J. Saitama Univ., Fac. Educ., 57(2) : 211–223 (2008)

Comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration

Isamu DÔKU*

Résumé

Nous considérons dans cet article les super-processus avec immigration associés au mouvement spatial dépendant. Particulièrement, certains comportements asymptotes des super-processus nous intéressent beaucoup. De fait, nous étudierons comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration lorsque le temps tend vers l'infini.

Mots-clés: mesure aléatoire, comportement asymptote, la borne supérieure, super-processus avec immigration, l'espérance au poids.

I Introduction

Cet article traite le problème de comportement asymptote des super-processus avec immigration [15], et notre seul but est d'étudier certains comportements asymptotes des super-processus associés au mouvement spatial dépendant [4], en particulier lorsque le temps tend vers l'infini. De fait, nous étudierons des comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration. Pour les super-processus avec immigration, voir [10],[11] et [14].

Soit $\varphi_p(x) = (1+x^2)^{-p/2}$, $x \in \mathbb{R}$, pour un nombre non-négatif p. L'espace $C_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$, telles que f remplisse l'inégalité $|f| \leqslant C_0\varphi_p$, $(\exists C_0 > 0)$. $C_p^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $C_p(\mathbb{R})$, celui qui désigne l'ensemble de toutes les fonctions deux fois continûment dérivables f dans $\mathbb{R}$, telles que f remplisse l'inégalité $|f'| + |f''| \leqslant C_1\varphi_p$, $(\exists C_1 > 0)$. Soient

* Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon.
E-mail: idoku@math.edu.saitama-u.ac.jp.

$M_p(\mathbb{R})$ (resp. $M_p^a(\mathbb{R})$) l'espace de toutes les mesures boréliennes tempérées μ (ou bien l'espace de toutes les mesures tempérées atomiques) sur $\mathbb{R}$, respectivement, telles que l'on ait

$$(1) \qquad \langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(\mathrm{d}x) < +\infty, \qquad \text{pour} \quad \forall f \in C_p(\mathbb{R}).$$

Pour une fonction fixée une fois continûment dérivable dans $\mathbb{R}$, telle que h et h' soient en même temps carrées intégrables, on définit

$$(2) \qquad \rho(x) = \int_{\mathbb{R}} h(y-x)h(y)\mathrm{d}y, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soient $\sigma > 0$ et $m \in M_p(\mathbb{R})$. De plus, soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé standard élémentaire avec filtration usuelle. Supposons ici que la fonction prévisible [20] non-négative $q : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ satisfait la condition

$$(3) \qquad \int_0^t \mathbb{E}\left| \int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x) \right|^2 \mathrm{d}s < +\infty, \qquad \text{pour} \quad \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas on écrit $q \in L^2_{\text{pré}}(\Omega)^+$. De plus, supposons qu'il existe un certain nombre $T_0 > 0$ suffisamment grand et une constante positive $q_0 > 0$ tels que pour tout $t > T_0$,

$$(4) \qquad q(t,x,\omega) \asymp \exp\{-q_0 t\}, \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

uniformément par rapport à x, où le symbole $f \asymp g$ signifie qu'il existe certaines constantes positives propres $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$ telles que $q_1 g \leqslant f \leqslant q_2 g$ est valable. Soit $L^1(\mathbb{R}; \varphi_p \mathrm{d}m)$ l'espace de L^1 sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure au poids $\mathrm{d}\nu = \varphi_p \mathrm{d}m$, et on pose ici

$$(5) \qquad H(t) = \int_0^t \mathbb{E}\|q(s,\cdot,\omega)\|_{L^1(\mathbb{R};\varphi_p dm)}\mathrm{d}s.$$

Définition 1. *Soit $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique continu avec valeurs dans l'espace $M_p(\mathbb{R})$. On dit que X est un super-processus généralisé avec immigration q et mouvement spatial dépendant, si $X = \{X_t; t \geq 0\}$ satisfait les conditions* (6)–(7) *suivantes: pour chaque $\varphi \in C_p^2(\mathbb{R})$ et $\mu \in M_p(\mathbb{R})$*

$$(6) \qquad M_t(\varphi) = \langle \varphi, X_t \rangle - \langle \varphi, \mu \rangle - \int_0^t \left\langle \frac{\rho(0)}{2}\varphi'', X_s \right\rangle \mathrm{d}s - \int_0^t \langle q(s)\varphi, m \rangle \mathrm{d}s$$

est une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, dont le processus de variation quadratique est donné par

$$(7) \qquad \langle M(\varphi) \rangle_t = \int_0^t \langle \sigma\varphi^2, X_s \rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}} \langle h(z-\cdot)\varphi', X_s \rangle^2 \mathrm{d}z.$$

