埼玉大学紀要　教育学部，64(1)：163-171 (2015)

Une Remarque sur Le Processus de Semimartingale dans Un Problème de Skorokhod

DÔKU, Isamu
Faculte d'Education, Universite de Saïtama

Resume

On considère dans cet article une classe des équations différentielles stochastiques réflexives, qui est équivalente au problème de Skorokhod. On discute sur un processus de semimartingale comme une solution des équations. De fait, nous essayerons de donner une remarque très importante sur le processus de semimartingale dans un problème de Skorokhod.

Mots-cles: l'équation différentielle stochastique réflexive, le problème de Skorokhod, un processus de semimartingale.

1. Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec la filtration $(\mathcal{F}_t)$ usuelle [1]. Soit $B = (B_t)$, $t \geq 0$, un mouvement brownien standard à dimension d, celui qui est adapté à $(\mathcal{F}_t)$ [12] (voir aussi [13]). On désigne par $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$. De plus, $n(x)$ signifie un vecteur extérieur de unité, celui qui est normal envers la borne $\partial\mathcal{O}$ à x. On supposons ici : (H.1) Il existe une constante C_0 positive telle que pour $\forall x \in \partial\mathcal{O}$, $\forall x' \in \mathcal{O}$ et $\forall k \in n(x)$, l'on ait

$$(x - x', k) + C_0|x - x'|^2 \geq 0. \tag{1}$$

(H.2) Pour $\forall x \in \partial\mathcal{O}$, s'il existent une constante C positive et un vecteur $k \in \mathbb{R}^d$ tels que l'on ait

$$(x - x', k) + C|x - x'|^2 \geq 0, \tag{2}$$

pour $\forall x' \in \bar{\mathcal{O}}$, alors nous avons $k = \theta \cdot n(x)$ pour un certain $\theta \geq 0$.
(H.3) Pour de certains $n \geq 1$, $\alpha > 0$ et $R > 0$, il existent $\exists a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^d$ avec $|a_i| = 1$ $(\forall i)$, et $\exists x_1, \cdots, x_n \in \partial\mathcal{O}$ avec

$$\partial\mathcal{O} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, R) \tag{3}$$

tels que pour $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\forall x \in \partial\mathcal{O} \cap B(x_i, 2R)$ et $\forall \xi \in n(x)$, l'on ait

$$(\xi, a_i) \geq \alpha > 0. \tag{4}$$

Définition 1. On dit que $(\mathcal{O}, n(\cdot))$ (ou bien $\mathcal{O}$ seulement) est *admissible* (cf. [15]), s'il existe une suite de ensembles $(\mathcal{O}_m)$, $m \geq 1$, ouverts, unis, et bornés dans $\mathbb{R}^d$ tels que
(i) $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_m$ (resp. le champ de vecteur n et n_m) satisfaitent des hypothèses (H.1), (H.2) respectivement avec constantes C_0 (dans (H.1)) étant uniformes, et $\mathcal{O}$ remplit (H.3) ;
(ii) si $x_m \in \bar{\mathcal{O}}_m$ et x_m et x_m tend vers x $(x_m \to x)$, alors $x \in \mathcal{O}$;

(iii) si K est compact et $K \subset \mathcal{O}$, alors $K \subset \mathcal{O}_m$ pour un nombre m suffisamment grand.

Soit $(\mathcal{O}, n(\cdot))$ un espace admissible, et nous supposons dans cet article que $\mathcal{O}$ satiafait la condition suivante :

(H.4) Il existe une fonction $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ telle que l'on ait

$$\nabla\phi(x)\cdot \leqslant -\alpha C_0 \tag{5}$$

pour une certaine constante $\alpha > 0$, pour $\forall x \in \partial\mathcal{O}$ et $\forall\zeta \in n(x)$, où la constante C_0 dans (5) est donnée par (H.1).

