J. Saitama Univ., Fac. Educ., 58(1) : 209–218 (2009)

Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus

Isamu Dôku*

Résumé

Nous considérons dans cet article une classe de super-processus. Particulièrement, certains comportements asymptotes des super-processus nous intéressent beaucoup. De fait, nous essayerons de donner une preuve détaillée du comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus lorsque le temps tend vers l'infini.

Mots-clés: mesure aléatoire, comportement limite, le temps long, super-processus, l'espérance au poids.

I Introduction

Cet article traite le problème de comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. Notre seul but est de pourvoir une preuve du comportement local en l'espérance de super-processus. De fait, nous essayerons de donner une démonstration détaillée du comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus du type diffusion lorsque le temps tend vers l'infini.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^d$, et soit $\mathcal{B}(D)$ la σ-tribu borélienne sur D. L'espace $M_F(D)$ (resp. $M_c(D)$) désigne respectivement la classe de mesures finies sur $\mathcal{B}(D)$ (resp. la classe de mesures finies sur $\mathcal{B}(D)$ avec support compact). Le symbole $\|\mu\|$ signifie la mesure totale $\mu(D)$ pour une mesure μ dans $M_F(D)$. Soient $C_b^+(D)$ (resp. $C_c^+(D)$) respectivement la classe de fonctions continues bornées et non-négatives sur D (resp. la classe de fonctions continues et non-négatives sur D avec support compact). On désigne par $C^{k,\eta}(D)$ l'espace de Hölder usuel à indice $\eta \in (0,1]$,

* Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon.
E-mail: idoku@math.edu.saitama-u.ac.jp.

celui qui inclut les dérivées d'ordre k, et en particulier on écrit $C^\eta(D) = C^{0,\eta}(D)$ simplement. Soit L un opérateur elliptique sur le domaine D du type

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1}$$

où $a(x) = (a_{ij}(x))$ est une matrice de type positif pour $x \in D$, et est aussi symétrique. Supposons ici que $a_{ij}(x) \in C^{1,\eta}(D)$ et $b_i(x) \in C^{1,\eta}(D)$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, d$. On écrit souvent

$$\langle \nu, f\rangle = \int_D f(x)\nu(\mathrm{d}x), \tag{2}$$

l'intégrale de fonction mesurable f par rapport à la mesure ν sur D.

II Super-processus de diffusion

Dans cette section nous allons définir une classe de super-processus de type diffusion.

Définition 1. (Super-diffusion [10]) *On dit que* $X = \{X_t, t \geq 0;\ \mathbb{P}_\mu, \mu \in M_F(D)\}$ *est un super-processus du type diffusion (ou bien un super-diffusion simplement) avec paramètres* (L, β, α, D)*, s'il existe un unique processus markovien continu et homogène par rapport au temps à valeurs dans l'espace* $M_F(D)$*, tel que pour* $\forall g \in C_b^+(D)$

$$\mathbb{E}_\mu \exp\left\{-\int_D g(x)X_t(\mathrm{d}x)\right\} = \exp\left\{-\int_D u(x,t)\mu(\mathrm{d}x)\right\}, \tag{3}$$

où $u \equiv u(x,t)$ *est une solution minimale non-négative pour le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad + \beta(x)u(x,t) - \alpha(x)u^2(x,t), \quad \text{sur} \quad D \times (0,\infty) \\ \displaystyle\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = g(x) \in C_b^+(D). \end{cases} \tag{4}$$

Nous supposons ici que α *et* β *appartiennent à l'espace* $C^\eta(D)$ *avec* $\eta \in (0,1]$*, et aussi que* α *soit positive pour* $\forall x \in D$ *et* $\beta(x)$ *soit bornée d'en haut.*

Ensuite, nous allons donner une définition de super-diffusion inhomogène par rapport au temps. Supposons que $\tilde{a}_{ij}(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\tilde{b}_i(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ appartiennent à l'espace $C_{x,t}^{1,\eta,1}(D \times \mathbb{R}^+)$ et satisfaitent les conditions similaires aux cas de $a(x) = (a_{ij}(x))$ et $b(x) = (b_i(x))$. De plus, on suppose aussi que $\tilde{\alpha}(x,t)$: $D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\beta}(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ appartiennent à l'espace $C_{x,t}^{\eta,1}(D \times \mathbb{R}^+)$

et satisfaitent les conditions similaires aux cas de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$. Alors on définit un nouvel opérateur comme suit:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,r)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,r)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5}$$

