数学的な見方・考え方の育成に関する一考察
―中学校数学科における多様な考えとその扱いに焦点を当てて―

A Consideration on Fostering Mathematical Thinking:
Focusing on Students' Diverse Thinking and its Handling in Junior High School

森　田　大　輔*　　　二　宮　裕　之**
Daisuke MORITA　　　Hiro NINOMIYA

【概要】本稿の目的は、中学校数学科における「数学的な見方・考え方」の育成について検討を行うことである。まず、国立教育政策研究所（2016）や「数学的な考え方」に関する先行研究のレビューをすることで、「統合的発展的な考察を通した創造的な学習活動」の重要性を指摘し、このような学習活動の前提として「多様な考え」や「練り上げ」に着目した。そして、教材の具体例として「中学２年：文字式の利用」を示した。加えて、数学的な見方・考え方を育成するにあたって、教師の役割が重要であるということを指摘した。
【キーワード】数学的な見方・考え方、多様な考え、教師の役割

１．はじめに

かねてから、数学学習においては「考える」ことの重要性が主張されてきた（e.g.，中島・大野，1974；和田，1977）。それはいわば「不易」に当たる部分であり、これからも数学教育における目的・目標として「思考・判断・表現力の育成」は外すことができないものであろう。しかしながら、「考える」という言葉の中身、すなわち「何をどう考えるか」という部分は時代によって変わるのではないだろうか。新しい学習指導要領の大きな特徴として、内容ベイスから資質・能力ベイスへ移行しているということが挙げられる。これは、今日求められている資質・能力という視座から、「数学科における思考力の育成」についての再考を求められているということではないだろうか。以上より、本稿では中学校数学科における「数学的な見方・考え方」の育成について検討を行うこととする。そのために、まず国立教育政策研究所（2016）を拠り所として、資質・能力論から捉える思考力について概観する。また、数学教育における「数学的な考え方」に関する先行研究のレビューを行い、その中でも特に「多様な考え」や「練り上げ」に着目する。そして、これらのレビューから今日求められている数学的な見方・考え方を育成するような教材を例示することとする。

２．資質・能力論における思考力

新しい学習指導要領では、資質・能力の育成が重要視されている。資質・能力に関する議論は既に多方面からなされているが、その中でも国立教育政策研究所（2016）が体系的に議論している。本章では、国立教育政策研究所（2016）の主張を概観し、資質・能力論において思考力がどのように位置づいているかを確認する。

国立教育政策研究所（2016）は、資質・能力目標に求められる階層性を踏まえ、「思考力」を中核とし、それを支える「基礎力」と、思考力の使い方を方向付ける「実践力」の三層構造で資質・能力を捉えており、これら３つを構造化し以下の図１のように示した。

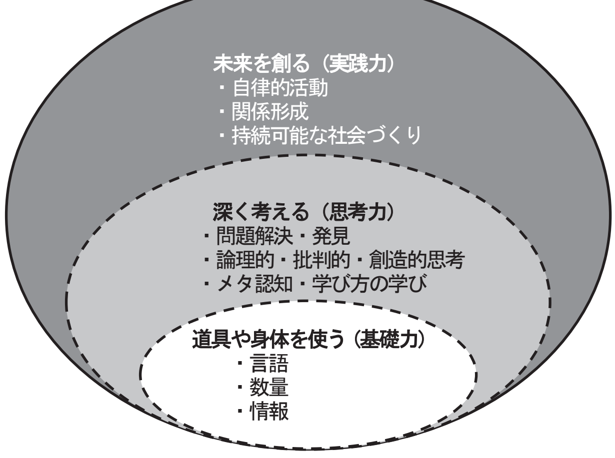


図１　21世紀に求められる資質・能力の構造一例
（国立教育政策研究所，2016，p.191）

ここで示されているように、資質・能力論においても思考力が重要視されていることが伺える。また、図１にもあるように、国立教育政策研究所（2016）は思考力の要素として、「問題解決・発見」、「論理的・批判的・創造的思考」、「メタ認知・学び方の学び」の３つを挙げて

*　東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科院生
**　埼玉大学教育学部自然科学講座（算数・数学分野）

いる。そして、思考力とは、高次な思考を働かせながら、主体的・協働的に問題を解決し、さらに新たな問いを見いだしていく力を意味する（ibid.， p.197）。これら3つの要素はどれも数学教育研究で重要視されているところではあるが、本稿の主題は「考えること」であるため、ここでは「論理的・批判的・創造的思考」を詳細に検討することとする。国立教育政策研究所（2016, pp.200-201）はこれら3つの思考を次のように簡単に定義している。