D'autre part, le symbole BV (0, T) signifie l'espace des fonctions avec variation bornée sur un intervalle (0, T). C'est-à-dire, la fonction $f \in BV$ (0, T) remplit $\|f\|_T < \infty$, où la variation totale $\|f\|_T$ de f sur (0, T) est donnée par

$$\|f\|_T := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \tag{6}$$

pour la partition $\Delta : t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = T$. Ici le supremum sup est pris à travers toutes les partitions Δ sur (0, T). Tout d'abord, soit $w \in C([0,\infty), \mathbb{R}^d)$ satisfaisant w (0) $\in \bar{\mathcal{O}}$.

Définition 2. On dit que la paire de fonctions $(x(t), k(t))$ est *une solution pour le problème de Skorokhod* $(w, \mathcal{O}, n)$, si $(x(t), k(t))$ satisfait

$$\begin{cases} x(t) \in C([0,\infty), \bar{\mathcal{O}}), & k(t) \in C([0,\infty), \mathbb{R}^d) \quad \text{et} \\ k(t) \in BV(0,T) \quad \text{pour} \quad \forall T(<\infty), & \end{cases} \tag{7}$$

$$x(t) + k(t) = w(t) \qquad \text{pour} \qquad t \geq 0, \tag{8}$$

où $|k|_t$ est donné par

$$|k|_t := \int_0^t 1_{(x(s)\in\partial\mathcal{O})} d\|k\|_s \tag{9}$$

et, de plus, nous avons

$$k(t) := \int_0^t \xi(s) d|k|_s \qquad \text{avec} \qquad \xi(s) \in n(x(s)). \tag{10}$$

Nous introduisons des théorèmes fondamentaux, ceux qui sont très connus, cf. par exemple [15] ; voir aussi [2] et [17].

Théorème 3. On suppose (H,1), (H.2) *et* (H.3). *Nous supposons que pour toute*

$$w \in C^\infty([0,\infty), \mathbb{R}^d) \qquad \textit{avec} \qquad w(0) \in \bar{\mathcal{O}},$$

il existe une solution pour le problème de Skorokhod $(w, \mathcal{O}, n)$. *Alors pour toute*

$$w \in C([0,\infty), \mathbb{R}^d) \qquad \textit{avec} \qquad w(0) \in \bar{\mathcal{O}},$$

il existe une unique solution $(x(t), k(t))$ *pour le problème de Skorokhod* $(w, \mathcal{O}, n)$. *De plus, une application :*

$$C([0,T],\mathbb{R}^d) \ni w \mapsto x \in C([0,T],\mathbb{R}^d) \tag{11}$$

est continue avec index de Hölder $\frac{1}{2}$ sur des ensembles compacts.

Proposition 4. *Soit A un ensemble relativement compact dans $C([0,T],\mathbb{R}^d)$, inclu dans $C^\infty([0,\infty),\mathbb{R}^d)$. Supposons que $w(0) \in \bar{\mathcal{O}}$ pour toute $w \in A$. Alors il existe une constante K positive (dépendante de A et T) telle que l'on ait*

$$\|k\|_T \leqslant K \tag{12}$$

pour toute $w \in A$, si $(x(t), k(t))$ est la solution pour le problème de Skorokhod $(w, \mathcal{O}, n)$.

Théorème 5. *Soit $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert, borné et admissible dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que*

$$w \in C([0,\infty),\mathbb{R}^d) \qquad avec \qquad w(0) \in \bar{\mathcal{O}}.$$

Alors il existe une unique solution (x, k) pour le problème de Skorokhod $(w, \mathcal{O}, n)$.

