氏　　　　　名	髙野　耕太
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第1088号
学位授与年月日	平成30年3月23日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当
学 位 論 文 題 目	A geometric representation of the generalized mean curvature （一般化された平均曲率ベクトルの積分平均極限を用いた幾何学的表示）
論 文 審 査 委 員	委員長　教　　授　長澤　壯之 委　員　准 教 授　町原　秀二 委　員　准 教 授　佐藤　洋平 委　員　准 教 授　Richard Neal Bez 委　員　教　　授　長瀬　正義 委　員　東京工業大学理学院 教授 利根川吉廣

論文の内容の要旨

Schwartzの超関数論のように分布的な考え方を用いて、Euclid空間内の可微分部分多様体を測度によって一般化した概念としてvarifoldがある。Varifoldには面積的な情報の第一変分が定義され、第一変分が良い性質を持つときには内積によって第一変分を実現するベクトル場が存在する。古典的な可微分部分多様体の場合にはそのベクトル場は平均曲率ベクトル場と一致することから、そのベクトル場はvarifoldに対する一般化された平均曲率ベクトルと呼ばれる。

1978年、W. K. Allardによって、varifoldに一般化された平均曲率ベクトルが存在するとき、そのvarifoldに面積比の単調性や等周不等式が成り立ち、また一般化された平均曲率ベクトルが十分な正則性を有するときvarifoldが正則性を有することが示された。このことから、varifoldに対して定義される一般化された平均曲率ベクトルは、varifoldの幾何学的な情報を有していると考えることができる。以上の事実と古典的な平均曲率の定義を元に、一般化された平均曲率ベクトルは、各点周辺においてvarifoldの曲率的な曲がり方を反映していて「第一変分を用いずに」一般化された平均曲率ベクトルの表示が可能であると予想できる。

P. Strzelecki と H. v. d. Mosel は斥力ポテンシャルエネルギーに関する正則性の議論（2013）において、tangent point radiusの逆数を用いた。Tangent point radiusの逆数は、外接円を用いて離散化した平均曲率と考えることができ、また同概念はスカラー値からベクトル値への一般化が容易であるという特徴を有している。これは平均曲率「ベクトル」の離散化と捉える事ができ、またこの離散化に必要な正則性は古典的な平均曲率ベクトルの定義に必要な正則性よりも弱い。

本論文は、varifoldに対して定義される一般化された平均曲率ベクトルを、ベクトル値化したtangent point radiusの逆数の積分平均の極限を用いた表示の可能性に関して議論するものであり、特にvarifoldが、W. K. Allardによって示された正則性に沿った表示を有するとき、表示が可能であることを示した。証明の本質は、varifoldが上記の正則性を有するとき、正則性を保ったまま都合のよい表示に取り換えることができ、また計算の際に生じる極形式に関しても表示を用いた精密化が可能であることが本質である。

$\mathrm{G}(n,k)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間からなる多様体とし, $\mathrm{G}(n,k)$ の元は同部分空間への直交射影を表す記号とする. また k 次元 varifold V に対して, $\Theta^k(\|V\|,a)$ を $\|V\|$ の a における k 次元密度, $\mathrm{Tan}^k(\|V\|,a)$ を $\|V\|$ の a における k 次元概接空間とする. この時, 本論文の主定理は次で与えられる.

定理　$\alpha > 1/3$ とする. $\mathbb{R}^n$ の k 次元 *varifold* V, $T \in \mathrm{G}(n,k)$, $a \in T$ は, ある $C_1 > 0$, $\delta > 0$, 連続微分可能な写像 $f : T \to T^\perp$, $F : T \to \mathbb{R}^n$ が存在して, $\|\delta V\|$ は $\|V\|$ に関して $\mathrm{U}(a,\delta)$ 上絶対連続であり, 任意の $x \in T \cap \mathrm{U}(a,\delta)$ に対して

$$\mathrm{Im}F \cap \mathrm{U}(a,\delta) = \mathrm{spt}\,\|V\| \cap \mathrm{U}(a,\delta)\,,$$

$$T(F(x)) = x,\quad T^\perp(F(x)) = f(x),\ \|\nabla f(x) - \nabla f(a)\| \le C_1|x-a|^\alpha$$

を満たすとする. また,

$$0 < \Theta^k(\|V\|,a) < \infty,\ a \text{ は } \mathrm{h}(V,\cdot), \Theta^k(\|V\|,\cdot) \text{ の } \|V\| \text{ に関する } \mathit{Lebesgue}\text{点}$$

であり, 任意の $R > 0$, $\|V\|$ に関して殆ど至る所の $x \in \mathrm{U}(a,R)$ に対して

$$\left|\Theta^k(\|V\|,x) - \Theta^k(\|V\|,a)\right| \le C_1 R^{1-\alpha}$$

をみたすとする. このとき, 任意の $v \in \mathrm{Tan}^k(\|V\|,a)^\perp$ に対して

$$\frac{1}{k}\mathrm{h}(V,a)\cdot v = \lim_{R\downarrow 0} \frac{2}{\|V\|\mathrm{U}(a,R)} \int_{\mathrm{U}(a,R)} \frac{\mathrm{Tan}^k(\|V\|,a)^\perp(x-a)\cdot v}{|x-a|^2}\, d\|V\|(x)$$

が成り立つ.