Remarque 1. On trouve dans [3] (Dawson-Li; 2003) une belle théorie pour la construction des super-processus avec immigration associés au mouvement spatial dépendant, par une excursion à une dimension [23]. Voir aussi [22] (Li-Xiong; 2006). Sur les construction pour diverse sortes de super-processus, voir [1],[5],[7],[9] et [13] (aussi [16],[17]).

II Résultats principals

Nous introduirons dans cette section quelques résultats principals de cet article. Nous désignons par $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique continu à valeurs dans l'espace $M_p(\mathbb{R})$. Nous supposons ici que $\{X_t\}$ soit un super-processus généralisé avec immigration au taux d'immigration $q = q(t,x)$ et avec mouvement spatial dépendant, celui qui a été défini en première section. Tout d'abord on va commencer à introduire un résultat primitif sur le comportement asymptote de q associée au processus $\{X_t; t \geq 0\}$ en question. C'est-à-dire que:

Proposition 2. *Nous avons*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t} \int_0^t \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}s$$

$$= \begin{cases} 0, & (\text{si} \quad \eta > 0), \\ K_0(T_0) + \dfrac{C^*}{q_0} e^{-q_0 t}\langle\varphi_p, m\rangle, & (\text{si} \quad \eta = 0), \\ \infty, & (\text{si} \quad \eta < 0), \end{cases} \tag{8}$$

où $K_0(T_0)$ est une constante positive dépendante au temps T_0 suffisamment grand donné en (4), et C^* est un certain nombre positif tel que $q_1 \leqslant C^* \leqslant q_2$.

Proposition 3. *Nous avons*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t} \int_0^t \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \langle\varphi_p,\mu\rangle \exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$= \begin{cases} 0, & (\text{si} \quad \eta > \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \langle\varphi_p,\mu\rangle < \infty, & (\text{si} \quad \eta = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \infty, & (\text{si} \quad \eta < \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty). \end{cases} \tag{9}$$

Proposition 4. *Si la valeur de transformation de Laplace de $H(t)$ au point $\alpha = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$ existe, alors on a*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t} \int_0^t \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \left\{\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}u\right\}\cdot$$
$$\times \exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$
(10) \qquad = \begin{cases} 0, & (\text{si } \eta > \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \cdot \mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right), & (\text{si } \eta = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \infty, & (\text{si } \eta < \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \end{cases}
$$

où $\mathcal{L}[f](\alpha)$ désigne la transformation de Laplace d'une fonction f avec paramètre α.

Remarque 2. En fait, la discussion sur l'existence de transformation de Laplace $\mathcal{L}[H](C_1 \|\rho\|_\infty /2)$ $(< \infty)$ à $\alpha = C_1\|\rho\|_\infty/2$ provient du lemme clé, celui qui peut être trouvé dans la preuve de Proposition 4. D'autre part, l'argument sur de finies valeurs de $\mathcal{L}[H]$ peut être assurée sous les hypothèses (3) et (4) sur la fonction aléatoire q.

Théorèm 5. *Il existe une fonction $\Phi(t)$ positive dominante telle que*

$$
(11) \qquad e^{-\eta t}\mathbb{E}[\langle \varphi_p, X_t\rangle] \leqslant \Phi(t), \qquad \text{for} \quad \forall t > 0
$$

et ses limites à long temps sont données comme suit:
Si la transformation de Laplace $\mathcal{L}[H](\alpha)$ existe à $\alpha = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$, alors

$$
(12) \qquad \lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \begin{cases} 0, & (\text{si } \eta > \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \langle \varphi_p, \mu\rangle + \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \cdot \mathcal{L}[H](\alpha_0), & (\text{si } \eta = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \infty, & (\text{si } \eta < \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \end{cases}
$$

où on pose α_0 comme $\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$.

III Preuves des comportements asymptotes

Dans cette section nous allons donner les preuves de deux assertions décrits dans Section II, ceux qui sont des résultats fondamentals de cet article.