Théorème 6. *De plus, une application : $w \mapsto x$ est continue au sens de Hölder avec index $\frac{1}{2}$ sur des compacts de $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ pour tout $T < \infty$.*

Théorème 7. *Si $w \in BV\,(s, u)$* pour $0 \leqslant s \leqslant u < \infty$, *alors $x \in BV\,(s, u)$, et nous avons une estimation*

$$d\|k\|_t \leqslant d\|w\|_t \qquad dans \qquad (s,u). \tag{13}$$

2. Resultats principals

Soit $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ et soient σ_{ij} et b_i (pour $i,j = 1,2,\cdots,d$) des fonctions uniformément bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, satisfaisantes la condition uniformément lipschitzienne : c'est-à-dire, il existe une constante K positive telle que pour $\forall i,j \in \{1,2,\cdots,d\}$,

$$\begin{cases} |\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)| \leqslant K|x-y|, \\ \quad |b_i(x) - b_j(y)| \leqslant K|x-y|, \end{cases} \qquad \text{pour} \quad x,y \in \mathbb{R}^d. \tag{14}$$

En toute simplicité, on emploie souvent la notation habituelle comme

$$\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x)) \in M(d \times d), \qquad \text{et} \qquad b(x) = (b_1(x),\cdots,b_d(x)).$$

Le problème sur l'existence et l'unicité de $(\mathcal{F}_t)$-semimartingales $X = (X_t),\ t \geq 0$, continues comme une solution pour l'équation différentielle stochastique réflexive, ça nous intéresse beaucoup. Une telle semimartingale X_t peut remplir la condition suivante : il existe un processus $k_t \equiv k_t(\omega)$ continu avec variation bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que $X_t \in \bar{\mathcal{O}}$ p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{cases} X_t = x_0 + \displaystyle\int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds - k_t, \\ k_t = \displaystyle\int_0^t \xi_s d|k|_s \qquad \text{avec} \qquad \xi_s \in n(X_s) \end{cases} \tag{15}$$

où $|k|_t$ est donné par

$$|k|_t = \int_0^t 1_{(X_s \in \partial\mathcal{O})} d\|k\|_s. \tag{16}$$

REMARQUE 8. Il est très facile à voir que (15) est équivalent au fait que pour p.s. $\omega \in \Omega$, $X_{\cdot}(\omega)$ est le premier constituant de la solution $(X_{\cdot}(\omega), k_{\cdot}(\omega))$ pour le problème de Skorokhod

$$\left(x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds, \mathcal{O}, n(\cdot)\right).$$

THÉORÈME 9. *Supposons ici l'hypothèse* (H.4) *et* (14). *Alors il existe une unique* $(\mathcal{F}_t)$*- semi-martingale* $(X_t), t \geq 0$*, qui satisfait* (15).

On peut prouver ce théorème au-dessus facilement, en employant le formule d'Itô [12], l'inégalité maximale de Doob [14], et le lemme de Gronwall à la manière standard. Plus précisément, on a le résultat suivant.

LEMME 10. (Le formule d'Itô) *Soit* $X = (X_t)$ *un processus d'Itô sur l'intervalle* $[0, T]$*, de différentielle stochastique*

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t. \tag{17}$$

Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$*, une fonction de* $C^{1,2}_{t,x}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*. Alors,* $Z_t = f(t, X_t)$*,* $t \geq 0$*, devient un processus d'Itô encore qui a pour différentielle stochastique*

$$dZ_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(b_t)^2 dt. \tag{18}$$

Le terme $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(b_t)^2 dt$ *s'appelle le terme complémentaire d'Itô.*

LEMME 11. (L'inégalité L^2-maximale de Doob pour les martingales) *Soit* $M = (M_t)$ *une* L^2 *-martingale continue. On suppose ici que son processus de variation quadratique* $\langle M \rangle_t$ *soit borné. Pour aucun temps d'arrêt* $T = T(\omega)$*, il existent des constantes* C_1*,* C_2 *positives telles que*

$$C_1\mathbb{E}[\langle M \rangle_T] \leqslant \mathbb{E}[\max_{0 \leqslant s \leqslant T} |M_s|^2] \leqslant C_2\mathbb{E}[\langle M \rangle_T]. \tag{19}$$

LEMME 12. (L'inégalité de Gronwall) *Supposons que la fonction continue g (t) remplit l'inégalité suivante.*

$$0 \leqslant g(t) \leqslant \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds, \qquad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{20}$$

où $\beta \geq 0$*, et* $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$ *est intégrable. On a alors*

$$g(t) \leqslant \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds, \qquad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{21}$$

