J. Saitama Univ., Fac. Educ., 58(2) : 293–307 (2009)

COMPORTEMENT ASYMPTOTE SUR UNE CLASSE DE SUPER-PROCESSUS AVEC PARAMÈTRES SPATIALEMENT DÉPENDANTS

Isamu Dôku*

Résumé

Nous considérons dans cet article une classe de super-processus avec paramètres spatialement dépendants. Particulièrement, certains comportements asymptotes des super-processus nous intéressent beaucoup. De fait, nous essayerons de donner une preuve détaillée du comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus lorsque le temps tend vers l'infini.

Mots-clés: mesure aléatoire, comportement asymptote, le temps long, super-processus, paramètres spatialement dépendants, l'espérance au poids.

I Introduction

Cet article traite le problème de comportement asymptote sur l'espérance au poids des super-processus avec paramètres spatialement dépendants. Notre seul but est de pourvoir une preuve du comportement local en l'espérance de super-processus, celui qui appartient à une classe spéciale de super-processus avec paramètre dégénéré. De fait, nous essayerons de donner une démonstration détaillée du comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus du type diffusion lorsque le temps tend vers l'infini.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^d$, et soit $\mathcal{B}(D)$ la σ-tribu borélienne sur D. L'espace $M_F(D)$ (resp. $M_c(D)$) désigne respectivement la classe de mesures finies sur $\mathcal{B}(D)$ (resp. la classe de mesures finies sur $\mathcal{B}(D)$ avec support compact). Le symbole $\|\mu\|$ signifie la mesure totale $\mu(D)$

* Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon.
E-mail: idoku@math.edu.saitama-u.ac.jp.

pour une mesure μ dans $M_F(D)$. Soient $C_b^+(D)$ (resp. $C_c^+(D)$) respectivement la classe de fonctions continues bornées et non-négatives sur D (resp. la classe de fonctions continues et non-négatives sur D avec support compact). On désigne par $C^{k,\eta}(D)$ l'espace de Hölder usuel à indice $\eta \in (0,1]$, celui qui inclut les dérivées d'ordre k, et en particulier on écrit $C^\eta(D) = C^{0,\eta}(D)$ simplement. Soit L un opérateur elliptique sur le domaine D du type

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla + b\cdot\nabla \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

où $a(x) = (a_{ij}(x))$ est une matrice de type positif pour $x \in D$, et est aussi symétrique. Supposons ici que $a_{ij}(x) \in C^{1,\eta}(D)$ et $b_i(x) \in C^{1,\eta}(D)$ pour $i,j = 1,2,\ldots,d$. On écrit souvent

$$\langle \nu, f\rangle = \int_D f(x)\nu(\mathrm{d}x), \tag{2}$$

l'intégrale de fonction mesurable f par rapport à la mesure ν sur D.

II (L,β,α,D) super-processus

Dans cette section nous allons définir une classe de super-processus de type diffusion.

Définition 1. (Super-diffusion [14]) *On dit que $X = \{X_t, t\geq 0;\ \mathbb{P}_\mu, \mu \in M_F(D)\}$ est un super-processus du type diffusion (ou bien un super-diffusion simplement) avec paramètres (L,β,α,D), s'il existe un unique processus markovien continu et homogène par rapport au temps à valeurs dans l'espace $M_F(D)$, tel que pour $\forall g \in C_b^+(D)$*

$$\mathbb{E}_\mu \exp\{-\langle X_t, g\rangle\} = \exp\{-\langle \mu, u(\cdot,t)\rangle\}, \tag{3}$$

où $u \equiv u(x,t)$ est une solution minimale non-négative pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu(x,t) + \beta(x)u(x,t) - \alpha(x)u^2(x,t), \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad D\times(0,\infty) \\ \lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t) = g(x) \in C_b^+(D). \end{cases} \tag{4}$$

Nous supposons ici que α et β appartiennent à l'espace $C^\eta(D)$ avec $\eta \in (0,1]$, et aussi que α soit positive pour $\forall x \in D$ et $\beta(x)$ soit bornée d'en haut.

Ensuite, nous allons donner une définition de super-diffusion inhomogène par rapport au temps. Supposons que $\tilde{a}_{ij}(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\tilde{b}_i(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ appartiennent à l'espace $C^{1,\eta,1}_{x,t}(D \times \mathbb{R}^+)$ et satisfaitent les conditions similaires aux cas de $a(x) = (a_{ij}(x))$ et $b(x) = (b_i(x))$. De plus, on suppose aussi que $\tilde{\alpha}(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\beta}(x,t) : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ appartiennent à l'espace $C^{\eta,1}_{x,t}(D \times \mathbb{R}^+)$ et satisfaitent les conditions similaires aux cas de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$. Alors on définit un nouvel opérateur comme suit:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,r)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,r)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5}$$

