J. Saitama Univ., Fac. Educ., 59(2) : 215–230 (2010)

Des exemples de solutions stochastiques et une classe de processus markoviens indexés par un arbre

Isamu DÔKU

Département de Mathématiques, Faculté d'Éducation, Université de Saïtama

Résumé

On considère un processus markovien indexé par un arbre, et discute sur l'équation associée. En fait, nous considérons dans cet article la structure des arbres mathématiques et construirons une classe de processus markoviens indexés par un arbre. Particulièrement, l'équation associée au processus markovien avec index du type arbre est traitée.

Mots-clés: processus markovien indexé par un arbre, équation associée

1. Introduction

L'histoire de la recherche sur des solutions stochastiques en théorie des probabilité est très longue. Par exemple, le mouvement brownien $B = \{B_t;\, t \geq 0\}$ comme un processus aléatoire correspond à l'opérateur différentiel appelé laplacien Δ, voir Lévy (1940). En vertu de ce fait, la solution $u = u(t, x)$ de l'équation de la chaleur $\partial_t u(t, x) = (\Delta/2)u(t, x)$ en l'analyse est obtenue par l'espérance d'une fonctionnelle du mouvement brownien $\mathbb{E}[F(B_t)]$, voir Durrett (1991). Elle n'est rien de moins que la solution stochastique ou bien la solution probabilistique. Dans plusieurs cas, des solutions stochastiques donnent la variété des représentations probabilistiques aux solutions classiques en analyse, voir Friedman (1975). C'est-à-dire que la solution stochastique nous pourvoit la notion d'interprétation probabilistique sur des solutions du problème analytique, celles qui sont toujours aussi déterministes, n'étant jamais stochastiques. Cela nous intéresse beaucoup, et on considère un processus markovien indexé par un arbre, et discute sur l'équation associée. En fait, nous considérons dans cet article la structure des arbres mathématiques (voir Drmota (2009)) et construirons une classe de processus markoviens indexés par un arbre. Particulièrement, l'équation associée au processus markovien avec index du type arbre est traitée.

2. Résultats principals

Nous introduirons dans cette section quelques résultats principals de cet article. Pour simplicité on posera ici $E = \mathbb{R}^3$, $E_t = (0, t] \times \mathbb{R}^3$, $E_t^2 = (0, t] \times E^2$, et $N_n = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, n\}$

* Université de Saïtama, Département de Mathématiques, 338-8570 Saïtama, Japon.
E-mail: idoku@math.edu.saitama-u.ac.jp.

pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $p(t,x)$ une fonction de densité de transition pour le mouvement brownien à dimension trois, celui qui part de l'origine à temps zero, et pour $x \in E$ avec $|x| > 0$, soit e_x un vecteur unitaire dans la direction x. Le symbole P_x désigne une (3×3)-matrice qui projete des vecteurs sur le sous-espace perpendiculaire à x. De plus, nous poserons $\Xi_x = I - 3e_x e_x^t$, et $\Phi_x(u,v) = (u \cdot e_x)P_x v + (v \cdot e_x)P_x u$, et poserons $\Psi_x(u,v) = \Phi_x(u,v) + u \cdot \Xi_x v e_x$. Soit h une fonction : $E^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\sup_{x \in E} \frac{(h^2 * \eta)(x)}{h(x)} < \infty, \tag{1}$$

où $*$ désigne la convolution et $\eta(x)$ est donnée par $1/|x|^2$, et nous supposons que h soit excessive en la théorie de potentiel, voir Doob (2001). Et puis, on définira deux fonctions de densité de probabilité avec deux paramètres, conditionnelle sous x donnée. Soient f_0 et $f : E^2 \to \mathbb{R}_+$, et pour x fixée,

$$f_0(y,z|x) \sim O\left(\frac{1}{|y|}\right) \quad \text{et} \quad \sim O\left(\frac{1}{|z|^4}\right); \quad f(y,z|x) \sim O\left(\frac{1}{|y|}\right) \quad \text{et} \quad \sim O\left(\frac{1}{|z|^3}\right).$$

Par définition, noter que

$$f(y,z|x) = \frac{f(x,y,z)}{\iint_{E \times E} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z}, \tag{2}$$

où la fonction $f(x,y,z)$ est un densité conjoint des variables aléatoire (X,Y,Z), voir Durrett (1991) ou bien Dalang-Conus (2008). De plus, on va continuer à définir: soient g_0 et g une paire de fonctions de densité conditionnelle pour l'attente, telles que pour $y \in E$ donnée,

$$g_0(s|y) \sim \frac{p(s,\cdot)}{s} \quad \text{et} \quad g(s|y) \sim p(s,\cdot) \quad \text{pour} \quad s > 0.$$

De plus, nous poserons pour simplicité, $f_1(s) := g_0(s|z)$, $f_k(s) := g(s|z)$ pour 2 et 4, $f_k(s) := g(s|y)$ pour 3 et 5, $f_k(y,z|x) := f_0(y,z|x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, et $f_k(y,z|x) := f(y,z|x)$ pour $k = 4, 5$.

Voila notre résultat principal dans cet article.

Théorème 1. *Il y a un processus markovien* $X = \{\{W_v(t)\}_{t \geq 0},\ X_v,\ Y_v,\ Z_v,\ T_v,\ K_v;\ v \in \mathcal{V}\}$ *indexé par un arbre* $\mathcal{V}$, *et une fonctionnelle aléatoire* $U_v(t)$ *associée au processus* X, *tels que en posant* $w(t,x) = \mathbb{E}_x[U_\emptyset(t)]$, *la fonction* $w(t,x)$ *satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \int_{E^3} w_0(y) q(t,y|x)\mathrm{d}y \\ &+ \int_{E_t^2} m(x)(g_0(s|z) f_0(y,z|x) \Phi_z(w \circ \gamma, w \circ \gamma) \\ &+ (2g(s|z) f_0(y,z|x) - 3g(s|y) f_0(y,z|x)) \Psi_z(w \circ \gamma, w \circ \gamma))\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &+ \int_{E_t^2} \ell(x)(2g(s|z) f(y,z|x) P_z(\varphi \circ \gamma) - g(s|y) f(y,z|x) \Xi_z(\varphi \circ \gamma))\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3}$$

pour certaines fonctions $m(x)$ et $\ell(x)$, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E \to E$ est une fonction propre, $w \circ \gamma = w(t-s,\ x-z)$, et $q(t,y|x)$ est la fonction de densité de transition pour le mouvement h-brownien sur l'espace étendu $E \cup \{\theta\}$ avec le piège ou la trappe θ, sous x donnée.