Démonstration de Proposition 2. Quand on traite l'intégrale à droite de (8) comme une intégrale de $\langle q(s)\varphi_p, m\rangle$ sur le domaine $(0, t] \times \Omega$ par rapport à la mesure de produit $(\ell \otimes \mathbb{P})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}\omega)$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_0^t \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}s$$
$$= \lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\iint_{(0,t]\times\Omega}\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle(s,\omega)(\ell\otimes\mathbb{P})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\omega)$$
$$\leqslant \lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\left(\iint_{\Omega_t} 1^2\mathrm{d}(\ell\otimes\mathbb{P})\right)^{1/2}\cdot\left(\iint_{\Omega_t}|\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p,m\rangle|^2\mathrm{d}(\ell\otimes\mathbb{P})\right)^{1/2}$$
$$= \lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}t^{1/2}\left(\int_0^t \mathbb{E}|\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p,m\rangle|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

(13)

$$\leqslant \left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1/2}}{e^{\eta t}} = 0,$$

autant que η soit positif, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, nous allons posé $\Omega_t = (0,t]\times\Omega$ pour simplicité, et nous nous avons servi de l'hypothèse (3) sur la fonction aléatoire q. En cas de $\eta = 0$, il est facile à considérer le comportement asymptote avec la condition (4). Pour traiter tous les deux cas $\eta = 0$ et $\eta < 0$ en même temps, nous allons considérer l'intégrale sur le domaine $[0,T_0]$ retreint. Noter que

$$L^2([0,T_0]\times\Omega;\ \mathrm{d}\ell\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}) \subset L^1([0,T_0]\times\Omega;\ \mathrm{d}\ell\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}) \tag{14}$$

pour un nombre T_0 suffisamment grand, décrit en hypothèse (4). Par conséquent, il y a un fini nombre $K_0(T_0) > 0$ positif tel que

$$\begin{aligned}(\exists)\ K_0(T_0) &\equiv K_0(q,\varphi_p;\ T_0)\\ &= \|\langle q\varphi_p, m\rangle(s,\omega)\|_{L^1([0,T_0]\times\Omega;\ d\ell\otimes d\mathbb{P})}\\ &= \int_0^{T_0}\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\ell(\mathrm{d}s) < \infty.\end{aligned} \tag{15}$$

Puisque notre intérêt principal est d'étudier comportements asymptotes de l'intégrale au poids avec le terme exponentiel $e^{-\eta t}$ lorsque le temps t tend vers l'infini, il est raisonable à diviser l'intégrale en deux parts: c'est-à-dire, pour $\forall t > T_0$,

$$\begin{aligned}&e^{-\eta t}\int_0^t \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}s\\ &= e^{-\eta t}\left\{\int_0^{T_0}+\int_{T_0}^t\right\}\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}s\\ &= e^{-\eta t}K_0(T_0) + e^{-\eta t}\int_{T_0}^t \mathbb{E}[\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p,m\rangle]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{16}$$

Il suit immédiatement de (15) que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_0^{T_0}\mathbb{E}[\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p,m\rangle]\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & (\text{si}\quad \eta > 0),\\ K_0(T_0), & (\text{si}\quad \eta = 0),\\ \infty, & (\text{si}\quad \eta < 0).\end{cases} \tag{17}$$

De (4) on a alors

$$q_1 \exp\{-q_0 s\} \leqslant q(s,x,\omega) \leqslant q_2 \exp\{-q_0 s\}, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.} \tag{18}$$

uniformément par rapport à x pour un temps $s(> T_0)$ suffisamment grand. En conséquence, par linéarité et monotonicité de l'intégration, on obtient aisément

$$\langle\varphi_p, m\rangle \int_{T_0}^{t} q_1 e^{-q_0 s}\mathrm{d}s \leqslant \int_{T_0}^{t} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}s \leqslant \langle\varphi_p, m\rangle \int_{T_0}^{t} q_2 e^{-q_0 s}\mathrm{d}s, \tag{19}$$

pour aucun $t > T_0$. En d'autres termes, Eq.(19) amène

$$\int_{T_0}^{t} \mathbb{E}[\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}s \asymp \frac{\langle\varphi_p, m\rangle}{q_0}\left(e^{-q_0 T_0} - e^{-q_0 t}\right). \tag{20}$$