On dit que $X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_{\mu,r}, \mu \in M_F(D), r \geq 0\}$ est un super-diffusion avec paramètres $(\tilde{L}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, D)$, s'il existe un processus markovien inhomogène par rapport au temps à valeurs dans l'espace $M_F(D)$, tel que pour chaque $g \in C_b^+(D)$ et $\mu \in M_F(D)$,

$$\mathbb{E}_{\mu,r} \exp\{-\langle X_t, g\rangle\} = \exp\left\{-\int_D u(x,r;t,g)\mu(\mathrm{d}x)\right\} \tag{6}$$

est valable, où $C[r,\infty)$ désigne l'espace de chemins continus sur l'intervalle $[r,\infty)$, $\mathbb{P}_{\mu,r}$ est une mesure de probabilité sur $C[r,\infty)$, c'est-à-dire, $\mathbb{P}_{\mu,r} \in \mathcal{P}(C[r,\infty))$, et $u \equiv u(\cdot,\cdot;t,g)$ est une solution non-négative pour le problème de l'équation en arrière suivant:

(7)

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial r}(x,r) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,r)\frac{\partial u(x,r)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,r)\frac{\partial u(x,r)}{\partial x_i} \\ \qquad +\tilde{\beta}(x,r)u(x,r) - \tilde{\alpha}(x,r)u^2(x,r), \quad \text{sur} \quad (x,r) \in D \times (0,t) \\ \lim\limits_{r\uparrow t} u(x,r;t,g) = g(x), \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

Pour déterminer la solution de l'équation en arrière uniquement, nous devons employer l'équation en avant équivalente. Par conséquent, on considère ici avec le paramètre $r \in [0,t]$ le problème suivant:

(8)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial r}(x,r) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij}(x,t-r)\dfrac{\partial v(x,r)}{\partial x_j}\right) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_i(x,t-r)\dfrac{\partial v(x,r)}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad + \tilde{\beta}(x,t-r)v(x,r) - \tilde{\alpha}(x,t-r)v^2(x,r), \quad \text{sur} \quad D \times (0,t) \\ \lim\limits_{r\downarrow 0} v(x,r;t,g) = g(x). \end{cases}$$

Engländer et Pinsky [13, pp. 396–428] ont montré qu'il existe une solution unique v non-négative pour le problème de l'équation (8) en avant. Donc, d'où nous pouvons savoir que la solution u pour l'équation en arrière (7) existe aussi uniquement. En conséquence, on peut vérifier le problème de l'existence et l'unicité de solution pour le problème de Cauchy (4), en utilisant cette formulation inhomogène. Il en suit que le super-diffusion $X = \{X_t; t \geq 0\}$ correspondant existe aussi uniquement.

III La valeur propre principale généralisée

On pose ici l'opérateur $\mathcal{L}_0 = L + \beta$ sur le domaine D. La valeur propre principale généralisée λ_c est définie par

$$(9) \qquad \lambda_c \equiv \lambda_c(\mathcal{L}_0) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; \text{ il existe une fonction positive } u \text{ satisfaisant } (L+\beta-\lambda)u = 0 \text{ dans } D\}.$$

Selon Théorème 4.4 de Pinsky [21, p.159], cette valeur propre principale généralisée λ_c peut être exprimée, à la manière de la théorie des probabilités, comme

$$(10) \qquad \lambda_c = \sup_{A} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left\{ \exp\left(\int_0^t \beta(\xi_s^L) \mathrm{d}s \right); \quad \tau(A) > t \right\}$$

pour $\forall x \in D$, où $\xi^L \equiv \{\xi_t^L; t > 0\}$ est un processus de diffusion correspondant à l'opérateur L sur D, $\mathbb{P}_x$ est la loi de ξ^L, celui qui commence au point $x \in D$, telle que $\mathbb{P}_x(\xi_0^L = x) = 1$, $\mathbb{E}_x$ désigne l'espérance par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$, $\tau(A)$ est le temps d'arrêt tel que

$$(11) \qquad \tau(A) = \{t \geq 0;\ \xi_t^L \in A^c\},$$

et l'ensemble A de sup en (10) prend sur toute la classe

$$(12) \qquad \{A;\ A \Subset D, \quad \text{la borne} \quad \partial A \quad \text{est de classe} \quad C^{2,\eta}\}.$$

Noter que $\lambda_c < +\infty$. Il est très connu par la théorie standard (cf. §4.3 de Pinsky [21]) que pour tout $\lambda \geq \lambda_c$, il existe une fonction f positive qui appartient à l'espace $C^{2,\eta}(D)$, telle que $(L + \beta - \lambda)f = 0$ sur D. D'autre part, Pinsky (1996) [22] a montré que le super-diffusion $X = \{X_t, t \geq 0\}$ exhibe l'extinction locale si et seulement si $\lambda_c \leqslant 0$, où noter que ce que le super-processus X possède la propriété d'extinction locale, c'est équivalent au fait que le support $\mathrm{supp}(X)$ de X quitte aucun ensemble borné donné $\mathbb{P}_\mu$-presque sûrement pour chaque $\mu \in M_c(D)$. À cet égard, le support $\mathrm{supp}(\mu)$ de la mesure μ sur D est donné par

