \Delta, \mathcal{F}_t, P_0)$ et indépendantes de $\{V_k\}_{k\geq 1}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ on définit la fonction caractéristique $\varphi_\xi(\theta, t)$ par

$$\varphi_\xi(\theta, t) = \mathbb{E}[e^{i\theta\xi_t}], \qquad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}. \tag{22}$$

Si les deux conditions (11) et (12) sont remplies, alors il y a un évènement Ω_0 avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, et sur Ω_0, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_\xi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}, V_k\right) = e^{-\frac{\theta^2 v_\xi}{2}} \tag{23}$$

est valable, cf. Proposition 3.3, p.9 de [3]. Vu que la loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V[\xi](V_k) = v_\xi\right) = 1, \tag{24}$$

et le théorème-limite central du type de Linderberg-Feller

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_\xi\left(\frac{\theta}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} V[\xi](V_j)}}, V_k\right) \tag{25}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\exp\left\{i\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_{V_k}^k}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} V[\xi](V_j)}}\right\}\Big/\ \sigma(V_k; k\geq 1)\Big] = e^{-\frac{\theta^2}{2}},$$

ces deux théorèmes limites sont valables, ce résultat (23) ci-dessus est immédiate.

V La preuve du théorème 2

Soit $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ un processus de branchement markovien associé à $\Xi = (\xi, F, p)$, où la vie de particule a une distribution exponentielle de paramètre λ, $p_1 = 1$ et le processus de Markov $\xi = \{\xi_t; t \geq 0\}$ est équivalent à ξ_t^1 en (17) au sens de distribution. Soit L le générateur infinitésimal de ξ_t^1. On dsigne ici par $\tilde{U}_t$ le semi-groupe associé à ξ_t^1, et définit

(26)

$$S_t\phi(a, x) := \mathbb{E}_{(a,x)}[\langle Y_t, \phi\rangle] = \mathbb{E}_{(a,x)}[\phi(a_t, X_t)], \quad \text{pour chaque } (a, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

pour aucune fonction ϕ continue et bornée. Dans ce cas, il en suit aisément que $S_t\phi(a, x)$ satisfait l'équation suivante:

$$S_t\phi(a, x) = e^{-\lambda t}\tilde{U}_t\phi(a, x) + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\tilde{U}_s\{S_{t-s}\phi(0, \cdot)\}(a, x)\mathrm{d}s. \tag{27}$$

Un calcul simple implique immédiatement que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t\phi(a,x) = \lambda S_t\phi(0,x) + (L-\lambda) S_t\phi(a,x) \tag{28}$$

$$= \frac{\partial S_t\phi}{\partial a}(a,x) + \sigma^2(a) A S_t\phi(a,x) + \lambda\{S_t\phi(0,x) - S_t\phi(a,x)\}.$$

Suggéré par la méthode d'Athreya et al. [3], nous poserons ici

$$\hat{U}_t^n\phi(a,x) := \mathbb{E}_{(a,0)}\left[\phi\left(a_t, x + \frac{X_t}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{29}$$

qui nous pourvoit d'un autre semi-groupe et permet d'avoir une nouvelle expression

$$\hat{U}_t^n\phi(a,x) = S_t\phi_n(a, \sqrt{n}x) \qquad \text{avec} \quad \phi_n(a,x) := \phi\left(a, \frac{x}{\sqrt{n}}\right). \tag{30}$$

En calculant la dérivée du semi-groupe $\tilde{U}_t\phi(a,x)$ par rapport à t, nous pouvons obtenir son générateur infinitésimal

$$\hat{L}^n = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\sigma^2(a)}{n} A + \lambda\{(\cdot)|_{a=0} - (\cdot)\}. \tag{31}$$

Alors on peut montrer que le semi-groupe $\{U_t\}$ est bien rapproché par le semi-groupe $\{\hat{U}_t^n\}$ à l'échelle échangée.