論理的思考
（具体的事実にせよ、抽象的言明にせよ）何らかの根拠を基に主張や結論を引き出すこと
批判的思考
どのような情報を信じ、どのような行為をとるかを決めるために、きちんと（合理的に）じっくり（反省的に）考えること
創造的思考
これまでとは違った新しい解決案を提案できる考え方のこと

また、これら三者の関係について、国立教育政策研究所（2016, p.202）は「論理的・批判的・創造的思考は、問題解決の様々な過程で多様に働きます。学校現場でも、例えば、問題発見や問題定義は創造的に行い、解決策の立案と実行は論理的に行い、結果の振り返りは批判的に行うなど、様々な組合せの工夫が考えられます。問題解決・発見を豊富に含む学習活動の中で、これらの力が多様な形で自然に引き出され、のばしていくことができればよいでしょう」と述べている。

３．数学的な見方・考え方に関する先行研究のレビュー

（１）学習指導要領における位置づけ

平成32年度から小学校、33年度から中学校において新学習指導要領が全面的に実施される。算数・数学科ではかねてから数学的な考え方が重要視されているが、新学習指導要領ではどのように位置づけられているのだろうか。

指導要領改訂にあたって、内容ベイスから資質・能力ベイスへのカリキュラムの重点のパラダイムシフトが起こった（石井， 2015)。これに伴って、新学習指導要領では、全ての教科等の目標及び内容を「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱で再整理を行った（文部科学省， 2018)。また、新学習指導要領では「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善（アクティブ・ラーニングの視点に立った授業改善）が謳われている。その中でも、深い学びの実現の実現にあたって、文部科学省（2018）は「見方・考え方」を次のように位置づけている。

深い学びの鍵として「見方・考え方」を働かせることが重要になること。各教科等の「見方･考え方」は、「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」というその教科等ならではの物事を捉える視点や考え方である。各教科等を学ぶ本質的な意義の中核をなすものであり、教科等の学習と社会をつなぐものであることから、児童生徒が学習や人生において「見方・考え方」を自在に働かせることができるようにすることにこそ、教師の専門性が発揮されることが求められること。（文部科学省， 2018, p.4）

上記のように新学習指導要領では教科横断的に「見方・考え方」が位置づけられたのに対し、中学校数学科では「「数学的な見方・考え方」については、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」であると考えられる」と述べている（文部科学省， 2018, p.7)。また、数学学習において「数学的な見方・考え方」がどのように機能しているかについて、文部科学省（2018）は次のように述べている。

数学の学習では、「数学的な見方・考え方」を働かせながら、知識及び技能を習得したり、習得した知識及び技能を活用して探求したりすることにより、生きて働く知識となり、技能の習熟・熟達につながるとともに、より広い領域や複雑な事象を基に思考・判断・表現できる力や、自らの学びを振り返って次の学びに向かおうとする力などが育成され、このような学習を通じて、「数学的な見方・考え方」が更に豊かで確かなものになっていくと考えられる。（文部科学省， 2018, p.7）

今回の改訂において、数学科では「統合的・発展的に考えること」が重要視されている（ibid.， p.21)。さらに、今回の改訂では、数学的に考える資質・能力を育成する上で、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動[(1)]を通して学習を展開することが重視されている（ibid.， p.23)。すなわち、数学的な見方･考え方の育成にあたっては、単元や年間の指導計画において意図的・計画的に数学的活動を設定することが重要である。

（２）数学的な考え方に関する先行研究

新学習指導要領において数学的な見方・考え方の育成が重要視されていることが前節で言及したが、こういった潮流は今に始まったことではなく、わが国の数学教育研究においてかねてから数学的な考え方の育成が重要視されてきたという経緯がある。そこで、以下ではわが国の数学教育における数学的な考え方に関する先行研究をレビューする。

まず、片桐（1988a）は「数学の方法」と「数学の内容」という2つの観点から数学的な考え方を捉えており、それぞれ以下のように提案している。

数学の方法に関係した数学的な考え方

1　帰納的な考え方　2　類推的な考え方
3　演繹的な考え方　4　統合的な考え方
5　発展的な考え方
6　抽象化の考え方
—抽象化、具体化、理想化、条件の明確化の考え方—
7　単純化の考え方　8　一般化の考え方
9　特殊化の考え方
10　記号化の考え方
—記号化、数量化、図形化の考え方—