Soient (M_t), resp. (K_t), une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue, resp. un processus continu adapté de variation bornée respectivement. Soit $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$, et supposons ici que des fonctions $\sigma_{ij}(t, x, \omega)$, $b_i(t, x, \omega)$ définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, soient uniformément lipschitziennes par rapport au paramètre x, et soient aussi progressivement mesurables. Selon la technique de localisation pour des temps d'arrêt (ou bien des temps de Markov) [2], [3], et par la méthode de démonstration sur l'existence et l'unicité des solutions pour des équations stochastiques [16], [17] (voir aussi [4–10]), ou peut démontrer l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques réflexives, où leur solutions sont $(\mathcal{F}_t)$- semimartingales qui remplissent la condition suivante :

il existe un processus $k_t \equiv k_t(\omega)$, $(t \geq 0)$ avec variation bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que $X_t \in \bar{\mathcal{O}}$ soit valide pour $t \geq 0$ p.s., et de plus,

$$\begin{cases} X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) dM_s(\omega) + \int_0^t b(s, X_s, \omega) dK_s(\omega) - k_t(\omega) \\ k_t(\omega) = \int_0^t \xi_s(\omega) d|k|_s(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \xi_s \in n(X_s), \end{cases} \tag{22}$$

où la mesure $d|k|_s(\omega)$ qui détermine le processus $k_t(\omega)$ avec variation bornée, celle qui est même pourvue par l'intégrale suivante :

$$|k|_t(\omega) := \int_0^t 1_{(X_s(\omega) \in \partial\mathcal{O})}(s) d\|k\|_s(\omega). \tag{23}$$

Ce résultat est une sorte de généralisation du résultat écrit dans [15] par exemple.

TTHÉORÈME 13. (Le premier résultat principal) *Il existe une unique* $(\mathcal{F}_t)$*-semimartingale* (X_t)*,* $t \geq 0$*, qui satisfait* (22)

COROLAIRE 14. (Le second résultat principal) *Le problème sur l'équation différentielle stochastique réflexive (22) est équivalent au fait que pour p.s.* $\omega \in \Omega$, $X_\cdot(\omega)$ *est le premier constituant de la solution* $(X_\cdot(\omega), k_\cdot(\omega))$ *pour le problème de Skorokhod*

$$\left(x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) dM_s(\omega) + \int_0^t b(s, X_s, \omega) dK_s(\omega), \mathcal{O}, n(\cdot) \right).$$

THÉORÈME 15. (Le troisième résultat principal) *La paire de processus* (X_t, k_t) *donnés par* (22) *et* (23) *est une solution pour le problème de Skorokhod*

$$\left(x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) dM_s(\omega) + \int_0^t b(s, X_s, \omega) dK_s(\omega), \mathcal{O}, n(\cdot) \right).$$

3. Sommaire de preuve

Tout d'abord, nous commençons à construire un propre espace fonctionnel $\mathcal{H}$. On va définir $\mathcal{H}$ comme l'espace des processus stochastiques continus et adaptés par rapport à $(\mathcal{F}_t)$, tels que

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s|^4] < \infty, \qquad \forall t > 0. \tag{24}$$

De plus, nous définissons les semi-normes $\|\cdot\|_t$ par

$$\|X\|_t := \mathbb{E}[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s|^4]^{1/4}, \qquad \text{pour} \qquad t \geq 0. \tag{25}$$

Il en suit donc que cet $\mathcal{H}$ devienne un espace de Fréchet dans l'analyse fonctionelle. Ensuite nous allons définir une application

$$F : \mathcal{H} \ni X = (X_t) \mapsto Y = (Y_t) \in \mathcal{H},$$

où on a alors

$$Y_t = F(X_t) = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dM_s + \int_0^t b(s, X_s) dK_s - k_t. \tag{26}$$