Lemme 3. (Approximation uniforme) *Soient $\varepsilon > 0$ et $\phi \in C_{fl}^+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On a alors pour tout $t \geq \varepsilon$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(a,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\hat{U}_{nt}^n\phi(a,x) - U_t\phi(x)| = 0. \tag{32}$$

Démonstration. Quand un certain individu est choisi, alors son âge et sa position à temps t s'écrivent comme (a_t, X_t). Soit

$$\{V_{t_i}, \{\xi_u^{t_i}, 0 \leqslant u \leqslant V_{t_i}\}; 1 \leqslant i \leqslant M_t\} \tag{33}$$

la vie et le processus de mouvement d'ancêtres de cet individu. Et alors le mouvement de cet individu est désigné par

$$\left\{\eta_u^{t_{M_t+1}}; 0 \leqslant u \leqslant t - \sum_{i=1}^{M_t} V_{t_i}\right\}. \tag{34}$$

Nous définissons maintenant

$$\mathcal{G}_t^{[M_t]} := \sigma\left(M_t, V_{t_i}; 1 \leqslant i \leqslant M_t\right) \tag{35}$$

pour simplicité. Nous avons alors une simple identité

(36) $$a_t = t - \sum_{i=1}^{M_t} V_{t_i}.$$

D'autre part, il est clair que

(37) $$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{M_t} \xi_{V_{t_i}}^{t_i} + \xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}.$$

D'où on obtient immédiatement

(38) $$\left(a_t, \frac{X_t}{\sqrt{t}}\right) = \left(a_t, \sqrt{\frac{1}{m_\tau}} \frac{\sum_{i=1}^{M_t} \xi_{V_{t_i}}^{t_i}}{\sqrt{M_t}}\right) + \left(0, \left\{\sqrt{\frac{M_t}{t}} - \sqrt{\frac{1}{m_\tau}}\right\} \frac{\xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}}{\sqrt{t}}\right)$$
$$+ \left(0, \frac{X_0}{\sqrt{t}} + \frac{\xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}}{\sqrt{t}}\right).$$

De plus nous pouvons continuer

(39) $$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}}{\sqrt{t}}\right| > \varepsilon \Big/ N_t > 0\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}}{\sqrt{t}}\right|^2 \mathbb{I}_{\{a_t \leqslant \delta\}} \Big/ \Xi_t > 0\right] + \mathbb{P}(a_t > \delta \ / \ \Xi_t > 0) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 t} \sup_{u \leqslant \delta(\varepsilon')} V[\xi](u) + \frac{\varepsilon'}{2} \end{aligned}$$

où on note que l'inégalité

(40) $$\mathbb{P}(a_t > \delta \ / \ \Xi_t > 0) < \frac{\varepsilon'}{2}$$

est valable pour tout $\delta \geq \exists\delta(\varepsilon')$ et tout $t \geq 0$. De (39), on en déduit que la distribution de $\xi_{a_t}^{t_{M_t+1}}/\sqrt{t}$ disparaît sur l'évènement $\{\Xi_t > 0\}$ lorsque t tend vers l'infini. En employant le résultat sur le théorème-limite central en §IV et Proposition 3.1 (d) de [3]: pour tout $x > 0$,

(41) $$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(a_t \leqslant x \ / \ \Xi_t > 0) = \frac{1}{m_\tau} \int_0^x (1 - F(s)) \mathrm{d}s,$$

on conclut que sous la condition $\Xi_t > 0$, la paire

(42) $$\left(a_t, \frac{1}{\sqrt{m_\tau}} \frac{\sum_{i=1}^{M_t} \xi_{V_{t_i}}^{t_i}}{\sqrt{M_t}}\right)$$

converge vers (U, V) au sens de distribution lorsque t tend vers l'infini, où la variable aléatoire U est strictement positive et absolument continue, et sa densité est proportionelle à la distribution $1-F$, et la variable aléatoire V possède la distribution normale avec moyenne zero et variance v_ξ/m_τ, et indépendante de U. Enfin cela signifie que sous la condition $\Xi_t > 0$, la paire $(a_t, X_t/\sqrt{t}) \xrightarrow{d} (U, V)$ lorsque $t \to \infty$ au sens de distribution. Nous n'avons qu'à appliquer ce résultat ci-dessus au processus $Y = \{Y_t\}$ et n'avons qu'à noter que notre fonction ϕ de test appartient à l'espace $C^+_{fl}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. c.q.f.d. □