En prenant la limite $t \to \infty$, il est facile à voir

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_{T_0}^{t} \mathbb{E}[\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}s \asymp \lim_{t\to\infty} \frac{\langle\varphi_p, m\rangle}{q_0} e^{-\eta t}\left(e^{-q_0 T_0} - e^{-q_0 t}\right). \tag{21}$$

Il est intéressant à noter que la combinaison de (17) avec (21) amène aussi le résultat (13) au-dessus en cas de $\eta > 0$. Puisqu'on a

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty}\int_{T_0}^{t} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(s,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}s \\ &\asymp \lim_{t\to\infty} \frac{\langle\varphi_p, m\rangle}{q_0}\left(e^{-q_0 T_0} - e^{-q_0 t}\right) = \frac{1}{q_0}e^{-q_0 T_0}\langle\varphi_p, m\rangle, \end{aligned} \tag{22}$$

en cas spécial de $\eta = 0$, le terme droit de (8) possède la limite et sa limite est donnée par $K_0(T_0) + \frac{C^*}{q_0}e^{-q_0 T_0}\langle\varphi_p, m\rangle$ avec $q_1 \leqslant C^* \leqslant q_2$, en prenant le résultat (17) en considération. Pour le cas de $\eta < 0$, c'est la presque même chose-là, et nous n'avons qu'à regarder fixement

$$\lim_{t\to\infty} e^{\eta_+ t}\frac{\langle\varphi_p, m\rangle}{q_0}\left(e^{-q_0 T_0} - e^{-q_0 t}\right) = \infty \tag{23}$$

en posant $\eta_+ = -\eta > 0$. Donc, il est facile à voir que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_{T_0}^{t} \mathbb{E}[\langle q(s,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}s \begin{cases} = 0, & (\text{si } \eta > 0), \\ \asymp \dfrac{1}{q_0}e^{-q_0 T_0}\langle\varphi_p, m\rangle, & (\text{si } \eta = 0), \\ = \infty, & (\text{si } \eta < 0). \end{cases} \tag{24}$$

En combinant ces résultats sur limites au poids (17) et (24), on peut conclure (8) enfin. □

Démonstration de Proposition 3. Un calcul direct entraîne

$$\begin{aligned}
&\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \int_0^t \langle \varphi_p, \mu\rangle \exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty (t-s)\right\} \mathrm{d}s \\
&= \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \langle \varphi_p, \mu\rangle e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t} \int_0^t \exp\left\{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s\right\} \mathrm{d}s \\
&= \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \langle \varphi_p, \mu\rangle e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t} \cdot \frac{1}{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty}\left(1 - e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\right) \\
&= \langle \varphi_p, \mu\rangle e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\left(1 - e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\right). \qquad (25)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \int_0^t \langle \varphi_p, \mu\rangle \exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty (t-s)\right\} \mathrm{d}s \\
&= \langle \varphi_p, \mu\rangle \lim_{t\to\infty} e^{-(\eta - \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)t}\left(1 - e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\right) \\
&= \langle \varphi_p, \mu\rangle \lim_{t\to\infty} e^{-(\eta - \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)t}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Donc, il est clair par des résultats décrits au-dessus que la limite (26) devient nulle si $\eta > C_1\|\rho\|_\infty/2$, mais possède une finie valeur de limite $\langle \varphi_p, \mu\rangle$ ($< \infty$) lorsque $\eta = C_1\|\rho\|_\infty/2$, et peut tendre vers l'infini autant que $\eta < C_1\|\rho\|_\infty/2$. Ce qui termine la preuve de Proposition 3. □

IV Preuves de proposition et lemme clé

Nous allons démontrer Proposition 4 dans cette section. En vertu de l'hypothèse (3), une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $0 \leqslant s \leqslant t$ entraîne l'estimation simple suivante

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}u \\
&\leqslant \sqrt{s}\left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} q(u,x,\omega)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right|^2 \mathrm{d}u\right)^{1/2} \\
&\leqslant t^{1/2}\cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} < \infty, \qquad (27)
\end{aligned}$$

en posant $\Xi(q,\varphi_p) = \int_0^\infty \mathbb{E}|\langle q\varphi_p, m\rangle|^2 \mathrm{d}u$, parce que la quantité $\|q(s,\omega)\|_{L^1(\mathbb{R};\varphi_p dm)}$ est carré intégrable comme une fonction de (s,ω), c'est-à-dire,

$$\|q(s,\omega)\|_{L^1(\mathbb{R};\varphi_p dm)} \in L^2([0,\infty)\times\Omega;(\ell\otimes\mathbb{P})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\omega)). \qquad (28)$$