On dit que $X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_{\mu,r}, \mu \in M_F(D), r \geq 0\}$ est un super-diffusion avec paramètres $(\tilde{L}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, D)$, s'il existe un processus markovien inhomogène par rapport au temps à valeurs dans l'espace $M_F(D)$, tel que pour chaque $g \in C_b^+(D)$ et $\mu \in M_F(D)$,

$$\mathbb{E}_{\mu,r} \exp\left\{-\int_D g(x)X_t(\mathrm{d}x)\right\} = \exp\left\{-\int_D u(x,r;t,g)\mu(\mathrm{d}x)\right\} \tag{6}$$

est valable, où $C[r,\infty)$ désigne l'espace de chemins continus sur l'intervalle $[r,\infty)$, $\mathbb{P}_{\mu,r}$ est une mesure de probabilité sur $C[r,\infty)$, c'est-à-dire, $\mathbb{P}_{\mu,r} \in \mathcal{P}(C[r,\infty))$, et $u \equiv u(\cdot,\cdot;t,g)$ est une solution non-négative pour le problème de l'équation en arrière suivant:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial r}(x,r) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,r)\frac{\partial u(x,r)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,r)\frac{\partial u(x,r)}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad + \tilde{\beta}(x,r)u(x,r) - \tilde{\alpha}(x,r)u^2(x,r), \quad \text{sur} \quad (x,r) \in D \times (0,t) \\ \lim\limits_{r\uparrow t} u(x,r;t,g) = g(x), \quad \forall x \in D. \end{cases} \tag{7}$$

Pour déterminer la solution de l'équation en arrière uniquement, nous devons employer l'équation en avant équivalente. Par conséquent, on considère ici avec le paramètre $r \in [0,t]$ le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial r}(x,r) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,t-r)\frac{\partial v(x,r)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,t-r)\frac{\partial v(x,r)}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad + \tilde{\beta}(x,t-r)v(x,r) - \tilde{\alpha}(x,t-r)v^2(x,r), \quad \text{sur} \quad D \times (0,t) \\ \lim\limits_{r\downarrow 0} v(x,r;t,g) = g(x). \end{cases} \tag{8}$$

Engländer et Pinsky [J. Diffe. Eqs. **192** (2003), no.2, 396–428] ont montré qu'il existe une solution unique v non-négative pour le problème de l'équation (8) en avant. Donc, d'où nous pouvons savoir que la solution u pour l'équation en arrière (7) existe aussi uniquement. En conséquence, on peut vérifier le problème de l'existence et l'unicité de solution pour le problème de Cauchy (4), en utilisant cette formulation inhomogène. Il en suit que le super-diffusion $X = \{X_t; t \geq 0\}$ correspondant existe aussi uniquement.

III La valeur propre principale généralisée

On pose ici l'opérateur $\mathcal{L}_0 = L+\beta$ sur le domaine D. La valeur propre principale généralisée λ_c est définie par

$$(9) \qquad \lambda_c \equiv \lambda_c(\mathcal{L}_0) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R};\ \text{il existe une fonction positive} \quad u \\ \text{satisfaisant} \quad (L+\beta-\lambda)u = 0 \quad \text{dans} \quad D\}.$$

Selon Théorème 4.4 (p.159) de Pinsky (1995) [16], cette valeur propre principale généralisée λ_c peut être exprimée, à la manière de la théorie des probabilités, comme

$$(10) \qquad \lambda_c = \sup_A \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left\{ \exp\left(\int_0^t \beta(\xi_s^L)\mathrm{d}s \right);\quad \tau(A) > t \right\}$$

pour $\forall x \in D$, où $\xi^L \equiv \{\xi_t^L; t > 0\}$ est un processus de diffusion correspondant à l'opérateur L sur D, $\mathbb{P}_x$ est la loi de ξ^L, celui qui commence au point $x \in D$, telle que $\mathbb{P}_x(\xi_0^L = x) = 1$, $\mathbb{E}_x$ désigne l'espérance par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$, $\tau(A)$ est le temps d'arrêt tel que

$$(11) \qquad \tau(A) = \{t \geq 0;\ \xi_t^L \in A^c\},$$

et l'ensemble A de sup en (10) prend sur toute la classe

$$(12) \qquad \{A;\ A \Subset D, \quad \text{la borne} \quad \partial A \quad \text{est de classe} \quad C^{2,\eta}\}.$$