Remarque 1. Ce résultat décrit en Théorème 1, c'est, en un sens, une extension du résultat exprimé en Ossiander (2005), voir Eq.(23) de Proposition 4.1 à p.282.

3. Des exemples simples de solutions probabilistiques

Dans cette section nous allons donner des exemples typiques et très importants, ceux qui sont des solutions stochastiques ou bien des solutions probabilistiques.

Exemple 1. (Équation de la chaleur à dimension un) Quand on considère le problème de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \qquad \text{avec} \quad u(0,x) = f(x). \tag{4}$$

En la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, la solution de (4) pour la fonction initiale f étant membre de la classe des fonctions propres est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) = (p(t) * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}f(y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \tag{6}$$

est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (4), et $f*g$ désigne la convolution entre deux fonctions f et g. D'autre part, quand on considère le mouvement brownien standard à dimension un

$$B = \{B_t; t \geq 0\} = \{B_t, P_x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}\},$$

si la fonction initiale f est, par exemple, de fonction continue et bornée définie sur $\mathbb{R}$, alors la solution de (4) est donnée par

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)], \tag{7}$$

où $\mathbb{E}_x$ désigne l'espérance par rapport à la mesure de probabilité P_x, celle qui est une loi du mouvement brownien $B = \{B_t; t \geq\}$ à dimension un défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tel que $P_x(B_0(\omega) = x) = 1$. En fait, on va montrer

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = \int_{\Omega} f(B_t(\omega))P_x(\mathrm{d}\omega). \tag{8}$$

Ensuite Eq.(8) s'écrit comme

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)P(t,x,\mathrm{d}y)$$

en utilisant la fonction de transition P, celle qui permet d'avoir l'interprétation suivante:

$$P(t, x, \mathrm{d}y) = \mathbb{P}(B_t \in \mathrm{d}y | B_0 = x).$$

Puisque la fonction de transition P est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $m^1(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}y$, c'est-à-dire, $P(t, x, \mathrm{d}y) << \mathrm{d}y$ avec la fonction de densité p. Dans ce cas, P possède une expression (cf. Doob (1953))

$$P(t, x, \mathrm{d}y) = p(t, x - y)\mathrm{d}y, \tag{9}$$

et permet d'avoir

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(t, x - y)\mathrm{d}y, \tag{10}$$

où la fonction de densité p n'est rien de moins que la solution fondamentale p en (6). □

Exemple 2. (Équation de la chaleur à dimension n) On considère le problème de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta u(t, x), \quad t > 0 \qquad \text{avec} \quad u(0, x) = f(x), \tag{11}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et Δ est un opérateur différentiel appelé laplacien, ayant

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Bien sûr, la solution du problème (11) est donnée par

$$u(t, x) = (p(t) * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x - y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{12}$$

où

$$p(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) \tag{13}$$

est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (11), et $|x|$ est la norme euclidienne, i.e.,

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)^{1/2}.$$

Même dans ce cas la solution générale unique s'écrit aussi comme (cf. Doob (2001))

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = \mathbb{E}_x[f(B_t^1, \ldots, B_t^n)], \tag{14}$$

en employant cette fois le mouvement brownien standard à dimension n

$$B = \{B_t; t \geq 0\} = \{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n), P_x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\},$$

où pour chaque k ($k = 1, \ldots, n$), B_t^k est une copie du mouvement brownien à dimension un étant mutuellement indépendant, voir Durrett (1991). □

Exemple 3. (Équation de la diffusion) Définissons l'opérateur différentiel L sur $\mathbb{R}^n$ comme

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{15}$$

et supposons que L soit uniformément elliptique. Soit $a(x) = (a_{ij}(x))$ une matrice symétrique, positive et régulière, et supposons aussi que pour chaque i, j $(i, j = 1, \ldots, n)$, des éléments $a_{ij}(x)$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, soient fonctions continues et bornées, et de classe C^1. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Lu(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \qquad \text{avec } \ u(0,x) = f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n). \tag{16}$$

Selon la théorie générale des équations différentielles aux dérivées partielles, la solution unique $u \equiv u(t,x)$ de (16) est donnée par

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} q(t,x,y) f(y) \mathrm{d}y, \tag{17}$$

où $q(t,x,y)$ est la solution fondamentale pour l'opérateur L sur $\mathbb{R}^n$, voir Stroock-Varadhan (1979). D'autre part, soit $X = \{X_t; t \geq 0\} = \{X_t, P_x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ un processus de diffusion sur $\mathbb{R}^n$ avec générateur infinitésimal L, celui qui se réalise comme la solution unique d'équation différentielle stochastique du type Itô

$$\mathrm{d}X_t = \Phi(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \quad X_0 = x. \tag{18}$$

Ici $\Phi(x) = (\Phi_{ij}(x))$ est une $(n \times d)$- matrice non-dégénérée de classe $M(n \times d)$ telle que

$$\Phi(x) \cdot {}^t\Phi(x) = a(x) \equiv (a_{ij}(x)) \in M(n \times n), \quad \text{pour } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

C'est-à-dire, pour chaque i, j $(i, j = 1, \ldots, n)$, la relation suivante se remplit

$$\sum_{k=1}^{d} \Phi_{ik}(x)\Phi_{kj}(x) = a_{ij}(x), \quad \text{pour } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Et puis, $B = \{B_t; t \geq 0\}$ désigne un mouvement brownien standard à dimension d. Autrement dit, pour le processus de diffusion $X_t(\omega) = (X_t^1(\omega), \ldots, X_t^n(\omega))$ sur $\mathbb{R}^n$, chaque processus de diffusion à dimension un, $X_t^i(\omega)$ satifait une équation différentielle stochastique du type Itô

$$\mathrm{d}X_t^i = \sum_{k=1}^{d} \Phi_{ik}(X_t)\mathrm{d}B_t^k + b_i(X_t)\mathrm{d}t \qquad \text{avec } X_0^i(\omega) = x_i, \ p.s. \tag{19}$$