数学の内容に関係した数学的な考え方

I1　構成要素（単位）の大きさや関係に着目する（単位の考え）
I2　表現の基本原理に基づいて考えようとする（表現の考え）
I3　ものや操作の意味を明らかにしたり、広げたり、それに基づいて考えようとする（操作の考え）
I4　操作のしかたを形式化しようとする（アルゴリズムの考え）
I5　ものや操作の方法を大づかみにとらえたり、その結果を用いようとする（概括的把握の考え）
I6　基本的法則や性質に着目する（基本的性質の考え）
I7　何を決めれば何が決まるかということに着目したり、変数間の対応のルールを見つけたり、用いたりしようとする（関数的な考え）
I8　事柄や関係を式に表したり、式をよもうとする（式についての考え）

他方、中島（2015）は「創造的な学習指導」や「統合的発展的な考察」という観点から数学的な考え方について論じている。まず、中島（2015）は数学的な考え方について以下のように述べている。

> 「数学的な考え方」は、一言でいえば、算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることを目指したものである。（中略）どんな価値観のもとに課題をつかみ、どんな方向に探究し改善を図ることが、算数・数学でねらう「創造」であり「発展」であるのかを示す観点が必要である。(中島 , 2015, p.49)

また、上記の観点について中島（2015）は、創造の原動力としての観点として簡潔・明確・統合を、数学の特性として抽象性・論理性・形式性をあげ、図2のように表した。

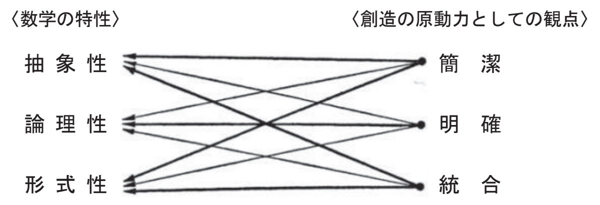


図2　数学の特性と創造の原動力の関連
(中島 , 2015, p.56)

このように中島（2015）は「創造的な学習指導」や「統合的発展的な考察」に焦点を当てているが、これらの重要性が新学習指導要領においても考慮されているとみることができるだろう。

また、資質・能力論における思考力として前章で「論理的・批判的・創造的思考」を取り上げたが、これらは数学教育研究においても近年検討されている。例えば、池田（2017）は陶冶的目的からみた汎用的能力として「論理的思考力、創造的思考力、批判的思考力、反省的思考力」に焦点を当てている。さらに、創造的思考力 (山崎 , 2017)、反省的思考力 (清水 , 2017)、批判的思考力 (服部 , 2017) についてもそれぞれ検討がなされている。これらの研究は、いずれも資質・能力論に端を発したものとみることができる。

４．多様な考え方

数学的な見方・考え方の育成にあたっては、統合的・発展的に考えることが、新学習指導要領ばかりでなく、わが国の数学教育研究においてかねてから重要視されてきた。本稿の主題に迫るため、本章では「考えの多様性」に焦点を当てることとする。現代社会においてはグローバル化が進行し、様々な言語や文化、価値観を持つ人々との交流や共同の機会が増えるなど、他者と交流する際には多様性があるということが一つの前提となっている (国立教育政策研究所 , 2016)。さらに、文部科学省（2018, p.29）は「問題解決の過程を振り返って、評価・改善しようとする態度を育成するためには、協働的な活動を通して、生徒同士の多様な考えを認め合うことも重要である。多様な考えを相互に出し合い認め合うことは、よりよい問題解決を実現するだけでなく、次の機会に向けた新たな発想を引き出すことにつながる」と述べ、数学学習においても重要視されていることが伺える。本章では、数学教育研究において多様性がどのように捉えられてきたかを概観した上で、古藤・新潟算数教育研究会（1990）の「多様な考え方の分類」について整理し、多様な考えを活かす教授活動として練り上げや Orchestrating に言及することとする。

（１）数学教育における多様性の位置づけ

数学教育研究において、かねてから、教え込みに代表されるような教師主導の授業よりも、学習者の考えを基に授業を構成するような生徒を中心とした指導の重要性が主張されてきた (e.g., Feiman-Nemser, 2001; Sherin, 2002)。生徒を中心とした指導を行うにあたって、Stockero (2014, p.239) は生徒のアイデアに対して、注意深く傾聴し (attend to)、その可能性を評価し (assess)、反応することが教師に求められると述べている。

生徒を中心とした指導という考え方は、日本の数学教育でも同様に重要視されてきた。日本では特に、「多様性」をどのように取り扱うかという点に着目してきたものとみることができる。例えば、島田（1995）は「未