Donc, il est clair que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \int_0^t \left\{\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x)\varphi_p(x)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}u\right\} e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)}\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\cdot\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_0^t t^{1/2}\Xi(q,\varphi_p)^{1/2}\cdot\exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)\right\}\mathrm{d}s\\
&=\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\Xi(q,\varphi_p)^{1/2}\cdot\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}t^{1/2}e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\int_0^t \exp\left\{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s\right\}\mathrm{d}s\\
&=\Xi(q,\varphi_p)^{1/2}\cdot\lim_{t\to\infty} t^{1/2}e^{-(\eta-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty t}\right)\\
&=\Xi(q,\varphi_p)^{1/2}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1/2}}{\exp\left\{\left(\eta-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right)t\right\}}=0,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

autant que le paramètre η excède la valeur $C_1\|\rho\|_\infty/2$. Des cas les plus intéressants tels que $0<\eta<\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$ ou $\eta=\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$ seront discutés plus tard.

Nous considérons maintenant deux cas intéressants: $0<\eta<\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$ ou bien $\eta=\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$. Noter que $\mathcal{L}[f](\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha s}f(s)\mathrm{d}s$. En fait, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\int_0^t \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\left\{\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u)\varphi_p\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}u\right\}e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)}\mathrm{d}s\\
&=\lim_{t\to\infty} e^{-(\eta-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)t}\cdot\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\cdot\lim_{t\to\infty}\int_0^t\left\{\int_0^s\mathbb{E}[\langle q(u)\varphi_p,m\rangle]\mathrm{d}u\right\}e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s}\mathrm{d}s\\
&=: I_1\times\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\times I_2.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Nous obtenons clairement

$$
I_1\equiv\lim_{t\to\infty} e^{-(\eta-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)t}=\begin{cases}1, & (\text{si}\quad \eta=\dfrac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty),\\ \infty, & (\text{si}\quad 0<\eta<\dfrac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty).\end{cases}
\tag{31}
$$

D'autre part, pour le terme I_2, on observe que I_2 peut être récrit en

$$
\begin{aligned}
I_2&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t H(s)e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s}\mathrm{d}s\\
&=\mathcal{L}[H](\alpha)|_{\alpha=C_1\|\rho\|_\infty/2}=\mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

si la transformation de Laplace de $H(t)$ au point $\alpha=C_1\|\rho\|_\infty/2$ existe. En conséquence, s'il existe $(\exists)$ $\mathcal{L}[H](\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty)<\infty$, alors la limite $\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\cdot I_1\times I_2$ peut exister ou bien n'existe pas en conformité avec la région du paramètre η. C'est-à-dire, en prenant (31) en considération, nous pouvons obtenir aisément

$$\text{la limite}\quad \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\cdot I_1\times I_2$$

$$
(33)\qquad = \begin{cases} \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \cdot \mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right), & (\text{si} \quad \eta = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty), \\ \infty, & (\text{si} \quad 0 < \eta < \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty). \end{cases}
$$

Quand on combine (29) avec le résultat (33) au-dessus, alors on obtient enfin le comportement (10). Ce qui donne le résultat souhaité.

Pour conclure la preuve parfaitement, il reste encore à montrer l'existence de transformation de Laplace $\mathcal{L}[H](\alpha)$ au point $\alpha = C_1\|\rho\|_\infty/2$. En effet, l'argument sur de finies valeurs est pourvue par le lemme clé suivant:

Lemme 6. *La transformation de Laplace $\mathcal{L}[H](\alpha)$ de la fonction $H(s)$ définie en (5) existe au point $\alpha = \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty$; c'est-à-dire, il existe une constante propre $\hat{K} > 0$ telle que l'on ait*

$$
(34)\qquad \mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right) \leqslant \frac{\hat{K}}{\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right)} < \infty,
$$

où $\hat{K} \equiv \hat{K}(T_0, \Xi, \varphi_p, m, q_0, q_2)$ est un nombre positif fini dépendant de T_0, $\Xi(q, \varphi_p)$, m, q_0 et q_2.