Noter que $\lambda_c < +\infty$. Il est très connu par la théorie standard (cf. §4.3 de Pinsky (1995) [16]) que pour tout $\lambda \geq \lambda_c$, il existe une fonction f positive qui appartient à l'espace $C^{2,\eta}(D)$, telle que $(L+\beta-\lambda)f = 0$ sur D. D'autre part, Pinsky (1996) [17] a montré que le super-diffusion $X = \{X_t, t \geq 0\}$ exhibe l'extinction locale si et seulement si $\lambda_c \leqslant 0$, où noter que ce que le super-processus X possède la propriété d'extinction locale, c'est équivalent au fait que le support supp(X) de X quitte aucun ensemble borné donné $\mathbb{P}_\mu$-presque sûrement pour chaque $\mu \in M_c(D)$. À cet égard, le support supp(μ) de la mesure μ sur D est donné par

$$(13) \qquad \mathrm{supp}(\mu) = \{F \in \mathcal{B}(D);\ F \quad \text{étant un ensemble fermé minimal} \\ \text{tel que} \quad \mu(F^c) = 0\}.$$

En ce moment, nous supposons que $\lambda_c > 0$. Cela signifie que le super-processus X n'exhibe pas l'extinction locale. Alors il y a un théorème très important dans l'appendice de [11], mais on peut trouver seulement six lignes qui font allusion à sa démonstration. Voila l'assertion sur laquelle nous essayerons de donner sa preuve. C'est-à-dire que:

Théorème 2. (Comportement local; Engländer-Winter (2006) [11]) *Soit $\lambda_c > 0$. Supposons que l'opérateur $\mathcal{L} = L+\beta-\lambda_c$ soit sous-critique. On a alors*

$$(14) \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = 0$$

pour aucune g appartenant à l'espace $C_c^+(D)$.

Le seul but de cet article, c'est de pouvoir sa preuve détaillée de comportement limite sur l'espérance au poids pour le super-processus de type diffusion $(X, \mathbb{P}_\mu)$, lorsque le temps tend vers l'infini.

Quand l'opérateur $L+\beta$ est sous-critique, il permet d'avoir la fonction de Green, cf. Définition en §4.3, p.145 de [16]. Par exemple, quand on désigne par $p(t,x,\mathrm{d}y)$ la mesure de transition pour l'opérateur L sur D, sa mesure est définie par

$$p(t,x,B) = \mathbb{E}_x\left\{\exp\left(\int_0^t \beta(\xi_s)\mathrm{d}s\right);\ \xi_t \in B\right\} \tag{15}$$

pour aucun ensemble borélien B. Si la mesure $p(t,x,\mathrm{d}y)$ remplit

$$\int_0^\infty p(t,x,B)\mathrm{d}t = \mathbb{E}_x \int_0^\infty \exp\left\{\int_0^t \beta(\xi_s)\mathrm{d}s\right\} \cdot 1_B(\xi_t)\mathrm{d}t < +\infty, \tag{16}$$

alors la mesure de Green $G(x,\mathrm{d}y)$ pour L sur D est donnée par

$$G(x,\mathrm{d}y) = \int_0^\infty p(t,x,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

D'où, sous le cas sous-critique, il existe une fonction de Green (la densité) $\tilde{G}(x,y)$ telle que $G(x,\mathrm{d}y) = \tilde{G}(x,y)\mathrm{d}y$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}y$.