LEMME 16. *Pour aucune fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors*

$$\begin{aligned} \phi(Y_t) = \phi(x_0) &+ \int_0^t \nabla\phi(Y_{s-}) \cdot \sigma(s, X_s) dM_s + \int_0^t \nabla\phi(Y_{s-}) \cdot b(s, X_s) dK_s \\ &- \int_0^t \nabla\phi(Y_{s-}) \cdot \xi_s d|k|_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla^2\phi(Y_{s-})(\sigma(s, X_s)\, {}^t\sigma(s, X_s)) d\langle M, M\rangle_s. \end{aligned} \tag{27}$$

Démonstrarion. Il nous faut un formule généralisé du type Itô (cf. voir lemme 10) afin de prouver ce lemme.

LEMME 17. (Le formule d'Itô pour les semimartingales ; cf. Théorème 4.57, p.57 de [18]) *Soit $X = (X_t)$ une $(\mathcal{F}_t)$-semimartingale à dimension d, et soit f une fonction de la classe $C^2(\mathbb{R}^d)$. En ce cas F(X) devient une semimartingale encore et on a alors*

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_{t-}) \cdot X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leqslant d} D_{ij} f(X_{t-}) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle_t \\ &+ \sum_{s \leqslant t} \left\{ f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_{s-}) \Delta X_s^i \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Quand on possède un processus du type à l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$dY_t = \sigma(t, X_t) dM_t + b(t, X_t) dK_t - dk_t$$

avec $dk_t = \xi_t d|k|_t$, nous pouvons appliquer alors le formule d'Itô (lemme 17) afin d'obtenir le terme suivant : grossièrement parlons, nous avons

$$d\phi(Y_t) = \nabla\phi(Y_{t-}) \cdot dY_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leqslant d} D_{ij}\phi(Y_{t-}) \cdot d\langle Z, Z\rangle_t,$$

en posant $Z_t = \int_0^t \sigma(s, X_s) dM_s$ pour son terme de martingale à la simplicité des notations près. Plus précisément, quand on posera ici $Y_t = Y_0 + \tilde{M}_t + A_t$, où nous avons

$$\tilde{M}_t(\omega) = \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) dM_s(\omega)$$

comme une martingale continue étant l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à martingale, et

$$A_t(\omega) = \int_0^t b(s, X_s, \omega) dK_s(\omega) - \int_0^t \xi_s(\omega) d|k|_s(\omega)$$

comme un terme de processus prévisible, il n'est pas alors difficile à dériver

$$
\begin{aligned}
\phi(Y_t) &= \phi(Y_0) + \sum_{i\leqslant d} D_i\phi(Y_{t-})\cdot Y_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d} D_{ij}\phi(Y_{t-})\cdot\langle Y^{i,c}, Y^{j,c}\rangle_t \\
&= \phi(x_0) + \sum_{i\leqslant d} D_i\phi(Y_{t-})\cdot Y_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d} D_{ij}\phi(Y_{t-})\cdot\langle \tilde{M}^i, \tilde{M}^j\rangle_t \\
&= \phi(x_0) + \nabla\phi(Y_{t-})\cdot Y_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(Y_{t-})\cdot\langle \tilde{M}^i, \tilde{M}^j\rangle_t,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que

$$
\begin{aligned}
d\phi(Y_t) = \nabla\phi(Y_{t-})\cdot\sigma(t,X_t)dM_t + \nabla\phi(Y_{t-})\cdot b(t,X_t)dK_t - \nabla\phi(Y_{t-})\cdot\xi_t d|k|_t \\
+\frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(Y_{t-})\cdot(\sigma(t,X_t)\,{}^t\sigma(t,X_t))d\langle M,M\rangle_t
\end{aligned}
$$

avec le processus de variation quadratique $\langle M\rangle_t \equiv \langle M,M\rangle_t$ pour une martingale, parce qu'on obtient naturellement

$$
\langle M,A\rangle_t = 0 \qquad \text{pour} \qquad t>0.
$$

Donc il en dcoule que comme son expression intégrale

$$
\begin{aligned}
\phi(Y_t) = \phi(x_0) + \int_0^t \nabla\phi(Y_{s-})\cdot\sigma(s,X_s)dM_s + \int_0^t \nabla\phi(Y_{s-})\cdot b(s,X_s)dK_s \\
-\int_0^t \nabla\phi(Y_{s-})\cdot\xi_s d|k|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^2\phi(Y_{s-})\cdot(\sigma(s,X_s)\,{}^t\sigma(s,X_s))d\langle M,M\rangle_s.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Ce qui termine la preuve.