On va continuer la démonstration du théorème 2. Nous présenterons ici une caractérisation du processus $Y^{(n)}$ à l'échelle échangée, et ce processus que nous avons défini en l'assertion du théorème 2. Sa caractérisation est donnée par la fonctionnelle de Laplace en effet. Quand on écrit une mesure aléatoire de Poisson avec l'intensité $n\nu$ par $\pi_{n\nu}$, alors pour chaque $t \geq 0$, l'on a l'expression

$$\mathbb{E}^{\pi_{n\nu}}[e^{-\langle Y_t^{(n)}, \phi\rangle}] = e^{-\langle \nu, u_n^{[\phi]}(t)\rangle}, \tag{43}$$

où la fonction $u_n^{[\phi]}(t, a, x)$ satisfait l'équation intégrale suivante:

(44)

$$\begin{aligned} u_n^{[\phi]}(t, a, x) &= \hat{U}^n_{nt}\{n(1 - e^{-\frac{\phi}{n}})\}(a, x) \\ &- \lambda \int_0^t \hat{U}^n_{n(t-s)}[n^2\{(\Phi_n \circ g_n)(u_n^{[\phi]}(s, 0, x)) - g_n(u_n^{[\phi]}(s, 0, x))\}](a, x)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Un calcul direct entraîne immédiatement que pour $t \geq \varepsilon$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(a,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left| u_n^{[\phi]}(t, a, x) - u^{[\phi]}(t, x) \right| = 0. \tag{45}$$

Cela signifie que la fonction $u^{[\phi]}$ apparaissant en caractériszation du processus limite peut être approchée par la suite $\{u_n^{[\phi]}\}$ apparaissant en celle de $Y^{(n)}$.

Lemme 4. Pour $\varepsilon > 0$, la suite des processus $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}; t \geq 0\}$ est étroite au sens de Prokhorov [7] (voir aussi [21]) dans l'espace de Skorokhod $D([\varepsilon, \infty), M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$.

L'argument en (45) garantit par (43) que la fonctionnelle de Laplace $\mathbb{E}^{\pi_{n\nu}}[\exp\{-\langle Y_t^{(n)}, \phi\rangle\}]$ du processus $Y^{(n)}$ converge vers celle de $\{Z_t; t \geq 0\}$ pour tout $t \geq \varepsilon$. D'autre part, lemme 4 que nous avons déjà démontré, celui qui entraîne que le processus $Y^{(n)}$ est étroite. De plus, puisque l'équation intégrale (14) en définition 1 permet d'avoir une unique solution, on conclut enfin que le processus $Y^{(n)}$ converge faiblement sur l'espace de Skorokhod $D([\varepsilon, \infty), M_F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ vers le super-processus $Z = \{Z_t\}$ tant que $t \geq \varepsilon$. Ce qui donne la preuve du théorème 2 tout à fait.

VI La preuve du lemme 4

La preuve est standard. Techniquement dit, elle est très due essentiellement à la démonstration de Proposition 6.4 de [3]. Soient $\{\delta_n\}$ une suite des nombres positifs tels que $\delta_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, et $\{\tau_n\}$ une suite des temps d'arrêt [22] du processus $Y^{(n)}$ par rapport à la filtration canonique, tels que $T \geq \tau_n \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\exists T(< +\infty)$. Selon le critère d'Aldous [2] (voir aussi [16]), il suffit de montrer que pour $\phi \in C_{fl}^{+}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\langle Y^{(n)}_{\tau_n+\delta_n}, \phi\rangle - \langle Y^{(n)}_{\tau_n}, \phi\rangle \xrightarrow{d} 0 \tag{46}$$

lorsque n tend vers l'infini. Une application de l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev et l'inégalité maximale de Doob [7] (ou bien [22]) entraîne que pour $\gamma > 0$,

$$\mathbb{P}(\langle Y^{(n)}_{\tau_n}, \phi\rangle > \gamma) \leqslant \frac{C_1}{\gamma}\|\phi\|_\infty \mathbb{E}\Big[\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \langle Y^{(n)}_t, 1\rangle\Big] \leqslant \frac{C_2}{\gamma}\|\phi\|_\infty, \tag{47}$$