Démonstration de Lemme 6. Rappelons ici que

$$
(35)\qquad \mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right) = \mathcal{L}[H](\alpha)\Big|_{\alpha=\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty} = \int_0^\infty H(s)e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s}\mathrm{d}s,
$$

avec la fonction $H(s) = \int_0^s \mathbb{E}\|q(u)\|_{L^1(\mathbb{R};\varphi_p dm)}\mathrm{d}u$. Nous divisons l'intégrale (35) en deux parts I_1 et I_2, celles qui sont des intégrales avec les mêmes intégrands sur les intervalles $[0, T_0]$ et $[T_0, \infty)$ respectivement. En effet, chaque intégrale est donnée comme suit.

$$
(36)\qquad I_1 = \int_0^{T_0}\left\{\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x,\omega)\varphi_p(x)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}u\right\}\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s\right\}\mathrm{d}s,
$$

et

$$
(37)\qquad I_2 = \int_{T_0}^{\infty}\left\{\int_0^s \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x,\omega)\varphi_p(x)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}u\right\}\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s\right\}\mathrm{d}s.
$$

Tout d'abord nous considérons I_1. Puisque nous obtenons aisément

$$
(38)\qquad \begin{aligned} J &= \iint_{[0,T_0]\times\Omega} \langle q(u)\varphi_p, m\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}\mathbb{P} \leqslant T_0^{1/2}\left(\iint_{[0,T_0]\times\Omega} |\langle q(u)\varphi_p, m\rangle|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{1/2} \\ &= T_0^{1/2}\left(\int_0^{T_0}\mathbb{E}|\langle q(u)\varphi_p, m\rangle|^2\mathrm{d}u\right)^{1/2} = T_0^{1/2}\cdot\Xi(q,\varphi_p)^{1/2} < \infty \end{aligned}
$$

en employant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (3), il n'est pas difficile à voir que

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \int_0^{T_0} \left\{ \int_0^{T_0} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x,\omega)\varphi_p(x)\mathrm{d}m \right) \mathrm{d}u \right\} \exp\left\{ -\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s \right\} \mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^{T_0} T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s \right\} \mathrm{d}s \\ &= T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} \frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty} \left(1 - e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty T_0} \right) \\ &\leqslant T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} \frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty} < \infty. \end{aligned} \tag{39}$$

D'autre part, même pour le terme I_2, une discussion similaire au-dessus avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la même hypothèse (3) amène

$$\begin{aligned} J_1 &:= \int_0^{T_0} \mathbb{E}[\langle q(u,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}u \leqslant T_0^{1/2} \left(\int_0^{T_0} \mathbb{E}|\langle q(u,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle|^2 \mathrm{d}u \right)^{1/2} \\ &\leqslant T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} < \infty. \end{aligned} \tag{40}$$

De plus, on va appliquer l'hypothèse (4) cette fois pour obtenir

$$\begin{aligned} J_2 &:= \int_{T_0}^{\infty} \mathbb{E}[\langle q(u,\cdot,\omega)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}u \leqslant \int_{T_0}^{\infty} q_2 e^{-q_0 u} \mathbb{E}[\langle \varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}u \\ &= q_2 \langle \varphi_p, m\rangle \int_{T_0}^{\infty} \exp\{-q_0 u\}\mathrm{d}u = \langle \varphi_p, m\rangle \left(\frac{q_2}{q_0} \right) \exp\{-q_0 T_0\} < \infty. \end{aligned} \tag{41}$$

Par conséquent, il en découle que

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \int_{T_0}^{\infty} \left(\left\{ \int_0^{T_0} + \int_{T_0}^{\infty} \right\} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} q(u,x)\varphi_p(x)\mathrm{d}m \right) \mathrm{d}u \right) \exp\left\{ -\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s \right\} \mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{T_0}^{\infty} \left\{ T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2} + \langle \varphi_p, m\rangle \left(\frac{q_2}{q_0} \right) e^{-q_0 T_0} \right\} e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s} \mathrm{d}s \\ &= K^* \frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty} e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty T_0} < \infty, \end{aligned} \tag{42}$$

parce que nous avons utilisé les estimations supérieure (40) et (41), et ensuite posé $K^* = T_0^{1/2} \cdot \Xi(q,\, \varphi_p)^{1/2} + \langle \varphi_p, m\rangle (q_2/q_0) e^{-q_0 T_0}$ pour simplicité. Puisqu'on a