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{F \in \mathcal{B}(D);\ F \quad \text{étant un ensemble fermé minimal tel que} \quad \mu(F^c) = 0\,\}. \tag{13}$$

En ce moment, nous supposons que $\lambda_c > 0$. Cela signifie que le super-processus X n'exhibe pas l'extinction locale. Alors il y a un théorème très important dans l'appendice de [15], mais on peut trouver seulement cinq lignes qui font allusion à sa démonstration. Voila l'assertion sur laquelle nous essayerons de donner sa preuve. C'est-à-dire que:

Théorème 2. (Comportement local; Engländer-Winter (2006) [15]) *Soit $\lambda_c > 0$. Supposons que l'opérateur $\mathcal{L} = L+\beta-\lambda_c$ soit sous-critique. On a alors*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = 0 \tag{14}$$

pour aucune g appartenant à l'espace $C_c^+(D)$.

Quand l'opérateur $L + \beta$ est sous-critique, il permet d'avoir la fonction de Green, cf. Définition en §4.3, p.145 de [16]. Par exemple, quand on désigne par $p(t, x, \mathrm{d}y)$ la mesure de transition pour l'opérateur L sur D, sa mesure est définie par

$$p(t, x, B) = \mathbb{E}_x\left\{\exp\left(\int_0^t \beta(\xi_s)\mathrm{d}s\right);\ \xi_t \in B\right\} \tag{15}$$

pour aucun ensemble borélien B. Si la mesure $p(t, x, \mathrm{d}y)$ remplit

$$\int_0^\infty p(t, x, B)\mathrm{d}t = \mathbb{E}_x \int_0^\infty \exp\left\{\int_0^t \beta(\xi_s)\mathrm{d}s\right\} \cdot 1_B(\xi_t)\mathrm{d}t < +\infty, \tag{16}$$

alors la mesure de Green $G(x, \mathrm{d}y)$ pour L sur D est donnée par $G(x, \mathrm{d}y) = \int_0^\infty p(t, x, \mathrm{d}y)\mathrm{d}t$. D'où, sous le cas sous-critique, il existe une fonction de Green (la densité) $\tilde{G}(x, y)$ telle que $G(x, \mathrm{d}y) = \tilde{G}(x, y)\mathrm{d}y$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}y$.

IV Preuve de comportement limite sur l'espérance au poids

Quand on écrit le semi-groupe pour l'opérateur $\mathcal{L}_0$ sur D par S_t, on voit aisément que $u(x,t) = S_t f(x)$ avec $S_0 = I$ (l'identité) remplit le problème de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_0 u \qquad \text{avec} \quad u(0) = f. \tag{17}$$

Naturellement, le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S_t; t \geq 0\}$ est donné par

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{S_t f - f}{t} = \mathcal{L}_0 f = (L+\beta)f. \tag{18}$$

Le semi-groupe $\{T_t; t \geq 0\}$ pour l'opérateur $\mathcal{L}$ est donné par $T_t = e^{-\lambda_c t} S_t$ pour tout $t \geq 0$, cf. Lemme 3 de [8].

L'analyse élémentaire permet d'avoir la formule de premier moment $\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = \langle \mu, u(\cdot,t)\rangle$, où $u(x,t) = S_t g(x)$ donne une solution pour $\partial_t u = (L+\beta)u$ avec $\lim_{t\downarrow o} u(\cdot,t) = g(\cdot)$. En ce moment, puisque nous avons $e^{-\lambda_c t}u(x,t) = e^{-\lambda_c t}S_t g(x) = T_t g(x)$, on a alors

$$e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = \langle \mu, e^{-\lambda_c t}u(\cdot,t)\rangle = \langle \mu, T_t g\rangle. \tag{19}$$