IV Preuve de comportement limite sur l'espérance au poids

Quand on écrit le semi-groupe pour l'opérateur $\mathcal{L}_0$ sur D par S_t, on voit aisément que $u(x,t) = S_t f(x)$ avec $S_0 = I$ (l'identité) remplit le problème de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_0 u \quad \text{avec} \quad u(0) = f. \tag{18}$$

Naturellement, le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S_t; t \geq 0\}$ est donné par

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S_t f - f}{t} = \mathcal{L}_0 f = (L+\beta)f. \tag{19}$$

Lemme 3. *Le semi-groupe $\{T_t; t \geq 0\}$ pour l'opérateur $\mathcal{L}$ est donné par $T_t = e^{-\lambda_c t} S_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration de lemme 3. C'est trivial: $T_0 = e^{-\lambda_c t} S_t|_{t=0} = I$. Quand $\{T_t\}$ est le semi-groupe de $\mathcal{L} = L + \beta - \lambda_c$, alors il faut que $v(x,t) = T_t g(x)$ remplit le problème: $\partial_t v = (L+\beta)v - \lambda_c v$ avec $v(0) = g$. Puisque $S_t g$ satisfait la relation $\partial_t(S_t g) = (L+\beta)S_t g$, il est facile à voir que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(e^{-\lambda_c t} S_t)g = -\lambda_c e^{-\lambda_c t} S_t g + e^{-\lambda_c t}(L+\beta)S_t g. \tag{20}$$

Donc, il en suit que

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t g - g}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t g - T_0 g}{t-0} = \frac{\partial}{\partial t}(T_t g)|_{t=0}$$
$$= \{-\lambda_c e^{-\lambda_c t} S_t g + e^{-\lambda_c t}(L+\beta)S_t g\}|_{t=0} = (L+\beta-\lambda_c)g = \mathcal{L}g.$$

Cela signifie que le générateur infinitésimal de $\{T_t\}$ n'est rien de moins que $\mathcal{L} = L+\beta-\lambda_c$. $\square$

L'analyse élémentaire permet d'avoir la formule de premier moment $\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = \langle \mu, u(\cdot,t)\rangle$, où $u(x,t) = S_t g(x)$ donne une solution pour $\partial_t u = (L+\beta)u$ avec $\lim_{t\downarrow o} u(\cdot,t) = g(\cdot)$. En ce moment, puisque nous avons $e^{-\lambda_c t}u(x,t) = e^{-\lambda_c t}S_t g(x) = T_t g(x)$, on a alors

(21) $$e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = \langle \mu, e^{-\lambda_c t}u(\cdot,t)\rangle = \langle \mu, T_t g\rangle.$$

Par conséquent, à la place de l'assertion (14) dans Théorème 2, on doit montrer que

(22) $$\lim_{t\to\infty}\langle \mu, [T_t g](x)\rangle = 0.$$

À ce propos, on peut considérer la h-transformation, cf. Doob (2001) [8]. Quand nous choisissons soigneusement la fonction $h>0$ telle que $(L+\beta-\lambda_c)h = 0$ (en d'autre terme, quand h est la fonction propre sur l'opérateur $\mathcal{L}_0 = L+\beta$, celle qui est associée à la valeur propre λ_c), alors on a

(23) $$[T_t g](x) = h(x)[T_t^h(\hat{g})](x)$$

pour tout $x \in D$, en posant $\hat{g} = gh^{-1}$. Par ailleurs, par (22) et (23) le problème original (14) peut être attribué à vérifier que

(24) $$\lim_{t\to\infty}\langle \mu, h[T_t^h(\hat{g})](x)\rangle = 0.$$

Ici soit ξ_t^h un processus de L_0^h-diffusion correspondant au semi-groupe $\{T_t^h\}$. En effet, $w(x,t) = T_t^h(\hat{g})(x)$ remplit $\partial_t w = L_0^h w$ avec $w(0) = \hat{g}$; de plus, le semi-groupe $\{T_t^h\}$ est défini par

$$T_t^h(\hat{g})(x) = \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)].$$

Noter que

$$L_0^h(u) = h^{-1}(L+\beta-\lambda_c)(hu)$$
$$= (e^{-\lambda_c t}h)^{-1}(L+\beta+\partial_t)(e^{-\lambda_c t}h)u,$$

voir §4.1 The h-transform (pp.125–129) de [16]. Noter aussi que $h\mu \in M_c(D)$. Finalement, on n'a qu'à prouver que:

Proposition 4. *Soient $\hat{g} = gh^{-1}$, $g \in C_c^+(D)$ et $h > 0$. Supposons que h soit la fonction propre de $\mathcal{L}_0$ correspondante à la valeur propre λ_c. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \langle h\mu, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle = 0 \tag{25}$$

pour $x \in D$, où $h\mu \in M_c(D)$.