En d'autre termes, en employant l'intégrale stochastique d'Itô par rapport au mouvement brownien, nous pouvons récrire l'équation précédente comme

$$X_t^i = x_i + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \Phi_{ik}(X_s)\mathrm{d}B_s^k + \int_0^t b_i(X_s)\mathrm{d}s, \quad \text{chaque } i. \tag{20}$$

Sous la situation décrite ci-dessus, la solution stochastique de (16) est donnée par

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \mathbb{E}_x[f(X_t^1, \ldots, x_t^n)], \tag{21}$$

voir Varadhan (1980), Friedman (1975) (voir aussi Ikéda-Oitanabé (1986) et Karatzas-Shreve (1988)). □

Exemple 4. (Équation de KPP) Voir McKean (1975); et voir aussi Champneys et al. (1995) et Neveu (1987). Selon l'idée de McKean, on considère le problème de Cauchy pour l'équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP):

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + u(t,x)^2 - u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } u(0,x) = f(x). \tag{22}$$

Supposons ici que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Pour l'équation de KPP elle-même, voir Kolmogorov et al. (1937). Soit $\{S_t; t \geq 0\}$ un semi-groupe avec paramètre un, celui qui justement correspond à l'opérateur $(1/2)\partial^2/\partial x^2$. L'équation de KPP est équivalente à l'équation intégrale suivante:

$$u(t,x) = e^{-t}S_t f(x) + \int_0^t e^{-(t-s)}S_{t-s}u(s,x)^2 \mathrm{d}s. \tag{23}$$

Il est évident que le terme laplacien produit une particule brownienne, et aussi que le terme quadratique u^2 induit le branchement binaire. Mais cependant, il est très clair que le terme réductif $-u$ entraîne le temps exponentiel $\tau(\omega)$ entre une paire de branchements. Soit ici $N(t)$ le nombre des particules descendantes à le temps t, tel que

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-t}(1 - e^{-t})^{k-1}.$$

De plus, soit $W = \{W_t^{(i)}; t \geq 0, i \geq 1\}$ le mouvement brownien de branchement sur $\mathbb{R}$ avec la probabilité

$$\mathbb{P}(\tau(\omega) > t) = e^{-t}.$$

En ce cas, la solution stochastique de (22) (ou bien (23)) peut être obtenue par

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[\prod_{i=1}^{N(t)} f(W_t^{(i)})] = \mathbb{E}[f(x + W_t^{(1)})f(x + W_t^{(2)}) \cdots f(x + W_t^{(N(t))})]. \tag{24}$$

Noter que l'existence de la solution u pour l'équation de KPP peut être assurée par la borne imposée sur la donnée initiale f. □

4. Des exemples compliqués de solutions probabilistiques

Dans cette section nous considérons des exemples plus compliqués, qui sont très utiles en considération de construire une solution stochastique.

Exemple 5. (Équation non-linéaire et super-processus) Ici on considère le problème de Cauchy pour une certaine équation différentielle non-linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Lu(t,x) - \psi(u) \quad \text{dans } [0,\infty)\times D, \qquad \text{avec } u(0,x)=f(x),\ \forall x\in D, \tag{25}$$

où L désigne un opérateur elliptique auquel s'associe le processus de diffusion $\{\xi_t\}$, le domaine D est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^d$, et la fonction $\psi(u)$ désigne un terme non-linéaire de u. Alors il existe un super-processus $X = \{X_t, \mathbb{P}_\mu; t\geq 0, \mu\in M_F(D)\}$ (ou bien un processus aléatoire à valeurs dans l'espace $M_F(\mathbb{R}^d)$ de mesures finies sur $\mathbb{R}^d$), celui qui est un processus markovien à valeurs dans l'espace $M_F(D)$, tel que la fonctionnelle de transition de Laplace remplit

$$\mathbb{E}_\mu[e^{-\langle X_t,\varphi\rangle}] = e^{-\langle \mu, u^{[\varphi]}(t,\cdot)\rangle}, \tag{26}$$

où la fonction $u\equiv u(t,x) = u^{[\varphi]}(t,x)$ est une solution unique du problème (25) avec la fonction initiale φ à la place de f. Par conséquent, il est très facile de voir que la solution probabilistique de (25) est donnée par

$$u(t,x) = -\log \mathbb{E}_{\delta_x}[e^{-\langle X_t,f\rangle}]. \tag{27}$$

Il est bien connu que le super-processus décrit ci-dessus existe sûrement si la fonction non-linéaire satisfait la condition suivante:

$$\psi(z) = a(x)z + b(x)z^2 + \int_0^\infty (e^{-rz}-1+rz)n(\mathrm{d}r), \tag{28}$$

avec une mesure de Radon $n(\mathrm{d}r)$ sur $(0,\infty)$ satisfaisant

$$\int_0^\infty (r\wedge r^2)n(\mathrm{d}r) < \infty,$$

voir Dynkin (1993), Dynkin (1994); et puis voir aussi Etheridge (2000), Roelly-Coppoletta (1986), Iscoe (1986), Dawson (1993), Dôku (2000), Dôku (2010) et Engländer-Turaev (2002). □

Exemple 6. (Équation de Navier-Stokes) Nous considérons ici l'équation de Navier-Stokes pour le fluide incompressible.