Par conséquent, à la place de l'assertion (14) dans Théorème 2, on doit montrer que $\lim_{t\to\infty}\langle \mu, [T_t g](x)\rangle = 0$. À ce propos, on peut considérer la h-transformation, cf. Doob [9]. Quand nous choisissons soigneusement la fonction $h > 0$ telle que $(L+\beta-\lambda_c)h = 0$ (en d'autre terme, quand h est la fonction propre sur l'opérateur $\mathcal{L}_0 = L+\beta$, celle qui est associée à la valeur propre λ_c), alors on a $[T_t g](x) = h(x)[T_t^h(\hat{g})](x)$ pour tout $x \in D$, en posant $\hat{g} = gh^{-1}$. Par ailleurs, le problème original (14) peut être attribué à vérifier que

$$\lim_{t\to\infty}\langle \mu, h[T_t^h(\hat{g})](x)\rangle = 0. \tag{20}$$

Ici soit ξ_t^h un processus de L_0^h-diffusion correspondant au semi-groupe $\{T_t^h\}$. En effet, $w(x,t) = T_t^h(\hat{g})(x)$ remplit $\partial_t w = L_0^h w$ avec $w(0) = \hat{g}$; de plus, le semi-groupe $\{T_t^h\}$ est défini par $T_t^h(\hat{g})(x) = \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]$. Noter que

$$\begin{aligned} L_0^h(u) &= h^{-1}(L+\beta-\lambda_c)(hu) \\ &= (e^{-\lambda_c t}h)^{-1}(L+\beta+\partial_t)(e^{-\lambda_c t}h)u, \end{aligned}$$

voir §4.1 "The h-transform" de [21, pp.125–129]. Noter aussi que $h\mu \in M_c(D)$. Finalement, on n'a qu'à prouver que:

$$\lim_{t\to\infty}\langle h\mu, \mathbb{E}_x[\hat{g}(\xi_t^h)]\rangle = 0 \tag{21}$$

pour $x \in D$, où $h\mu \in M_c(D)$. L'expression (21), celle qui est équivalente à l'assertion (14)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t}\mathbb{E}_\mu[\langle X_t, g\rangle] = 0$$

du théorème 2, est obtenue aisément par:

Lemme 3. *On a alors :*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left\{ \frac{1_B}{h}(\xi_t^h) \right\} = 0 \tag{22}$$

pour tout $x \in D$ et tout ensemble borélien B.

L'essence est le fait suivant: il est très connu que la propriété sous-critique est invariante sous la h-transformation. D'autre part, par la théorie standard nous savons que la propriété transitoire sur le processus de diffusion est équivalente à la propriété sous-critique sur son opérateur elliptique correspondant. D'où il est clair que le processus de diffusion $\{\xi_t^h\}$ reste transitoire. Par conséquent, on voit $1_B(\xi_t^h) \to 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $t \to \infty$, quand B est une boule, parce que le processus ξ^h se comporte comme une particule qui continue toujours à errer, et ne reste jamais au même point.

V La propriété de l'extinction

Définition 4. (Extinction) *Un chemin à valeurs dans l'espace de mesures X_t est disparu ou bien exhibe une extinction si $X_t = 0$ pour tout le temps t suffisamment grand. D'autre part, il exhibe une extinction locale si $X_t(B) = 0$ pour tout le temps t suffisamment grand pour chaque sous-ensemble borné $B \subset \mathbb{R}^d$.*

Il est clair que l'extinction entraîne l'extinction locale par définition. La caractérisation complète pour la notion d'extinction locale est donnée par Pinsky [22]: c'est-à-dire que

Lemme 5. *Le (L, β, α) super-processus X exhibe une extinction locale si et seulement s'il existe une solution positive $u > 0$ pour l'équation $(L+\beta)u = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.*

On suppose ici que le (L, β, α) super-processus $X = (X_t)$ exhibe une extinction locale. Dans ce cas, s'il existe une fonction $h \in C^{2,\eta}(\mathbb{R}^d)$ et une boule ouverte B $(\neq \emptyset)$ telles que

$$\inf_x (\alpha h)(x) > 0, \qquad (L+\beta)h \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad (\bar{B})^c$$

alors X devient disparu ou exhibe une extinction. Pourquoi est-ce-que c'est ça? La clef à resoudre la question, celle qui se trouve en face d'une assertion suivante.

Lemme 6. (Engländer-Fleischmann [11]) *Ce que le* (L, β, α) *super-processus* $X = (X_t)$ *exhibe une extinction, c'est équivalent à ces trois conditions:* (i) *le super-processus* X *exhibe une extinction locale;* (ii) $\beta \leqslant 0$ *en dehors d'un ensemble compact; et* (iii) $\inf_x \alpha > 0$.

On considère le super-processus h-transformé X^h. Dans ce cas, ce processus X^h n'est rien de moins que le $(L + \{(a\nabla h)/h\} \cdot \nabla,\ \{(L + \beta)h\}/h,\ \alpha h)$ super-processus. De plus, il est facile de voir que $\beta^h \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}$ et aussi que α^h est bornée même loin de l'origine. En conséquence, grâce au lemme 6, on voit que X^h est disparu, et exhibe une extinction. Puisque les propriétés sur le support de super-diffusion sont invariantes, on voit que X exhibe une extinction lui-même. On montrera bien quelques exemples avant de fermer cette section.