$$\mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \right) = \left\{ \int_0^{T_0} + \int_{T_0}^{\infty} \right\} H(s) \exp\left(-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty s \right) \mathrm{d}s = I_1 + I_2, \tag{43}$$

il suit immédiatement de (39) et (42) que

$$\mathcal{L}[H]\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right) \leqslant T_0^{1/2}\cdot \Xi(q,\varphi_p)^{1/2}\frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty} + \frac{2K^*}{C_1\|\rho\|_\infty}e^{-\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty T_0}$$

$$\leqslant (T_0\Xi)^{1/2}\frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty} + \left\{(T_0\Xi)^{1/2} + \langle\varphi_p, m\rangle\left(\frac{q_2}{q_0}\right)\right\}\cdot\frac{2}{C_1\|\rho\|_\infty}$$

$$\leqslant \hat{K}\left(\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\right)^{-1} < \infty, \tag{44}$$

où on n'a qu'à poser

$$\hat{K} = 2\sqrt{T_0\cdot\Xi(q,\varphi_p)} + \langle\varphi_p, m\rangle\left(\frac{q_2}{q_0}\right). \tag{45}$$

Ce qui conclut l'assertion du lemme clé. □

V Preuve de théorème

En vertu de la caractérisation de super-processus X par martingale (6), nous avons (voir [18],[19] et [8])

$$\langle\varphi, X_t\rangle = M_t(\varphi) + \langle\varphi,\mu\rangle + \frac{\rho(0)}{2}\int_0^t \langle\varphi'', X_s\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \langle q(s)\varphi, m\rangle \mathrm{d}s. \tag{46}$$

En faisant attention à l'égalité simple $\mathbb{E}[M_t(\varphi_p)] = 0$ [21], nous pouvons prendre l'espérance $\mathbb{E}[\cdot]$ de (46) par rapport à $\mathrm{d}\mathbb{P}$ et appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\mathbb{E}[\langle\varphi_p, X_t\rangle] = \langle\varphi_p,\mu\rangle + \int_0^t \mathbb{E}[\langle q(s)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}s + \frac{\rho(0)}{2}\mathbb{E}\int_0^t \langle\varphi_p'', X_s\rangle\mathrm{d}s. \tag{47}$$

De plus, un calcul simple avec l'inégalité de Gronwall amène l'estimation suivante, parce que nous avons employé une relation triviale $|\varphi_p'| + |\varphi_p''| \leqslant C_1\varphi_p$, $(\exists C_1 > 0)$. C'est-à-dire que, par Proposition 2.1 de [22] (Li-Xiong; 2006), le super-processus $X = \{X_t; t \geq 0\}$ étant une solution au problème de martingale (6)–(7), celui qui remplit l'inégalité suivant

(48)

$$\mathbb{E}[\langle\varphi_p, X_t\rangle] \leqslant \langle\varphi_p,\mu\rangle + \int_0^t \mathbb{E}[\langle q(s)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}s + \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty \int_0^t\left(\langle\varphi_p,\mu\rangle + \int_0^s \mathbb{E}[\langle q(u)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}u\right)e^{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)}\mathrm{d}s.$$

Puisque $\langle\varphi_p,\mu\rangle$ reste fini autant que μ vit en $M_p(\mathbb{R})$, il est facile à voir

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\eta t}\langle\varphi_p,\mu\rangle = \begin{cases} 0, & (\text{si } \eta > 0), \\ \langle\varphi_p,\mu\rangle, & (\text{si } \eta = 0), \\ \infty, & (\text{si } \eta < 0). \end{cases} \tag{49}$$

Nous définissons ici une fonction dominante $\Phi(t)$ par rapport au terme de but $e^{-\eta t}\mathbb{E}[\langle\varphi_p, X_t\rangle]$ comme

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= e^{-\eta t}\langle\varphi_p,\mu\rangle + e^{-\eta t}\int_0^t \mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}} q(s,x)\varphi_p(x)m(\mathrm{d}x)\right\}\mathrm{d}s \\ &+ e^{-\eta t}\int_0^t \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\langle\varphi_p,\mu\rangle\cdot\exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)\right\}\mathrm{d}s \\ &+ e^{-\eta t}\int_0^t \frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty\left\{\int_0^s \mathbb{E}[\langle q(u)\varphi_p, m\rangle]\mathrm{d}u\right\}\cdot\exp\left\{\frac{C_1}{2}\|\rho\|_\infty(t-s)\right\}\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{50}$$