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}u_k u_j = \nu\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_k} + f_k, \quad \text{avec } \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{29}$$

Selon Le Jan-Sznitman (1997), la solution de l'équation changée par la transformation de Fourier possède une représentation probabilistique. Nous employons ici la transformation de Fourier suivante:

$$\hat{u}(t,\xi) \equiv (\mathcal{F}u)(t,\xi) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}u(t,x)\mathrm{d}x, \tag{30}$$

celle qui change l'espace ordinaire en l'espace de Fourier. En utilisant cette transformation de Fourier pour l'équation de Navier-Stokes (29), on obtient alors

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \xi_j(\hat{u}_k * \hat{u}_j) = -\nu|\xi|^2\hat{u}_k - i\xi_k\hat{p} + \hat{f}_k. \tag{31}$$

De plus, on va employer la projection de Leray, multiplication et division par le terme $|\xi|$, et puis nous allons exécuter la transformation des variables : $s \to t - s$. D'ailleurs, supposons ici que la donnée initiale et la force extérieure soient franches de la divergence. Alors il est très naturel que cela amène la disparition du terme de pression p. Par ailleurs, nous définissons ici le nouveau signe pour simplicité:

$$a \otimes_\xi b := -i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot a\right)\left(b - \left(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot b\right)\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Sous cette circonstance au-dessus, l'expression en la forme différentielle (31) se transforme en celle plus simple en la forme intégrale, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\nu|\xi|^2 s}\Bigg(\frac{|\xi|}{(\sqrt{2\pi})^n}\,\cdot \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(t-s,\eta)\otimes_\xi \hat{u}(t-s,\xi-\eta)\mathrm{d}\eta + \hat{f}(t-s,\xi)\Bigg)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{32}$$

Noter ici qu'il faut normaliser tous les coefficients pour obtenir des mesures de probabilité. On définira alors une nouvelle fonction χ :

$$\chi(t,\xi) = \frac{\hat{u}(t,\xi)}{H(\xi)} \tag{33}$$

en posant, par exemple, $H(\xi) = 1/(\pi^3|\xi|^2)$; ou bien $H(\xi) = \beta e^{-\beta|\xi|}/(2\pi|\xi|)$ comme le noyau majorant pour le cas à dimension 3, satisfaisant la condition $H * H(\xi) \leqslant |\xi| \cdot H(\xi)$. Quand on pose

$$\chi_0(\xi) = \frac{\hat{u}_0(\xi)}{H(\xi)} \tag{34}$$

comme la nouvelle donnée initiale, en définissant

$$m(\xi) = \frac{2|\xi|\cdot H * H(\xi)}{\nu|\xi|^2(\sqrt{2\pi})^n H(\xi)}, \quad \text{et} \quad \phi(t,\xi) = \frac{2\hat{f}(t,\xi)}{\nu|\xi|^2 H(\xi)}, \tag{35}$$

alors on peut construire une fonction de densité de probabilité K_ξ comme

$$K_\xi(\eta, \xi-\eta) = \frac{H(\eta)H(\xi-\eta)}{H * H(\xi)}, \tag{36}$$

par l'usage du noyau majorant $H(\xi)$. En conséquence, l'équation intégrale (32) se récrit encore en une autre équation intégrale similaire par rapport au terme $\chi(t,\xi)$. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}(37)\qquad \chi(t,\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t}\chi_0(\xi) + \int_0^t \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2 s}\Bigg(\frac{m(\xi)}{2}\cdot \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t-s,\eta)\otimes_\xi \chi(t-s,\xi-\eta)K_\xi(\eta,\xi-\eta)\mathrm{d}\eta + \frac{\phi(t-s,\xi)}{2}\Bigg)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ensuite, nous considérerons ci-sessous une interprétation probabilistique pour l'équation (37) précédente. Soit $S = S(\omega)$ une variable aléatoire qui est distribuée par la distribution exponentielle avec paramètre $\nu|\xi|^2$, i.e., $S \sim Ex(\nu|\xi|^2)$. En d'autres termes, cela signifie que sa fonction de densité est donnée explicitement par $\nu|\xi|^2\exp\{-\nu|\xi|^2\}$. De plus, soient $Z = Z(\omega)$ une variable aléatoire de Bernoulli avec paramètre $\frac{1}{2}$, et Y_1, Y_2 une paire de variables aléatoires corrélatives, celles qui sont distribuées par $K_\xi(\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2)$. On suppose ici que S, Z, Y_1 et Y_2 soient tous mutuellement indépendantes. Dans ce cas, nous obtenons maintenant

$$\begin{aligned}(38)\qquad \chi(t,\xi) &= \mathbb{E}[\chi_0(\xi)1\{S(\omega)\geq t\} + \phi(t-S(\omega),\xi)1\{S(\omega)<t\}\cdot 1\{Z(\omega)=0\} \\ &\quad + m(\xi)\chi(t-S(\omega),Y_1(\omega))\otimes_\xi \chi(t-S(\omega),Y_2(\omega))1\{S(\omega)<t\}\cdot 1\{Z=1\}] \\ &=: \mathbb{E}[V^{(1)}(t,\xi)].\end{aligned}$$

En faisant usage itératif de cette formalité pour la variable aléatoire $V^{(k)}(t,\xi)$, nous pouvons obtenir finalement en sa limite

(39)

$$\begin{aligned}V^{(\infty)}(t,\xi) &= \chi_0(\xi)1\{S(\omega)\geq t\} + \phi(t-S(\omega),\xi)1\{S(\omega)<t\}\cdot 1\{Z(\omega)=0\} \\ &\quad + m(\xi)V^{(\infty)}(t-S(\omega),Y_1(\omega))\otimes_\xi V^{(\infty)}(t-S(\omega),Y_2(\omega))1\{S(\omega)<t\}\cdot 1\{Z=1\},\end{aligned}$$

s'il existe sa limite. Sous cette circonstance, on en déduit que

$$(40)\qquad \chi(t,\xi) = \mathbb{E}[V^{(\infty)}(t,\xi)].$$

En prenant (33) en considération, il découle que la solution stochastique pour l'équation (32) est donnée par

$$(41)\qquad \hat{u}(t,\xi) = H(\xi)\cdot\mathbb{E}[V^{(\infty)}(t,\xi)].$$

C'est une représentation probabilistique de la solution $\hat{u}(t,\xi)$ de (32) comme l'espérance au poids. □

Remarque 2. Un résultat de la généralisation de cette représentation stochastique décrite ci-dessus, celui qui se trouve dans l'article de Bhattacharya et al. (2003).

Remarque 3. Dans l'article de Constanti-Iyer (2008), on trouvera une autre approache à l'équation de Navier-Stokes, où, par exemple, le terme du cours en l'équation différentielle stochastique est calculé implicitement comme l'espérance d'une expression qui engage le fluide lequel conduit son équation.