Ensuite, nous introduisons une propriété élémentaire de notre semi-groupe:

Lemme 5. *L'inégalité suivante est valable :*

$$[T_t^h(\hat{g})](x) = \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)] \leqslant \|\hat{g}\|_\infty \tag{26}$$

pour $\forall x \in D$ et $\forall t \geq 0$.

Démonstration de lemme 5. Selon la remarque mentionée dans la sention III précédente, puisque $h > 0$ est de classe $C^{2,\eta}(D)$, cette h peut être regardée comme une fonction continue bornée sous l'intégrale par $\mu \in M_c(D)$. Donc, il n'est pas difficile à voir que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)] &= \int_\Omega \hat{g}(\xi_t^h(\omega))\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega)\\ &\leqslant \|\hat{g}\|_\infty \int_\Omega 1\ \mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega) = \|\hat{g}\|_\infty \cdot \mathbb{P}_x(\Omega) = \|\hat{g}\|_\infty < +\infty,\end{aligned}$$

pour tout $x \in D$ et $t \geq 0$. □

Remarque 1. Quand on définit la norme d'opérateur par

$$|||T_t^h||| = \sup_{\substack{g\in C_c^+(D)\\ g\neq 0}} \frac{\|T_t^h g\|}{\|g\|} \overset{\text{ou}}{=} \sup_{\substack{g\in C_c^+(D)\\ \|g\|=1}} \|T_t^h g\|, \tag{27}$$

alors l'assertion du lemme 5 signifie que $|||T_t^h||| \leqslant 1$, celle qui montre que T_t^h est contractif.

Remarque 2. L'assertion générale (25) en Proposition 4 (étant le notre but) deviendra le résultat d'attribuer au cas simple $\mu = \delta_x$ étant la mesure de Dirac. En fait, nous obtenons $\langle h\delta_x, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle = h(x)\cdot\mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]$, et de plus, en vertu du lemme 5, une application du théorème de Lebesgue sur la convergence bornée permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \langle h\mu, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle &= \lim_{t\to\infty} \int_D \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]h(x)\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_D \left(\lim_{t\to\infty} h(x)\mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\right)\mu(\mathrm{d}x) = 0\end{aligned}$$

si l'on sait que $\lim_{t\to\infty} h(x)\mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)] = 0$ uniformément pour $x \in D$.

V Preuve de Proposition 4

Dans cette section nous allons prouver la proposition 4: $\lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle = 0$, celle qui est équivalente à l'assertion (14)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = 0$$

du théorème 2, étant le comportement limite sur l'espérance au poids pour le super-processus de type diffusion lorsque le temps tend vers l'infini.

Lemme 6. *On a alors :*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left\{\frac{1_B}{h}(\xi_t^h)\right\} = 0 \tag{28}$$

pour tout $x \in D$ et tout ensemble borélien B.

Démonstration de lemme 6. $1_B(x)$ est l'indicatrice pour un ensemble B, et puis $1_B(x)$ vaut 1 seulement sur B, si non elle devient nulle. Par la discussion dans le Chapitre 4 de Pinsky (1995) [16], il est très connu que la propriété sous-critique est invariante sous la h-transformation. D'autre part, par la théorie standard nous savons que la propriété transitoire sur le processus de diffusion est équivalente à la propriété sous-critique sur son opérateur elliptique correspondant. D'où il est clair que le processus de diffusion $\{\xi_t^h\}$ reste transitoire. Par conséquent, on voit $1_B(\xi_t^h) \to 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $t \to \infty$, quand B est une boule, parce que le processus ξ^h se comporte comme une particule qui continue toujours à errer, et ne reste jamais au même point. Donc, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left\{\frac{1_B}{h}(\xi_t^h)\right\} &= \lim_{t\to\infty}\int_\Omega \frac{1_B(\xi_t^h(\omega))}{h(\xi_t^h(\omega))}\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega)\\ &= \int_\Omega \frac{\lim_{t\to\infty} 1_B(\xi_t^h(\omega))}{h(\xi_t^h(\omega))}\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega) = 0,\end{aligned}$$