Noter ici que l'on obtient

$$
|Y_t - Y_t'|\cdot|X_t - X_t'| \leqslant \frac{1}{2}|Y_t - Y_t'|^2 + \frac{1}{2}|X_t - X_t'|^2, \tag{30}
$$

parce que nous avons l'inégalité triviale $ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ pour toutes $a,b>0$.

Lemme 18. *Pour une certaine constante $C>0$, tout $T\geq 0$, et tous $X,X'\in\mathcal{H}$, on admet l'estimation suivante* :

$$
\|F(X)-F(X')\|_T^4 \leqslant C\int_0^T \|X-X'\|_s^4 ds. \tag{31}
$$

Démonstration. Nous poserons ici $Y=F(X)$ et $Y'=F(X')$ pour tout $X,X'\in\mathcal{H}$. Donc, le terme $\phi(Y_t')$ (pour $\phi\in C_b^2$) peut posséder la même expression comme (27) en Lemme 16. Une application du formule d'Itô (lemme 17) au terme

$$
|Y_t - Y_t'|^2\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(\phi(Y_t)+\phi(Y_t'))\right\}
$$

avec une constante $\alpha>0$ entraîne immédiatement que

$$
(Y_t - Y_t')\cdot\xi_t \geq \frac{1}{\alpha}(\nabla\phi(Y_t)\cdot\xi_t)|Y_t - Y_t'|^2, \qquad d|k|_s(\omega) \quad \text{p.s.}
$$

et aussi que

$$(Y_t - Y_t') \cdot \xi_t' \geq \frac{1}{\alpha}(\nabla\phi(Y_t') \cdot \xi_t')|Y_t - Y_t'|^2, \qquad d|k'|_s(\omega) \quad \text{p.s.}$$

En vertu de l'inégalité de Doob (lemme 11), on déduit facilement qu'il existent des constantes positives

$$C_i \equiv C_i(C_0, \alpha, \mathcal{O}, \sigma, b, \phi) > 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, 3,$$

telles que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{s\leqslant t} |Y_s - Y_s'|^4] \leqslant C_1 \int_0^t \mathbb{E}|X_s - X_s'|^4 ds + C_2 \int_0^t \mathbb{E}|Y_s - Y_s'|^4 ds \\ + C_3 \int_0^t \mathbb{E}[|Y_s - Y_s'|^2 |X_s - X_s'|^2] ds. \end{aligned} \tag{32}$$

Maintenant on va utiliser l'inégalité facile (30), et nous obtenons alors

$$\mathbb{E}[\sup_{s\leqslant t} |Y_s - Y_s'|^4] \leqslant C_4 \int_0^t \mathbb{E}[\sup_{u\leqslant s} |X_u - X_u'|^4] du \tag{33}$$

où une constante C_4 positive dépend seulement de $C_0, \alpha, \mathcal{O}, \sigma, b,$ et ϕ, parce que nous avons employé l'inégalité de Gronwall (lemme 12). Ce qui donne le résultat désiré. □

Quand on définit

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = x_0, \\ X_t^{(n)} := F(X_t^{(n-1)}) = x_0 + \displaystyle\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dM_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) dK_s - k_t, \end{cases} \tag{34}$$

alors il est facile à voir par (31) du lemme 18 qu'il existe une constante positive $K \equiv K(x_0, T, C)$ telle que

$$\|F(X^{(n)}) - F(X^{(n-1)})\|_T^4 \leqslant \frac{K(x_0, T, C)^n}{n!}. \tag{35}$$