Remarque 4. Dans l'article de Vilela Mendes (2009), se trouvent une solution stochastique pour l'équation de Poisson-Vlasov transformée par la transformation de Fourier du type

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \overrightarrow{\nu} \cdot \nabla_x f_i - \frac{e_i}{m_i} \nabla_x \Phi \cdot \nabla_\nu f_i = 0 \tag{42}$$

pour $i = 1, 2$, avec

$$\varDelta_x \Phi = -4\pi \left(\sum_i e_i \int f_i(t, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\nu}) \mathrm{d}^3\nu \right), \tag{43}$$

et une interprétation probabilistique pour la solution de l'équation d'Euler du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = \nabla p \tag{44}$$

pour le fluide incompressible avec $\nabla \cdot u = 0$.

5. Processus markovien indexé par un arbre

Nous allons construire dans cette section des processus markoviens indexés par un arbre, ceux qui sont des processus stochastiques très importants pour notre article. Soit $\mathcal{V}$ la totalité des arbres binaires, i.e.,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n = \{0,1\}^0 \cup \{0,1\}^1 \cup \{0,1\}^2 \cup \cdots \cup \{0,1\}^n \cup \cdots \tag{45}$$

avec la racine $\emptyset = \{0,1\}^0$, et soit $\partial\mathcal{V} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la borne de $\mathcal{V}$. Pour un élément $v = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \in \{0,1\}^n$, on définit

$$|v| = n, \tag{46}$$

qui s'appelle la magnitude de v. De plus, pour $v \in \mathcal{V}$, on définit $v|0 = \emptyset$, et pour $v \neq \emptyset$ et $n \geq 1$, on définit

$$v|n = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle. \tag{47}$$

Si $|v| > n$ ($\exists n \in \mathbb{N}$) pour $v \in \mathcal{V}$, alors il existe un élément $w \in \mathcal{V}$ tel que $|w| = n$, et $v|n = w$. Dans ce cas, cet élément w s'appelle un ancêtre de v, et en revanche, l'élément v s'appelle un descendant de w. Pour $v \in \mathcal{V}$ avec $|v| = n$ et $0 \leqslant n < \infty$, on écrit comme

$$\bar{v} = v|(|v| - 1) \quad \text{et} \quad v * k = \langle v_1, \ldots, v_n, k \rangle, \quad \text{avec} \quad k = 0, 1. \tag{48}$$

C'est-à-dire que v est un enfant de $\bar{v}$ et v a des enfants $v * 0$ et $v * 1$. Par exemple, si $v = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \in \mathcal{V}$, alors $|v| = n$ et $\bar{v} = v|(n-1) = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$. De plus, il est souvent commode à interpréter l'élément $\bar{\emptyset}$ comme un précurseur de la racine $\emptyset$. Pour $v, w \in \mathcal{V}$ avec $v \neq w$, on écrit leur commun ancêtre comme $v \wedge w$, et on le définira ci-dessous. Soit

$$n_{v,w} = \max\{\, m \geq 0; \;\; v|m = w|m \,\}, \tag{49}$$

et on définit

$$v \wedge w := v|n_{v,w}. \tag{50}$$

Par exemple, quand on a $v = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ et $w = \langle v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_m \rangle$ avec $n \neq m$, alors il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que $k = \max\{\, \ell \geq 0;\ v|\ell = w|\ell \,\}$, et on a alors $v \wedge w = v|k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. On dit que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ est un sous-arbre binaire à la racine, si les trois conditions suivantes sont valables: (i) $\mathcal{W}$ comprend la racine $\emptyset$, i.e., $\emptyset \in \mathcal{W}$; (ii) pour aucun élément $v \in \mathcal{W}$, $v|k \in \mathcal{W}$ est valable pour $\forall k < |v|$; (iii) pour aucun $v * j \in \mathcal{W}$ (avec $j = 0, 1$), $v * (1 - j) \in \mathcal{W}$.

Quand $\mathcal{W}$ est un sous-arbre binaire fini avec la racine, on définit la borne $\partial\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}$ comme les éléments de $\mathcal{W}$ qui n'ont pas de descendants dans $\mathcal{W}$, c'est-à-dire,

$$\partial\mathcal{W} = \{\, v \in \mathcal{W};\quad v * 0 \in \mathcal{W}^c \,\}. \tag{51}$$

L'intérieur $\mathcal{W}^\circ = \mathcal{W} \setminus \partial\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}$, celui qui se compose des éléments de $\mathcal{W}$ qui possèdent des descendants dans $\mathcal{W}$. Noter que, si l'espérance du nombre de descendants est moins que ou bien égale à 1, alors le sous-arbre binaire est fini avec probabilité un.

Soit $(B, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit $X = \{X_v;\ v \in \mathcal{V}\}$ une collection de variables aléatoires à valeurs dans l'espace B indexées par un arbre $\mathcal{V}$, celle qui est définie sur un commun espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Le symbole $\mathcal{F}_v = \sigma(X_v)$ désigne la σ-tribu engendrée par la collection de variables aléatoires indexées par l'élément v de l'arbre $\mathcal{V}$, et

$$\mathcal{G}_v = \sigma(\{\, X_{v|n};\ n \leqslant |v| \,\}) \tag{52}$$

signifie la σ-tribu engendrée par la collection de variables aléatoires indexées par tous les ancêtres de $v \in \mathcal{V}$. D'autre part, le symbole

$$\mathcal{H}_v = \sigma(\{\, X_w;\ w|(|v|) = v \,\}) \tag{53}$$

désigne la σ-tribu engendrée par la collection de variables aléatoires indexées par l'élément v de $\mathcal{V}$ et tous les descendants de v. De plus, bien sûr, $\mathcal{F}_{\bar{\emptyset}}$ est la σ-tribu triviale. Voir Drmota (2009).