parce que le terme $\langle Y^{(n)}_t, 1\rangle$ étant un processus de masse totale est martingale, où nous avons posé au-dessus $\|f\|_\infty =$ la norme de la borne supérieure de la fonction $f(x)$ sur l'espace entier indiqué. Quand on définit

$$L^n_\phi(\delta_n, \alpha, \beta) := \mathbb{E}\Big[e^{-\alpha\langle Y^{(n)}_{\tau_n+\delta_n}, \phi\rangle - \beta\langle Y^{(n)}_{\tau_n}, \phi\rangle}\Big] \tag{48}$$

pour $\alpha, \beta \geq 0$, alors l'on déduit de la propriété markovienne forte du processus $Y^{(n)}$ que

$$L^n_\phi(\delta_n, \alpha, \beta) = \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-\langle Y^{(n)}_{\tau_n-\varepsilon}, u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(\varepsilon)\rangle\Big\}\Big]. \tag{49}$$

En utilisant l'inégalité maximale de Doob encore une fois nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
&|L^n_\phi(0, \alpha, \beta) - L^n_\phi(\delta_n, \alpha, \beta)\| \\
&\leqslant \|u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(\varepsilon) - u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(\varepsilon)\|_\infty \cdot \mathbb{E}\Big[\sup_{t \leqslant T}\langle Y^{(n)}_t, 1\rangle\Big] \\
&\leqslant C_3\|\hat{U}^n_{n\varepsilon}\{u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n) - \alpha\phi\}\|_\infty \\
&+ C_4\|\phi\|_\infty \int_0^\varepsilon \|u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(a) - u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(a)\|_\infty \mathrm{d}a \\
&+ \lambda C_5 \int_0^\varepsilon \|\varepsilon_n u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(a) - \varepsilon_n u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(a)\|_\infty \mathrm{d}a \\
&:= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{50}$$

Noter que le premier terme I_1 de la dernière ligne en (50) peut s'estimer supérieur à sa valeur par

$$\begin{aligned}
&C_3\left\|n\left(1 - e^{\frac{s\phi}{n}}\right) - \alpha\phi\right\|_\infty + C_6\delta_n(1 + \|\phi\|^2_\infty) \\
&+ C_3\left\|\hat{U}^n_{n(\varepsilon+\delta_n)}(\alpha\phi) - \hat{U}^n_{n\varepsilon}(\alpha\phi)\right\|_\infty.
\end{aligned} \tag{51}$$

Prenant notre hypothèse sur Φ_n en considération, nous obtenons par le résultat sur l'approximation uniforme (lemme 3)

$$(52) \qquad I_1 \to 0 \quad \text{et} \quad I_3 \to 0 \quad (\text{lorsque} \quad n \to \infty).$$

Par conséquent, nous avons tout de suite

$$(53) \qquad \begin{aligned} &\left\| u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(\varepsilon) - u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(\varepsilon) \right\|_\infty \\ &\leqslant \eta(n) + C_4|\phi|_\infty \int_0^\varepsilon \left\| u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(a) - u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(a) \right\|_\infty da \end{aligned}$$

où $\eta(n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Vu de sa forme de (53), nous pouvons employer l'inégalité de Gronwall (cf. Théorème 5.1, p.498 de [17]) à obtenir

$$(54) \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| u_n^{[u_n^{[\alpha\phi]}(\delta_n)+\beta\phi]}(\varepsilon) - u_n^{[(\alpha+\beta)\phi]}(\varepsilon) \right\|_\infty \leqslant \lim_{n\to\infty} \eta(n) \cdot e^{\varepsilon C_4 \|\phi\|_\infty} = 0.$$

Donc, on en déduit que

$$(55) \qquad \lim_{n\to\infty} |L_\phi^n(0,\alpha,\beta) - L_\phi^n(\delta_n,\alpha,\beta)| = 0.$$