Il est le train-train habituel à entrainer l'existence de la solution en le théorème du point fixé, lorsqu'on obtient l'estimation (35) ci-dessus une fois. En employant le théorème du point fixé, la compacité de l'espace de Fréchet $\mathcal{H}$ par rapport aux semi-normes $\|\cdot\|_t$ entraîne que le point fixé pour l'application F existe dans $\mathcal{H}$, ce qui garantit l'existence de la solution pour (22). Donc, il en suit presque automatiquement que l'unuicité du point fixé dans $\mathcal{H}$ soit valable, ce qui est équivalent au fait que l'unicité de la solution pour (22) est valide. Puisque l'ensemble $\mathcal{O}$ est borné, toutes les solutions $X_t(\omega)$ pour (22) appartiennet à l'espace $\mathcal{H}$. Ce qui signifie le théorème principal dans cet article.

Remerciments

Ce travail est soutenu en partie par les frais de recherche scientifique : MEXT Grant-in-Aids SR(C) 24540114, ceux qui ont été distribués par le Ministère de l'éducation, de la Culture, des Sports, de la Recherche et de la Technologie au Japon. Ce travail est aussi soutenu en partie par les frais de recherche coopérative: ISM Coop. Res. Program: 2011-CRP-5010.

References

1 . A.N. Borodin : *Sluchajnye Prozessy*. Izdatelistvo Lani, Moscou, 2013. (en russe)

2 . N. El Karoui : Processus de réflexion dans R^n. Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics, Vol.465 (1975; Springer), 534–554.

3 . C. Doléans-Dade et P.A. Meyer : Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics, Vol.581 (1977; Springer), 376–382.

4 . I. Dôku : Sur le problème du principe de moyenne pour une équation stochastique du type parabolique. J. SUFE Math. Nat. Sci. **28** (1) (1989), 7–17.

5 . I. Dôku : Compacité étroite des lois relative à la densité de processus suggerée par un problème de martingale. J. SUFE Math. Nat. Sci. **51** (2) (2002), 1–15.

6 . I. Dôku : Un théorème limite de système des particules aléatoires et processus de branchement à valeurs dans mesures. J. SUFE Math. Nat. Sci. **56** (1) (2007), 307–321.

7 . I. Dôku : Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. J. SUFE Math. Nat. Sci. **58** (1) (2009), 209–218.

8 . I. Dôku : A limit theorem of homogeneous superprocesses with spatially dependent parameters. Far East J. Math. Sci. **38** (2010), 1–38.

9 . I. Dôku : Des exemples de solutions stochastiques et une classe de processus markoviens indexés par un arbre. J. SUFE Math. Nat. Sci. **59** (2) (2010), 1–16.

10. I. Dôku : *Limit Theorems for Superprocesses*. LAP Schalt. Lange, Berlin, 2014.

11. I. Dôku : Star-product functional and unbiased estimator of solutions to nonlinear integral equations. Far East J. Math. Sci. **89** (1) (2014), 69–128.

12. L. Gallardo : *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Hermann, Paris, 2008.

13. J.-F. Le Gall : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Mathématiques et Applications, Vol.71, Springer, Heidelberg, 2013.

14. G. Letta : *Martingales et Intégration Stochastique*. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1984.

15. P.L. Lions et A.S. Sznitman : Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 511–537.

16. A. Rozkosz et L. Slominski : On stability and existence of solutions of SDEs with reflection at the boundary. Stochastic Process. Appl. **68** (1997), 285–302.

17. D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan : Diffusion processes with boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 147–225.

18. J. Jacod et A.N. Shiryaev : *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin, 1987.

Isamu Dôku

Départment de Mathématiques

Faculté d'Education, Université de Saïtama

Saïtama, 338-8570 Japon

e-mail : idoku@mail.saitama-u.ac.jp

(Received September 22, 2014)

(Accepted October 10, 2014)