Définition. On dit que $X = \{X_v;\ v \in \mathcal{V}\}$ est un processus markovien indexé par un arbre $\mathcal{V}$, si pour aucun $v \in \mathcal{V}$ avec $|v| < \infty$, les deux σ-tribus $\mathcal{H}_{v*0}$ et $\mathcal{H}_{v*1}$ sont conditionnellement indépendantes sous la σ-tribu $\mathcal{F}_v$ donnée, par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_0 \cap A_1 \,|\, \mathcal{F}_v) = \mathbb{P}(A_0 \,|\, \mathcal{F}_v)\mathbb{P}(A_1 \,|\, \mathcal{F}_v) \tag{54}$$

est valable $\mathbb{P}$-p.s. pour $A_k \in \mathcal{H}_{v*k}$ avec $k = 0, 1$; de plus, si pour aucuns $v, w \in \mathcal{V}$ et aucune variable aléatoire Y étant $\mathcal{H}_w$-mesurable telle que $\mathbb{E}|Y| < \infty$,

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_v] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{v\wedge w}], \quad \mathbb{P} - p.s. \tag{55}$$

est valable. □

Remarque 5. La loi ou bien la distribution du processus markovien X indexé par un arbre $\mathcal{V}$, celle qui peut être spécifiée par les distributions conditionnelles de X_v sous la σ-tribu $\mathcal{F}_{\bar{v}}$ donnée pour $v \in \mathcal{V}$.

6. Preuve du théorème

Dans cette section, nous specifierons le processus markovien X indexé par un arbre, celui qui est utilisé pour construire la solution probabilistique pour une équation intégrale (3) en théorème 1. Il est très utile à combiner des fonctions de densité de transition spatiales et temporelles f_0, f, g_0 et g données et leur décrire comme une fonction de densité conjointe via le choix aléatoire. Soit $p_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ telle que $\sum_k p_k = 1$ et $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $x \in E$ fixée, nous définissons ci-dessous une fonction de densité conjointe conditionnelle $\beta(y, z, s, k|x)$ pour un quadruple (Y, Z, T, K) des variables aléatoires à valeurs dans $E \times E \times \mathbb{R}^+ \times N_5$:

$$\beta(y, z, s, k|x) = p_k f_k(s) f_k(y, z|x) \quad \text{pour} \quad k \in N_5. \tag{56}$$

Maintenant nous définirons ici le processus markovien indexé par un arbre $\mathcal{V}$, celui qui joue un rôle très important dans notre représentation stochastique. Soit $X = \{\{W_v(t)\}_{t\geq 0},\ X_v,\ Y_v,\ Z_v,\ T_v,\ K_v;\ v \in \mathcal{V}\}$ un processus markovien indexé par un arbre $\mathcal{V}$ avec la probabilité de transition suivante. Sous la condition que $X_{\bar{v}} = x$ donnée, $\{W_v(t);\ t \geq 0\}$ est un mouvement h-brownien avec sa valeur initiale x et la fonction de densité de transition $q(t, y|x)$ sur l'espace étendu $E \cup \{\theta\}$ avec le piège ou la trappe θ. Noter que chaque W_v est lui-même un processus markovien et continu avec probabilité un, voir Doob (2001). Nous définirons maintenant la fonction de densité conditionnelle sous $X_{\bar{v}} = x$ donnée pour (Y_v, Z_v, T_v, K_v) comme $\beta(y, z, s, k|x)$ en (56), et poserons $X_v = X_{\bar{v}} - Z_v$. On suppose ici que pour tout $v \in \mathcal{V}$, le procrssus $\{W_v(t)\}_{t\geq}$ et l'ensemble $(X_v, Y_v, Z_v, T_v, K_v)$ soient mutuellement indépendantes conditionnellement sous l'état $X_{\bar{v}}$ donnée.

Remarque 6. Il est évident que seulement l'ensemble $\{W_{\bar{v}}(t); t \geq\}$ et $(X_{\bar{v}}, Y_{\bar{v}},\ Z_{\bar{v}}, T_{\bar{v}},\ K_{\bar{v}})$ est dominant dans le mécanisme déterminant pour la distribution de notre processus markovien X indexé par l'arbre $\mathcal{V}$.

Remarque 7. Il est intéressant à commenter que l'ensemble $\{X_v;\ v \in \mathcal{V}\}$ réalise lui-même une marche aléatoire markovienne de branchement.

Puisque la distribution de X dépend de la valeur initiale $X_{\bar{\emptyset}}$, on écrira par $\mathbb{P}_x$ la mesure de probabilité correspondante à $X_{\bar{\emptyset}} = x$, et dsignera par $\mathbb{E}_x$ son espérance par rapport à cette mesure de probabilité. Ensuite, on va définir ci-dessous une fonctionnelle aléatoire $U_v(t)$ pour $v \in \mathcal{V}$. Θ_v désigne l'opérateur bilinéaire aléatoire, celui qui se réalise comme $\Theta_v(\alpha, \beta) = \Phi_{Z_v(\omega)}(\alpha, \beta)$ si $K_v = 1$ et $= ((-1)^{K_v}/2)\Psi_{Z_v(\omega)}(\alpha, \beta)$ si $K_v = 2, 3$. D'autre part, Θ_v désigne une matrice aléatoire pour des cas suivants: en effet, on définit comme $\Theta_v = P_{Z_v(\omega)}$ si $K_v = 4$, et $\Theta_v = (-1)/2 \cdot \Xi_{Z_v(\omega)}$ si $K_v = 5$. Alors nous poserons

$$\begin{aligned} U_v(t) = w_0(W_v(t)) &+ \frac{m(X_{\bar{v}})}{p_1}\Theta_v(U_{v*0}(t - T_v), U_{v*1}(t - T_v))1\{K_v \in N_3\}1\{T_v \leqslant t\} \\ &+ \frac{2\ell(X_{\bar{v}})}{p_4}\Theta_v\varphi(t - T_v, X_v)1\{K_v \in N_5 \setminus N_3\}1\{T_v \leqslant t\}. \end{aligned} \tag{57}$$