En vertu de l'estimation de (47) il suit évidemment que la suite des processus $\{\langle Y_{\tau_n}^{(n)}, \phi\rangle;\ n \geq 1\}$ est étroite dans $\mathbb{R}_+$. Maintenant on prend ici sa sous-suite $\{\langle Y_{\tau_{n_k}}^{(n_k)}, \phi\rangle;\ k \geq 1\}$ arbitraire. Alors il y a une sous-suite à l'indice $\{n'_k\}$ de $\{\langle Y_{\tau_{n_k}}^{(n_k)}, \phi\rangle\}$ telle que son processus $\{\langle Y_{\tau_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle\}$ converge au sens de distribution vers une certaine variable aléatoire $\Lambda(\omega)$ lorsque $k \to \infty$ avec $\{n'_k\}_k$ satisfaisant $n'_k \to \infty$. Donc il est évident que

$$(56) \qquad \left(\langle Y_{\tau_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle, \langle Y_{\tau_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle\right) \xrightarrow{d} (\Lambda(\omega), \Lambda(\omega))$$

lorsque $k \to \infty$. En combinant ce (56) avec le résultat (55), nous pouvons déduire que

$$(57) \qquad \left(\langle Y_{\tau_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle, \langle Y_{\tau_{n'_k}+\delta_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle\right) \xrightarrow{d} (\Lambda(\omega), \Lambda(\omega))$$

lorsque $k \to \infty$. Ainsi ce résultat (57) implique directement que

$$(58) \qquad \langle Y_{\tau_{n'_k}+\delta_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle - \langle Y_{\tau_{n'_k}}^{(n'_k)}, \phi\rangle \xrightarrow{d} 0$$

lorsque $k \to \infty$. Cependant cela signifie que l'assertion (46) est valable tout à fait. Par le critère d'Aldous mentioné ci-dessus, la suite $Y^{(n)}$ devient étroite au sens de Prokhorov. Ce qui termine la démonstration.

Remerciments. Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche pour le projet de recherche élémentaire : No A06-513 (année d'exercice 2006) sur "les

théorème limites de super-processus", ceux qui ont été distribués par le centre d'organisation de recherches innovatrices (CORI) à l'université de Saïtama.

Références

[1] R. Abraham et J.-F. Le Gall: Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Theory Relat. Fields* **99** (1994), 251–275.

[2] D. Aldous: Stopping times and tightness. *Ann. Probab.* **6** (1978), 335–340.

[3] K.B. Athreya, S.R. Athreya and S. Iyer: Critical age dependent branching Markov processes and their scaling limits. *FM ArXiv* math.PR/0701661 (2007), 1–24.

[4] K.B. Athreya and P.E. Ney: *Branching Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] D.A. Dawson: *Measure-Valued Markov Processes.* Lect. Notes in Math. **1541**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[6] D.A. Dawson, L.G. Gorostiza and Z. Li: Nonlocal branching super-processes and some related models. *Acta Appl. Math.* **74** (2002), 93–112.

[7] C. Dellacherie et P.-A. Meyer: *Probabilité et Potentiel : Théorie des Martingales.* Tome I et II, Hermann, Paris, 1980.

[8] J.-F. Delmas: Super-mouvement Brownien avec catalyse. *Stochastic Stochastic Rep.* **58** (1996), 307–347.

[9] J.-F. Delmas et B. Jourdain: *Modèles Aléatoires.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[10] I. Dôku: Compacité étroite des lois relatives à la densité de processus suggérée par un problème de martingale. *J. Saitama Univ. Math. Nat. Sci.* **51**(2) (2002), 1–15.

[11] I.Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.

[12] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6**(2) (2006), 145–205.

[13] I. Dôku: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577-593.

[14] I. Dôku: Un théorème limite de système des particules aléatoires et processus de branchement à valeurs dans mesures. *J. Saitama Univ. (Fac. Educ.)* **56**(1) (2007), 307–321.

[15] E.B. Dynkin: *An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.* CRM Monograph Series, 6. Amer. Math. Soc. Providence, 1994.

[16] A.M. Etheridge: *An Introduction to Superprocesses.* Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[17] S.N. Ethier et T.G. Kurtz: *Markov Processes : Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.

[18] T.E. Harris: *The Theory of Branching Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[19] N. Ikéda et S. Oitanabé: *Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de*

diffusion). (en russe) Naouka, Moscou, 1986.
[20] J. Jacod et P. Protter: *L'essential en Théorie des Probabilités.* Cassini, Paris, 2003.
[21] J. Jacod et A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[22] G. Letta: *Martingales et Intégration Stochastique.* Scuola Normale Superiore, Pisa, 1984.

(Received March 30, 2007)
(Accepted April 20, 2007)