Exemple 1. On considère ici le cas où $L = \frac{1}{2}\Delta$ et $\alpha(x) \equiv 1$. C'est-à-dire, $X = (X_t)$ devient un super-mouvement brownien. En fait, si $\beta \leqslant 0$, alors X exhibe une extinction. Vraiment dit, le super-mouvement brownien X exhibe une extinction si et seulement si $\beta \leqslant 0$.

Exemple 2. C'est un bon exemple qui expose le fait que la notion d'extionction est plus forte que celle d'extinction locale. Soit $d \geq 7$. On choisie une fonction positive $h \in C^{2,\eta}(\mathbb{R}^d)$ telle que $h(x) = |x|^{-(d-2)/2}$ pour $|x| \geq 1$, et définit la fonction comme suit: $\hat{\beta}(x) = -\Delta h(x)/2h(x)$ pour $|x| \geq 1$. Et alors on considère le $(\frac{1}{2}\Delta, \hat{\beta}, 1)$ super-processus $\hat{X}$, c'est-à-dire, ce $\hat{X}$ est un super-mouvement brownien. Il est évident que l'extinction n'est plus valable pour $\hat{X}$. Mais cependant, ce $\hat{X}$ exhibe une extinction locale. En effet, l'extinction locale pour $\hat{X}$ est obtenue comme suit. Posons ici $L_1 = \frac{1}{2}\Delta + \hat{\beta}$. Immédiatement, il existe une solution positive $u > 0$ pour l'équation $L_1^h u = 0$ sur $\mathbb{R}^d$. En d'autres termes,

$$\left(\frac{1}{2}\Delta + \hat{\beta}\right)(hu) = 0. \tag{23}$$

En utilisant le lemme 5 encore, on en déduit que le super-processus $\hat{X}$ exhibe une extinction locale.

VI Super-processus avec paramètre dégénéré

Vu les circonstances expliquées dans la section précédente, il est très évident que le terme β est dominant et aussi joue un grand rôle dans les propriétés de l'extinction et les comportements asymptotes pour les super-processus. Mais l'on suppose que $\beta(x)$ est bornée dans tous les résultats. Par conséquent, il est très intéressant de savoir ce qui se passe sans les conditions bornées au terme β. En particulier, on s'intéresse au cas spécial de β dégénéré.

Dans cette section, on suppose que β est donnée par une delta fonction δ_0 de Dirac. En effet, le (L, δ_0, α) super-processus $X^* = (X_t^*, \mathbb{P}_\mu^*)$ peut être obtenu par la méthode de régularisation, celle qui est employée dans Dawson-Fleischmann (1994) [1].

Théorème 7. *Le (L, δ_0, α) super-processus $X^* = (X_t^*, \mathbb{P}_\mu^*)$ est un processus markovien à valeurs dans l'espace de mesures, qui satisfait, pour $\forall\ g \in C_b^+(\mathbb{R}^d)$*

$$\mathbb{E}_\mu^* \exp\langle X_t^*, -g\rangle = \exp\langle \mu, -u(t)\rangle, \tag{24}$$

où la fonction u est une solution douce pour l'équation différentielle sémilinéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = Lu(x,t) + \delta_0 u(x,t) - \alpha(x)u(x,t)^2 \\ \quad \lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = g(x). \end{cases} \tag{25}$$

Démonstration du Théorème 7. Il est très connu [18] qu'il existe une fonction $\varphi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_1(x) \geq 0$, $\int \varphi_1(x)\mathrm{d}x = 1$, et $\mathrm{supp}\varphi_1 = \{x : |x| \leqslant 1\}$. Pour $\forall\ \varepsilon > 0$, nous allons poser $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi_1(x/\varepsilon)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. Alors nous voyons imméditement supp $\varphi_\varepsilon(x) = \{x : |x| \leqslant \varepsilon\}$. Nous n'avons qu'à poser $\beta_n(x) = \varphi_{1/n}(x)$. C'est-à-dire, $\{\beta_n\}$ n'est rien de moins que la régularisation de δ_0. Il suit que $\lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \delta_0(x)$. Il est clair que le processus stochatique $X^n = (X_t^n, \mathbb{P}_\mu^n)$ construit par l'équation (4) avec β_n à la place de β, celui qui n'est rien de moins que le (L, β_n, α) super-processus défini en Définition 1 dans la section II avec β_n. Le processus de l'objectif d'une construction $X^* = (X_t^*, \mathbb{P}_\mu^*)$ peut être obtenu par la limite de X^n $(n \to \infty)$, grâce à la méthode de régularisation de [1]. Soit $p(t, x, y)$ une fonction de densité pour le L-diffusion Y. Quand on considère la solution douce u de (25), en fait la solution peut être déterminée par l'équation suivante:

$$u(x,t) = \int g(y)p(t,x,y)\mathrm{d}y + \int_0^t u(0,s)p(t-s,x,0)\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{d}s \int \alpha(y)u(y,s)^2 p(t-s,x,y)\mathrm{d}y. \tag{26}$$

□

VII Extinction de super-processus dégénéré

Nous allons annoncer dans cette section une résultat sur l'extinction du (L, δ_0, α) super-processus $X^* = (X_t^*, \mathbb{P}_\mu^*)$ avec paramètre dégénéré.