En ce cas nous poserons ici $\mathbb{E}_x[U_\emptyset(t)] = w(t,x)$. Tout d'abord, noter que $U_0(t-T_\emptyset)$ et $U_1(t-T_\emptyset)$ sont indépendantes conditionnellement sous la tribu $\mathcal{F}_\emptyset$ donnée. Cela entraîne que

$$\begin{aligned}(58)\qquad \mathbb{E}_x[U_\emptyset(t)|\mathcal{F}_\emptyset] &= w_0(W_\emptyset(t))\\ &+ \frac{m(x)}{p_1}\Phi_{Z_\emptyset}(\mathbb{E}_x[U_0(t-T_\emptyset)|\mathcal{F}_\emptyset], \mathbb{E}_x[U_1(t-T_\emptyset)|\mathcal{F}_\emptyset])1\{K_\emptyset = 1\}1\{T_\emptyset \leqslant t\}\\ + \left(\frac{2m(x)}{p_2}1\{K_\emptyset = 2\} - \frac{3}{p_3}1\{K_\emptyset = 3\}\right) &\Psi_{Z_\emptyset}(\mathbb{E}_x[U_0(t-T_\emptyset)|\mathcal{F}_\emptyset], \mathbb{E}_x[U_1(t-T_\emptyset)|\mathcal{F}_\emptyset])1\{T_\emptyset \leqslant t\}\\ +\ell(x)\left(\frac{2}{p_4}1\{K_\emptyset = 4\}P_{Z_\emptyset} - \frac{1}{p_5}1\{K_\emptyset = 5\}\Xi_{Z_\emptyset}\right) &\varphi(t-T_\emptyset, x-Z_\emptyset)1\{T_\emptyset \leqslant t\}.\end{aligned}$$

Quand on considère le mécanisme de branchement aléatoire spatiale et temporelle pour $U_\emptyset$, tout d'abord, en initiant le processus markovien X par $X_{\bar{\emptyset}} = x \in E$, on va activer le mouvement h-brownien $W_\emptyset(t)$ qui part du point $X_{\bar{\emptyset}}$ à temps $t = 0$. Ce mouvement va continuer jusqu'à temps t avec $w_0(W_\emptyset(t))$, celui étant employé en calcul du premier terme de $U_\emptyset(t)$. Mais cependant, ce terme disparaît si $W_\emptyset$ est entré dans le piège θ. Bien que le processus $W_\emptyset$ bouge jusqu'à temps t, si $T_\emptyset$ est moins que t, alors le chemin est déactivé à temps $T_\emptyset$. Si cette déactivation se passe avant le temps t, il y a deux possibilités: (i) si $K_\emptyset = 1, 2$ ou 3, deux nouveaux chemins W_0 et W_1 sont partis à la position $X_\emptyset$ et le temps $T_\emptyset$; (ii) si $K_\emptyset = 4$ ou 5, alors la force est mise entre $U_\emptyset$ par l'évaluation de $\Theta_\emptyset\varphi$ à la position $X_\emptyset$ et le temps $t - T_\emptyset$. Les distributions de ces chemins nouvellement activés sont indédenpants conditionnellement sous $X_\emptyset$ donnée. Si les chemins W_0 et W_1 ont été activés, alors le processus en question répétera la même chose avec $X_\emptyset$ à la place de $X_{\bar{\emptyset}}$ et avec $t - T_\emptyset$ à la place de t.

Lemme 1. *Pour $v = 0$ on a alors une expression suivante:*

$$(59)\qquad U_0(t-T_\emptyset) = w_0(W_0(t-T_\emptyset)) + \frac{\ell(X_\emptyset)}{p_4}\Theta_0\varphi(t-T_\emptyset-T_0, X_0).$$

Lemme 2. *Pour $v = 1$ on a alors une expression suivante:*

$$(60)\qquad U_1(t-T_\emptyset) = w_0(W_1(t-T_\emptyset)) + \frac{m(X_\emptyset)}{p_1}\Theta_1(w_0(\hat{\alpha}), w_0(\tilde{\alpha})),$$

avec $\hat{\alpha} = W_{1,0}(t-T_\emptyset-T_1)$ et $\tilde{\alpha} = W_{1,1}(t-T_\emptyset-T_1)$.

Lemme 3. *Pour $v = \emptyset$ on a alors une formule recursive stochastique:*

$$(61)\qquad U_\emptyset(t) = w_0(W_\emptyset(t)) + \frac{m(X_{\bar{\emptyset}})}{p_1}\Theta_\emptyset(U_0(t-T_\emptyset), U_1(t-T_\emptyset)).$$

De plus, nous obtenons

Lemme 4. *On a alors pour $i = 0, 1$*

$$(62)\qquad \mathbb{E}_x[U_i(t-T_\emptyset)|\mathcal{F}_\emptyset]1\{Z_\emptyset = z\}1\{T_\emptyset = s\} = \mathbb{E}_{x-z}[U_\emptyset(t-s)].$$

En prenant des résultats du lemme 1,2 et 3 en considération, on peut employer Lemme 4 à déduire l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[U_\emptyset(t)] &= \mathbb{E}_x[\,\mathbb{E}_x[U_\emptyset(t)|\mathcal{F}_\emptyset]\,] \\
&= \int_E q(t,y|x)w_0(y)\mathrm{d}y + I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned} \tag{63}$$

où I_1 (resp. I_2, I_3 ou I_4) est donnée respectivement par

$$\int_{E_t^2} \frac{m(x)}{p_1}\beta(y,z,s,1|x)\Phi_z(\mathbb{E}_{x-z}[U_\emptyset(t-s)],\mathbb{E}_{x-z}[U_\emptyset(t-s)])\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s, \tag{64}$$

(65)

$$\int_{E_t^2} m(x)(\frac{2}{p_2}\beta(y,z,s,2|x) - \frac{3}{p_3}\beta(y,z,s,3|x))\Psi_z(\mathbb{E}_{x-z}[U_\emptyset(t-s)],\mathbb{E}_{x-z}[U_\emptyset(t-s)])\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

$$\int_{E_t^2} \frac{2\ell(x)}{p_4}\beta(y,z,s,4|x)P_z\varphi(t-s,x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s, \quad \text{et} \tag{66}$$

$$\int_{E_t^2} \frac{\ell(x)}{p_5}\beta(y,z,s,5|x)\Xi_z\varphi(t-s,x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{67}$$

D'où on en déduit l'expression (3). Cela signifie l'équation intégrale souhaitée. Ce qui termine la démonstration du théorème.