同表示はW. K. Allardによる平均曲率の一般化の際に困難であった具体例の構成および計算を容易にするものであり、本論文内では実際に古典的には定義できないが同表示により定義できる具体例を述べている。

また、ベクトル値化したtangent point radiusの逆数の積分平均の極限を用いた表示は、varifoldのEuclid空間上の測度としての情報と、その測度の概接空間の情報のみが用いられているため、varifoldよりも一般の対象に対する平均曲率の一般化を可能にしている。

論文の審査結果の要旨

解析学や幾何学において測度論的なアプローチは近年重要なものとなっており、その中でも幾何学的測度論（Geometric Measure Theory）は特に変分問題において強力かつ精緻な手法となっている。髙野氏の研究は、幾何学的測度論に現れる varifold の一般化された平均曲率に関するものである。

Varifold とは、変分（variation）と多様体（manifold）から作られた造語である。適当な邦語訳がないため、varifold、またはヴァリフォールドとそのまま呼ばれている。概念的には、粗く言えば、可微分多様体を測度論を用いて一般化したものである。可微分多様体は、点の情報とその点における接平面の情報を有する。接平面の変動の具合が「曲がり具合」であり、それを記述する「曲率」が定義される。平均曲率は多様体の面積の変分公式に現れる。すなわち、接平面に垂直な方向に摂動した際の面積の変化率に平均曲率が反映する。

「面積」が定義されるために、すなわち、求積可能性（rectifiability）には、可微分である事は必ずしも必要でない。Varifold には、求積性を有し、一般化された接平面の概念（概接平面 approximate tangent space）が定義される。概接平面は線型空間であるので Grassmann 多様対の元である。Euclid と Grassmann 多様体の積空間上の Radon 測度が varifold である。その測度により、「一般化された面積」が定義され、その第一変分として定義されたものが「一般化された平均曲率」である。Varifold が C^2 級の多様体であれば一般化された平均曲率は通常の平均曲率と一致する。

平均曲率を一般化する試みは他にもある。例えば、曲線に対する Menger 曲率である。これは、曲線上の 3 点を通る円の半径の逆数として定義されるものである。即ち、古典的には 2 階微分で表される曲率を離散的に表したものである。離散版であるので C^2 級である必要はない。Menger 曲率は曲面に対しても定義され、近年 Menger 曲率の可積分性と曲面の正則性との関連が調べられている（Strzelecki-von der Mosel、Geom. Anal. **23** (2013)）。これは Allard (Ann. of Math. **95** (1978)) や Kasai-Tonegawa (Carc. Var. Partial Differential Equations **50** (2014)) が示した一般化された平均曲率と varifold の正則性との関係に類似する。髙野氏は、その類似性より、Menger 曲率の考えを varifold に導入するという発想を得、一般化された平均曲率の変分に依らない表示を得た。

主定理はおよそ次のように述べられる（詳細な仮定の記述は省略する）。対象となる varifold は、n 次元 Euclid 空間内の m 次元 varifold とし、一般された平均曲率が定義されているとする。また、m 次元 Hausdorff 測度に関する密度は局所有限で、ある程度の連続性を有するものとする。また、考察点は一般化された平均曲率と密度について varifold の重みに関する Lebesgue 点であるとする。Varifold の台はその点の近傍でグラフ表示されているとする。グラフを表す関数は Allard の正則定理の主張程度の Hölder 連続性を持つとする。このとき、Menger 曲率の逆数をベクトル化したものを考察点近傍で積分平均し、近傍を縮退された際の極限として一般化された平均曲率が得られるというものである。Varifold が C^2 級の曲面であれば古典的な平均曲率と一致する。C^2 級の滑らかさがない場合の計算例も論文では取り上げている。

一般化された平均曲率は、varifold の第一変分を計算する事で定義される。すなわち、第一変分をベクトル場上で定義される線型汎関数と考え、Riesz の定理によって積分表現した際の核表現である。従って、陽な表示ではない。髙野氏が得た表示は、Riesz の定理を経ずにそれを直接与えるものであり、既知のものではない。varifold の余次元の制限はないため、その有用性・汎用性が期待できる。また、Menger 曲率の考えを導入する事が鍵であるが、その着想は独創的である。

日本数学会の 2017 年秋季総合分科会で研究成果を公表している。また、国内の複数の研究集会での講演

実績を有している。

当学位論文審査委員会は、提出論文の内容の独自性と結果の有意性を高く評価し、博士（理学）の学位授与の相応しいものと判断した。