Théorème 8. *Soit $d = 1$. Pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, soit $\{\beta_\varepsilon(x)\}$ une régularisation de la delta fonction δ_0 de Dirac. On pose ici $D_k = (-k, k) \subset \mathbb{R}$ pour certaine constante positive $k > 0$. De plus, quand on choisit une fonction positive $w \equiv w_\varepsilon(x)$ telle que w remplit*

$$\begin{cases} Lw + \beta_\varepsilon w - \alpha w^2 \geq 0 \quad \text{sur} \quad D_k \\ w = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D_k, \quad \sup_{D_k} w = w(0), \end{cases} \tag{27}$$

alors on fixe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité $w_\varepsilon(0) > c$ soit valable pour tout $\forall \varepsilon$. Supposons ici l'existence de solution

$$w_\varepsilon \in C_+^2(D_k) \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{(suffisamment petit)} \tag{28}$$

de le problème (27) pour chaque k. Alors le (L, δ_0, α) super-processus X^* n'exhibe pas une extinction locale.

Remarque 1. Le résultat déclaré ci-dessus est une généralisation de celui qui a été annoncé par Engländer-Fleischmann (2000) [11], où ils ont traité le cas du super-mouvement brownien $(X_t, \mathbb{P}_\mu^\delta)$ avec une source en seul point.

Démonstration du Théorème 8. Tout d'abord, on considère le cas spécial $\nu = r\delta_0$ avec une constante positive $r > 0$. Prenons une solution w_ε de (27). En vertu du principe de maximum pour le type parabolique (par exemple, voir Proposition 7.2 de [12, p.705]; voir aussi [13]), pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a: $w_\varepsilon(\cdot) \leqslant u_\varepsilon(t, \cdot; g)$ pour $t \geq 0$, où $u_\varepsilon(\cdot, t; g)$ est la solution non-négative minimale pour l'équation (4) avec $d = 1$ et β_ε en place de β. Noter que la fonction initiale g est une fonction non-négative et continue qui satisfait

$$g(x) = c \quad \text{sur} \quad D_k \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus D_{2k}.$$

Il est facile de voir que

(29) $\mathbb{E}^{\varepsilon}_{r\delta_0} \exp\langle X^{\varepsilon}_t, -g\rangle = \exp\{-ru_{\varepsilon}(0,t;g)\} \leqslant \exp\{-rw_{\varepsilon}(0)\} \leqslant e^{-rc}.$

où $\mathbb{E}^{\varepsilon}_{\nu}$ est l'espérance correspondante au $(L, \beta_{\varepsilon}, \alpha)$ super-processus X^{ε}_t. En faisant attention à la convergence de X^{ε}_t vers X^*_t lorsque $\varepsilon \to 0$, nous avons alors

(30) $$\mathbb{E}^*_{e\delta_0} \exp\langle X^*_t, -g\rangle \leqslant e^{-rc} < 1, \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Quand on suppose que le super-processus X^* exhibe une extinction locale, alors

(31) $$\mathbb{P}^*_{r\delta_0}(X^*_t(D_{2k}) = 0 \quad \text{pour tout grand} \quad t) = 1.$$

Par conséquent, le terme gauche de (30) tend vers 1 lorsque $t \to \infty$, mais cependant c'est contradictoire avec l'inégalité (30). Donc, il en suit que le super-processus dégénéré X^* n'exhibe jamais une extinction locale. □

VIII Comportement asymptote de super-processus X^*

Nous allons discuter dans cette section un sujet principal, le comportement asymptote pour le (L, δ_0, α) super-processus dégénéré lorsque le temps t tend vers l'infini. Avant de le commencer, on va introduire quelques exemples des théorèmes limites sur le $(\frac{1}{2}\Delta, 0, \delta_0)$ super-mouvement brownien $(X_t, \mathbb{P}_{\mu})$.

Exemple 3. (Fleischmann-Le Gall (1995), [17]) Quand on désigne par $\|\mu\|$ la masse totale ou bien la mesure totale de μ, on a alors:

(32) $$\mathbb{P}_{\mu}\Big(\|X_t\| > 0, \quad \forall t > 0; \text{ mais } \lim_{t\to\infty} \|X_t\| = 0\Big) = 1$$

pour toute $\mu \in M_F \setminus \{0\}$.