Remerciments

Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche pour le projet de recherche scientifique : MEXT Grant-in Aids SR(C) 20540106, ceux qui ont été distribués par le Ministère de l'Éducation, de la Culture, des Sports, de la Recherche et de la Technologie au Japon. L'auteur de cet article se confondre en remerciements, en particulier aux membres de Département de Mathématiques, Faculté de Science et Technologie, Université Scientifique de Tokyo (Campus de Noda), pour leur charmante hospitalité pendant son année sabbatique du 1 avril 2009 au 31 mars 2010.

Références

Bhattacharya, R.N. et al. (2003). Majorizing kernels and stochastic cascades with applications to incompressible Navier-Stokes equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (12), 5003–5040.

Champneys, A., Harris, S., Toland, J., Warren, J. et Williams, D. (1995). Algebra, Analysis and probability for a coupled system of reaction-diffusion equations. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A 350**, 69–112.

Constantin, P. et Iyer, G. (2008). A stochastic Lagrangian representation of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Commun. Pure Appl. Math.* **61**, 330–345.

Dalang, R.C. et Conus, D. (2008). “*Introduction à la Théorie des Probabilités.*” PPUR, Lausanne.

Dawson, D.A. (1993). Measure-valued Markov processes. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour XXI, 1991, 1–260, Lecture Notes in Mathematics vol.1541, Springer-Verlag, Berlin.

Dôku, I. (1995). On the Laplacian on a space of white noise functionals. *Tsukuba J. Math.* **19** (1), 93–119.

Dôku, I. (2000). Exponentiqal moments of solutions for nonlinear equations with catalytic noise and large deviation. *Acta Appl. Math.* **63** (1-3), 101–117.

Dôku, I. (2001). Removability of exceptional sets on the boundary for solutions to some nonlinear equations. *Sci. Math. Japn.* **54** (1), 161–169.

Dôku, I. (2002). White noise approach to limit theorems for solutions of some Wick type nonlinear equations. *Far East J. Math. Sci.* **4** (2), 137–187.

Dôku, I. (2003). Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (1), 1–80.

Dôku, I. (2006). A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6** (2), 145–205.

Dôku, I. (2006). A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Japn.* **64** (3), 563–579.

Dôku, I. (2007). Statistical methods related to educational evaluation. *J. Japan Soc. Math. Educ.* **89** (12), 21–36.

Dôku, I. (2008). Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6**, 56–69.

Dôku, I. (2009). Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. *J. Saitama Univ. Fac. Educ. (Math. Nat. Sci.)* **58** (1), 209–218.

Dôku, I. (2010). A limit theorem of homogeneous superprocesses with spatially dependent parameters. *Far East J. Math. Sci.* **38** (1), 1–38.

Dôku, I. (2010). Existence and uniqueness of singular superprocesses. à paraître.

Dôku, I. (2010). No-exhibition of local extinction of singular superprocesses. en préparation.

Doob, J.L. (1953). “*Stochastic Processes.*” John Wiley and Sons, Inc., New York, Chapman and Hall, Limited, London.

Doob, J.L. (2001). “*Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.*” Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

Drmota, M. (2009). “*Random Trees : An Interplay between Combinatorics and Probability.*” Springer-Verlag, Wien, New York.

Durrett, R. (1991). “*Probability : Theory and Examples.*” Wadsworth & Brooks, Belmont.

Dynkin, E.B. (1993). Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.* **21**, 1185–1262.

Dynkin, E.B. (1994). “*An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.*” CRM

Monograph Series, Vol.6, Amer. Math. Soc. Providence.

Engländer, J. et Turaev, D. (2002). A scaling limit theorem for a class of superdiffusions. *Ann. Probab.* **30** (2), 683–722.

Etheridge, A.M. (2000). "*An Introduction to Superprocesses.*" Amer. Math. Soc., Providence.

Friedman, A. (1975). "*Stochastic Differential Equations and Applications.*" Vol.1, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28, Academic Press, New York.

Ikéda, N. et Oitanabé, S. (1986). "*Stokhastitséskie différentsialïnye ouravnenia i diffuzionnye protsessy (Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion).*" (en russe) Naouka, Moscou.

Iscoe, I. (1986). A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes. *Probab. Theory Relat. Fields* **71** (1), 85–116.

Karatzas, I. et Shreve, S.E. (1988). "*Brownian Motion and Stochastic Calculus.*" Graduate Texts in Mathematics, Vol.113, Springer-Verlag, New York.

Kolmogorov, A., Petrovskii, I. et Piskunov, N. (1937). Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de la matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Bull. Math.* **1**, 1–25.

Le Jan, Y. et Sznitman, A.S. (1997). Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations. *Probab. Theory Relat. Fields* **109**, 343–366.

Letta, G. (1984). "*Martingales et Intégration Stochastique.*" Scuola Normale Superiore, Pisa.

Lévy, P. (1940). "*Processus stochastiques et mouvement brownien.*" Gauthier-Villars, Paris.

McKean, H.P. (1975). Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov. *Commun. Pure Appl. Math.* **28**, 323–331.

Neveu, J. (1987). Multiplicative martingales for spatial branching processes. in Seminar on Stochastic Processes. *Prog. Probab. Stat.* **15**, 223–242.

Ossiander, M. (2005). A probabilistic representation of solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Probab. Theory Relat. Fields* **133**, 267–298.

Roelly-Coppoletta, S. (1986). A criterion of convergence of measure-valued processes: application to measure branching processes. *Stochastics*, **17** (1-2), 43–65.

Stroock, D.W. et Varadhan, S.R.S. (1979). "*Multidimensional Diffusion Processes.*" Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 233, Springer-Verlag, Berlin, New York.

Varadhan, S.R.S. (1980). "*Lectures on Diffusion Problems and Partial Differential Equations.*" Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

Vilela Mendes, R. (2009). Stochastic solutions of some nonlinear partial differential equations. *Stochastics Int. J. Probab. Stoch. Proc.* **81** (3-4), 279–297.

(Received March 31, 2010)
(Accepted April 16, 2010)