完結な問題を課題として、そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展望し、その過程で、既習の知識・技能・考え方をいろいろに組合わせて新しいことを発見していく経験を与えようとする」オープンエンドアプローチを提唱している。正答の多様性を前提としたオープンエンドアプローチに関する研究が1970年代に勧められてきたが、その後に、問題づくり・問題設定といわれるような、正答のみならず問題をつくらせるという学習活動に取り組ませ、問題にも多様性を持たせる指導実践も提唱されるようになった (e.g., ブラウン・ワルター, 1990; 竹内・沢田, 1984)。そして、これらの研究は古藤怜らの研究グループによる「多様な考えの生かし方まとめ方」に関する研究に収斂されていくこととなる (古藤・新潟算数教育研究会, 1990, 1998)。

このように数学学習において多様性が重要視されてきたが、その理由の一つとして本稿の主題である「数学的な考え方の育成」ということが挙げられる。日本国内では数学的な考え方に関する研究が盛んになされてきた (e.g., 片桐, 1988a, 1988b; 中島, 2015)。二宮ら (2016) は日本の数学教育を歴史的観点から考察をしており、かねてから数学的な考え方の育成が重要視されてきたという背景を受けて、その育成のために「オープンエンドアプローチ」や「多様な考えの生かし方まとめ方」に関する研究がなされてきたことを指摘している。そして、二宮ら (2016, p.281) は日本の算数教師の価値観について、「子どもの数学的な考え方や多様な考えを活かして、子どもが主体的・発展的に算数を創っていく授業を展開することが、授業づくりにおける日本の算数教師の中心的な考え方であり、日本の多くの算数教師が共有している価値観である」と指摘している。このような点からも、日本の数学教育でも、教師主導の授業よりも児童・生徒を中心とした指導が重要視されてきたということが見てとれる。

(2) 多様な考え方の分類

古藤・新潟算数教育研究会 (1990) は多様性が重視される理由を、数学の本質、個性の尊重、学習意欲の振興、練り合いの場の構成という4つの観点から多様性が重視される理由を述べた上で、多様な考えに対して「それらの考えに対してどのような比較検討をさせるかを明確にしておくことが大切であろう」(p.43) と述べ、多様な考えを以下の4つに分類した (pp.43-44)。

Ⅰ. 独立的な多様性

“多様な考えが、数学的なアイデアとして妥当であり、かつそれぞれが互いに独立したアイデアである場合”

話し合いでは、それぞれの数学的なアイデアのよさや着眼点のよさをわかり合わせることが大切であり、妥当性の検討に重点がおかれる。

Ⅱ. 序列化可能な多様性

“多様な考えが、数学的にみていちばんよい考え、次によい考え……というように、それぞれのアイデアを効率性という見地から序列化することができる場合”

話し合いでは、それぞれのアイデアの長所や短所について比較検討させることが大切であり、有効性の検討に重点がおかれる。

Ⅲ. 統合化可能な多様性

“多様な考えが、方法や結果に着目して1つにまとめられることができる場合”

1つ1つの考えを理解しあった後、分類したり、共通性を見い出したり、または新しい観点を導入したりするなど、有効性・関連性の検討に重点がおかれる。

Ⅳ. 構造化可能な多様性

“多様な考えが、ある観点からいくつかのグループにまとめることができ、さらにそれぞれのグループの間に関連性が認められ、全体として1つの体系にまとめられる場合”

共通性の発見や新しい観点を導入することによって、グループ分けしたり、相互の関連を明らかにしたりするなど関連性の検討に重点がおかれる。

古藤・新潟算数教育研究会 (1990) の多様性の分類を、中島 (2015) や文部科学省 (2018) のいう統合的・発展的に考えることと照らして考えると、生徒から出された多様な考えを統合するという教授活動がまず考えられる。その際、独立的な多様性が生徒から出されるような学習課題では、統合的・発展的に考えることは困難であろう。それに対して、統合化可能な多様性や構造化可能な多様性が生徒から出される学習課題であるならば、教師と生徒、あるいは生徒同士の相互作用を経て、それぞれのアイデアが比較検討されることだろう。このように捉えると、「統合的・発展的に考える」学習活動を実現するためには、学習課題が重要であるといえる。また、授業者の立場に立つと、学習課題の設定や多様性の捉え方が重要視されるべきであるということもできる。そして、予めどのような考えが出るかを予測した上で、実際に子どもから出されたアイデアに対して柔軟に対応しながらも、統合発展という観点から生徒のアイデアをまとめる必要がある。