Par l'inégalité (48), cette fonction $\Phi(t)$ satisfait clairement $e^{-\eta t}\mathbb{E}[\langle\varphi_p, X_t\rangle] \leqslant \Phi(t)$ pour aucun $t > 0$. Par conséquent, le comportement asymptote (12) de $\Phi(t)$ au long temps lorsque $t \to \infty$, celui qui est naturellement dérivé par (49), (8) de Proposition 2, (9) de Proposition 3, et (10) de Proposition 4, si $\mathcal{L}[H](\alpha_0) = \infty$. De plus, si nous avons $\mathcal{L}[H](\alpha_0) < \infty$, alors par (10) de Proposition 4, cette fois, avec (49), il en découle que un autre comportement asymptote (12) au long temps alternatif se passe, en combinant ces comportements asymptotes-là en Proposition 2 et Proposition 3. Cela signifie l'assertion souhaité et annoncé. Ce qui termine la preuve du théorème 5. □

Remerciments. Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche pour le projet de recherche élémentaire : No CI34 (année d'exercice 2007), ceux qui ont été distribués par le centre d'organisation de recherches innovatrices à l'université de Saïtama.

Références

[1] R. Abraham et J.-F. Le Gall: Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Theory Relat. Fields* **99** (1994), 251–275.

[2] D. Aldous: Stopping times and tightness. *Ann. Probab.* **6** (1978), 335–340.

[3] D.A. Dawson et Z.H. Li: Construction of immigration superprocesses with dependent spatial motion from one-dimensional excursions. *Probab. Theory Relat. Fields* **127** (2003), 37–61.

[4] D.A. Dawson, Z.H. Li et H. Wang: Superprocesses with dependent spatial motion and general branching dendities. *Electr. J. Probab.* **6**, No.25 (2001), 1–33.

[5] D.A. Dawson, Z.H. Li et X.W. Zhou: Superprocesses with coalescing Brownian spatial motion as large scale limits. *J. Theoret. Probab.* **17** (2004), 673–692.

[6] C. Dellacherie et P.-A. Meyer: *Probabilité et Potentiel : Théorie des Martingales.* Tome I et II, Hermann, Paris, 1980.

[7] J.-F. Delmas: Super-mouvement Brownien avec catalyse. *Stochastic Stochastic Rep.* **58** (1996), 307–347.

[8] I. Dôku: Compacité étroite des lois relatives à la densité de processus suggérée par un problème de martingale. *J. Saitama Univ. Math. Nat. Sci.* **51**(2) (2002), 1–15.
[9] I.Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.
[10] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6**(2) (2006), 145–205.
[11] I. Dôku: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.
[12] I. Dôku: Un théorème limite de système des particules aléatoires et processus de branchement à valeurs dans mesures. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **56**(1) (2007), 307–321.
[13] I. Dôku: Construction des super-processus associés aux processus de branchement dépendants de l'âge. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **56**(2) (2007), 81–93.
[14] I. Dôku: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6** (2008), 56–69.
[15] I. Dôku: Sur certaines comportements asymptotes des super-processus avec immigration. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **57**(1) (2008), 233—240.
[16] E.B. Dynkin: *An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.* CRM Monograph Series, 6. Amer. Math. Soc. Providence, 1994.
[17] A.M. Etheridge: *An Introduction to Superprocesses.* Amer. Math. Soc., Providence, 2000.
[18] S.N. Ethier et T.G. Kurtz: *Markov Processes : Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.
[19] N. Ikéda et S. Oitanabé: *Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion).* (en russe) Naouka, Moscou, 1986.
[20] J. Jacod et A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[21] G. Letta: *Martingales et Intégration Stochastique.* Scuola Normale Superiore, Pisa, 1984.
[22] Z.H. Li et J. Xiong: Continuous local time of a purely atomic immigration superprocess with dependent spatial motion. *preprint*, (2006), 1–22.
[23] T. Shiga: A stochastic equation based on a Poisson system for a class of measure-valued diffusion processes. *J. Math. Kyoto Univ.* **30** (1990), 245–279.
[24] H. Wang: State classification for a class of measure-valued branching diffusions in a Brownian medium. *Probab. Theory Relat. Fields* **109** (1997), 39–55.

(Received March 12, 2008)
(Accepted April 25, 2008)