Exemple 4. (Dawson-Fleischmann (1994), [1]) Même si la mesure initiale $\mu(\mathrm{d}x)$ est donnée par la mesure de Lebesgue $m(\mathrm{d}x)$, la convergence en probabilité

(33) $$X_t(B) \to 0 \quad \text{en probabilité} \quad (t \to \infty)$$

pour toute boule B.

Ensuite, nous allons introduire un autre exemple pour le $(\frac{1}{2}\Delta, \delta_0, 1)$ super-mouvement brownien dégénéré $X' = (X'_t, \mathbb{P}'_{\mu})$.

Exemple 5. (Engländer-Fleischmann (2000), [11]) Soit $d = 1$. Le processus de masse totale $\|X'_t\|$ possède une expression précise, celle qui est très importante et utile dans le calcul de comportement asymptote.

$$\mathbb{E}'_{\delta_0}\|X'_t\| = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t/2}\int_{-\sqrt{t/2}}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x. \tag{34}$$

Le résultat suivant montre un comportement asymptote de l'espérance au poids de moment: pour toute $g \in C_b^+(\mathbb{R})$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}\mathbb{E}'_\mu\langle X'_t, g\rangle = \iint_{R^2} e^{-(|x|+|y|)}g(y)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}y. \tag{35}$$

De plus, on obtient finalement

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \mathbb{E}'_\mu\langle X_t, g\rangle = \frac{1}{2} \tag{36}$$

où $\mu(\neq 0) \in M_F(\mathbb{R})$ et $g(\neq 0) \in C_b^+(\mathbb{R})$.

Voici un théorème sur comportement asymptote pour le super-processus avec paramètre dégénéré. Supposon ici que $d = 1$ pour simplicité. Soit $X^* = (X_t^*, \mathbb{P}_\mu^*)$ le (L, δ_0, α) super-processus. On désigne par λ^* la valeur propre principale généralisée de l'opérateur $\mathcal{L}^* = L + \delta_0$, et on définit un espace des fonctions:

$$\mathcal{C}^* = \{u > 0;\ (\mathcal{L}^* - \lambda^*)u = 0 \quad \text{au sens faible}\} \tag{37}$$

Supposons que $\mathcal{C}^* \neq \emptyset$. Soit $\Gamma_\varepsilon(t, x, y)$ la solution fondamentale de l'opérateur $L + \beta_\varepsilon - \partial_t$, et on pose ici

$$v_\varepsilon(x, t) = \int \Gamma_\varepsilon(t, x, y)f(y)\mathrm{d}y \quad (\text{pour} \quad f \in C_c(\mathbb{R})). \tag{38}$$

En ce cas, si la fonction Γ_ε converge vers une fonction $q_0 \equiv q_0(t, x, y)$ lorsque ε tend vers 0, quand on pose $v_0(x, t) = \int q_0(t, x, y)f(y)\mathrm{d}y$ pour $f \in C_c(\mathbb{R})$, alors on peut vérifier

$$v_0(x, t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} v_\varepsilon(x, t).$$

Puisque $(L + \beta_\varepsilon - \partial_t)v_\varepsilon = 0$ est valable et $v_\varepsilon(x, t) \to f(x)$ lorsque $t \downarrow 0$, nous pouvons voir aisément que v_0 satisfait $(L + \delta_0 - \partial_t)v_0 = 0$ au sense faible et aussi que $v_0(x, t) \to f(x)$ lorsque $t \downarrow 0$.

Théorème 9. Supposons que $\mathcal{L}^* - \lambda^*$ est critique. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^*$, on a alors

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}\mathbb{E}^*_{\delta_x}\langle X_t^*, g\rangle = K \cdot \varphi(x), \tag{39}$$

pour toute $g \in C_c(\mathbb{R})$ avec $K = (\varphi, g)_{L^2}/\|\varphi\|^2_{L^2}$.

Démonstration du Théorème 9. Par la formule de moment on a alors

$$\mathbb{E}^*_\mu \langle X^*_t, g\rangle = \langle \mu, v_0(t)\rangle = \int v_0(x,t)\mu(\mathrm{d}x). \tag{40}$$

D'où nous obtenons immédiatement

$$\mathbb{E}^*_{\delta_x} \langle X^*_t, g\rangle = v_0(x,t) = \int q_0(t,x,y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{41}$$

Quand on désigne par $p_{\lambda^*}(t,x,y)$ la densité de transition pour l'opérateur $L+\delta_0 - \lambda^*_0$, alors on obtient une expression utile:

$$p_{\lambda^*}(t,x,y) = e^{-\lambda^* t} q_0(t,x,y). \tag{42}$$

Donc, il en découle que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}\mathbb{E}^*_{\delta_x} \langle X^*_t, g\rangle = \lim_{t\to\infty} \int p_{\lambda^*}(t,x,y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{43}$$