où on a employé le théorème de convergence bornée. □

L'approximation soignera le cas général pour g. En fait, pour $g \in C_c^+(D)$, il y a une famille de fonctions simples $\{g_N\}_N$ telles que $0 < g_1 \leqslant g_2 \leqslant \cdots \leqslant g_k \leqslant \cdots \nearrow$ et $\lim_{N\to\infty} g_N(x) = g(x)$, p.p.-$x$, où pour chaque N donné, g_N possède l'expression

$$g_N(x) = \sum_{i=1}^{n(N)} a_i^{(N)} 1_{B_i^{(N)}}(x),$$

et $a_i^{(N)} > 0$ (pout tout i), et de plus, $B_i^{(N)}$ peut être regardé comme le boule déja mentionné au-dessus, parce que le support $\mathrm{supp}(g)$ est compact. Il est clair que

$\lim_{N\to\infty} g_N(\xi_t^h(\omega)) = g(\xi_t^h(\omega))$ est valable $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout $t \geq 0$. En conséquence, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle &= \lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x\left\{\frac{g}{h}(\xi_t^h)\right\}\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x\left\{\frac{1}{h}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{n(N)} a_i^{(N)} 1_{B_i^{(N)}}(\xi_t^h)\right\}\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{n(N)} a_i^{(N)}\langle h\mu, \mathbb{E}_x\left\{\frac{1_{B_i}^{(N)}}{h}(\xi_t^h)\right\}\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{(N)} a_i^{(N)}\left\{\lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x\left\{\frac{1_{B_i}^{(N)}}{h}(\xi_t^h)\right\}\rangle\right\}
\end{aligned}$$

en employant le théorème de convergence borné. L'assertion (25) est le résultat immédiate lorsque l'on se sert du lemme 6. Ce qui termine la démonstration de Proposition 4. $\square$

Remerciments. Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche scientifique : MEXT Grant-in Aids SR(C) 20540106, ceux qui ont été distribués par le Ministère de l'Éducation, de la Culture, des Sports, de la Recherche et de la Technologie au Japon.

Références

[1] D.A. Dawson et Z.H. Li: Construction of immigration superprocesses with dependent spatial motion from one-dimensional excursions. *Probab. Theory Relat. Fields* **127** (2003), 37–61.

[2] D.A. Dawson, Z.H. Li et X.W. Zhou: Superprocesses with coalescing Brownian spatial motion as large scale limits. *J. Theoret. Probab.* **17** (2004), 673–692.

[3] I.Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.

[4] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6**(2) (2006), 145–205.

[5] I. Dôku: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.

[6] I. Dôku: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6** (2008), 56–69.

[7] I. Dôku: Comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration. apparaître à *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **57**(2) (2008), 13p.

[8] J.L. Doob: *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[9] E.B. Dynkin: *An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.* CRM Monograph Series, 6. Amer. Math. Soc. Providence, 1994.

[10] J. Engländer et D. Turaev: A scaling limit theorem for a class of superdiffusions. *Ann. Probab.* **30** (2002), 683–722.

[11] J. Engländer et A. Winter: Law of large numbers for a class of superdiffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat.* **42** (2006), 171–185.

[12] S.N. Ethier et T.G. Kurtz: *Markov Processes : Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.

[13] I.M. Guelfand et G.E. Chilov: *Les Distributions.* Dunod, Paris, 1962.

[14] N. Ikéda et S. Oitanabé: *Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion).* (en russe) Naouka, Moscou, 1986.

[15] J. Jacod et A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[16] R.G. Pinsky: *Positive Harmonic Functions and Diffusion: An integrated analytic and probabilistic approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[17] R.G. Pinsky: Transience, recurrence and local extinction properties of the support for supercritical finite measure-valued diffusions. *Ann. Probab.* **24** (1996), 237–267.

(Received September 29, 2008)
(Accepted October 17, 2008)