Puisque $L+\delta_0-\lambda^*$ est critique, noter que X^*_t est un processus markovien sous la mesure $P^*_\varphi = \int \mathbb{P}^*_{\delta_x}\varphi(x)\mathrm{d}x$ avec une densité marginale

$$\varphi(x)/\int \varphi(y)\mathrm{d}y.$$

Autrement dit, quand on pose ici $g = 1_B$ pour simplicité, alors l'expression $\int p_{\lambda^*} g\mathrm{d}y \sim \int_B \varphi\mathrm{d}y/\int\varphi\mathrm{d}y$ est valable pour suffisamment grand t. De plus, selon la théorie des opérateurs elliptiques et la théorie générale des processus de diffusion (voir par exemple [21]), l'approximation suivante sous la condition critique est de force à marcher bien dans notre situation. C'est-à-dire, supposons que L est critique sur D, et soient $\tilde{L}$ l'opérateur adjoint, ϕ_c (resp. $\tilde{\phi}_c$) une fonction propre pour L (resp. $\tilde{L}$) respectivement. On suppose ici que $\int_D \phi_c\tilde{\phi}_c\mathrm{d}x < \infty$, et aussi que ces fonctions sont normalisées comme $\int_D \phi_c\tilde{\phi}_c\mathrm{d}x = 1$. Alors, pour aucune fonction f bornée et mesurable avec support compact dans D, et aucun compact $K \subset D$,

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in K}\left|\int_D P(t,x,\mathrm{d}y)f(y) - \phi_c(x)\int_D \tilde{\phi}_c(y)f(y)\mathrm{d}y\right| = 0, \tag{44}$$

où $P(t,x,\mathrm{d}y)$ est une mesure de transition correspondante à L. En conséquence, on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty}\int p_{\lambda^*}(t,x,y)g(y)\mathrm{d}y = \frac{(\varphi,g)_{L^2}\cdot\varphi(x)}{\|\varphi\|^2_{L^2}}. \tag{45}$$

De (43) et (45), l'assertion (39) est obtenue immédiatement. □

Remerciments. Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche scientifique : MEXT Grant-in Aids SR(C) 20540106, ceux qui ont été distribués par le Ministère de l'Éducation, de la Culture, des Sports, de la Recherche et de la Technologie au Japon.

RÉFÉRENCES

[1] D.A. Dawson et K. Fleischmann: A super-Brownian motion with a single point catalyst. *Stochastic Process. Appl.* **49** (1994), 3–40.

[2] D.A. Dawson et K. Fleischmann: A continuous super-Brownian motion in a super-Brownian medium. *J. Theoret. Probab.* **10** (1) (1997), 213–276.

[3] I.Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.

[4] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6** (2) (2006), 145–205.

[5] I. Dôku: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.

[6] I. Dôku: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6** (2008), 56–69.

[7] I. Dôku: Comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration. apparaître à *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **57** (2) (2008), 211–223.

[8] I. Dôku: Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **58** (1) (2009) 209–218.

[9] J.L. Doob: *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[10] E.B. Dynkin: *An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.* CRM Monograph Series, 6. Amer. Math. Soc. Providence, 1994.

[11] J. Engländer et K. Fleischmann: Extinction properties of super-Brownian motions with additional spatially dependent mass production. *Stochastic Process. Appl.* **88** (2000), 37–58.

[12] J. Engländer et R.G. Pinsky: On the construction and support properties of measure-valued diffusions on $D \subset \mathbb{R}^d$ with spatially dependent branching. *Ann. Probab.* **27** (1999), 684–730.

[13] J. Engländer et R.G. Pinsky: Uniqueness/nonuniqueness for positive solutions to semilinear equations of the form $u_t = Lu + Vu - \gamma u^p$ in R^n. *J. Diffe. Eqs.* **192** (2003), 396–428.

[14] J. Engländer et D. Turaev: A scaling limit theorem for a class of superdiffusions. *Ann. Probab.* **30** (2002), 683–722.

[15] J. Engländer et A. Winter: Law of large numbers for a class of superdiffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat.* **42** (2006), 171–185.

[16] S.N. Ethier et T.G. Kurtz: *Markov Processes : Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.

[17] K. Fleischmann et J.-F. Le Gall: Anew approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields* **102** (1995), 63–82.

[18] I.M. Guelfand et G.E. Chilov: *Les Distributions.* Dunod, Paris, 1962.

[19] N. Ikéda et S. Oitanabé: *Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion).* (en russe) Naouka, Moscou, 1986.

[20] J. Jacod et A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[21] R.G. Pinsky: *Positive Harmonic Functions and Diffusion: An integrated analytic and probabilistic approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[22] R.G. Pinsky: Transience, recurrence and local extinction properties of the support for supercritical finite measure-valued diffusions. *Ann. Probab.* **24** (1996), 237–267.

(Received March 30, 2009) (Accepted April 17, 2009)