(3) 多様な考えの練り上げ

① 練り上げ

練り上げとは、授業中になされるクラス全体での議論の動的・協働的な本性を指し示す用語であり、生徒のアイデアを洗練させたり統合された数学的アイデアを発展させたりする過程を指すメタファーとして機能するものである (Shimizu, 1999, p.110)。練り上げの場においては、机間指導で生徒の活動を観察し、特定の順序で生徒を指名し、それぞれの考えを黒板で発表

させる。発表された子どもの考えは比較・検討される。そこでの教師の役割は、優れた解決法を指摘することではなく、統合されたアイデアに対する議論に導くことである (ibid., p.110)。

また、古藤・新潟算数教育研究会 (1990) は、問題解決の過程を「問題をとらえる→自力解決する→比較検討する→適用・発展させる」という四段階を設定し、その中でも比較検討する場面での指導の難しさを指摘している。そして、比較検討する段階をさらに「妥当性の検討（理解の場）」、「有効性・関連性の検討（比較の場）」、「解決方法の選択（選択の場）」という３つのステップに分けて行うことを提案している。妥当性の検討では「自力解決した１つ１つの考えについて、それが論理的に筋道立っているかどうかを検討する。もし、考えが論理的に矛盾していたり、結論の導き方が間違っていたりすると、その考えはその場で修正される」、有効性・関連性の検討では「論理的に筋道立っていることが確かめられた考え、あるいは検討による修正された考えを比較し、「簡潔さ」「発展性」等の観点から、その考えのよさや不十分さを指摘したり、互いに考えの関連を検討したりする」、そして、解決方法の選択では「それまでに検討したことを参考にしたり、提示された問題を解いたりして、もっともよいと思う考えを自分なりに選択する」という学習活動がそれぞれ展開される (ibid., pp.37-39)。

② 数学授業における Orchestrating

練り上げに類似した概念として、ここでは Orchestrating について概観する。Smith & Stein (2011) は、数学的理解を深めるという目的の下、生徒の反応を授業に生かすための方略として Orchestrating を提唱し、以下の５つの活動を提案した (p.8)。

1. 数学の課題に対して、起こりそうな生徒の反応を予測する
2. (生徒がペアや小集団で課題に取り組んでいる際の) 課題に対する生徒の実際の反応を観察する
3. 授業全体の議論で発表する生徒を選ぶ
4. 生徒の反応を、特定の順序に配列する
5. 異なる生徒の反応をつなぎ、それらを主要な数学的アイデアに結びつける

この5つの活動について、Smith & Stein (2011) は「熟達的な即興である」(p.7) とし、「教師は計画をすることによって、予想される生徒の反応の予測、それに対する反応への準備、そして生徒の発表をいかに構造化すべきなのかについての意思決定ができるようになる」(ibid., p.7) と計画の重要性を強調している。さらに、「授業の計画・実施に当たって、授業の目的を詳細にしておくことは重要な第一歩である。事実、目標設定は５つの活動を構成する上での基礎となることが示唆されることから、授業の目標決定は「０番目の活動」とすべきだということを、共同研究をしている何人かの先生と議論している」と述べ、目標設定が５つの活動に先行して行われる「０番目の活動」と位置づけられている (ibid., p.13)。このように、Orchestrating においては５つの活動もさることながら、授業の目標設定が重要であるとされている。それは、古藤・新潟算数教育研究会 (1990) のいう「比較検討する段階」でも同じことが言えるであろう。特に、どの多様性を引き出そうとするかによって、授業の様相は大きく変わるであろう。その意味においては、多様な考えを引き出すことと授業の目標設定は密接に関連している。

５．多様な考えを引き出す教材

最後に、多様な考えを引き出す教材として、中学２年次で学習する「文字式の利用」を例に論じていくこととする。特に、「連続する整数の和」を題材に、多様な考えを引き出し、統合的・発展的に考える学習活動について考察を行う。

まず、生徒に連続する３つの整数を言ってもらい、それらの和を板書する (例、$5+6+7=18$)。そのようなやりとりをしばらくするうちに、「和が３の倍数になっている」と発言する生徒が出てくる。それに対し、教師は「いつでも３の倍数になるといえるのか」と発問し、文字式で説明することの必要性を強調し、原題として「３つの続いた自然数の和は３の倍数になります。このわけを文字を使って説明しなさい。」と板書し、文字式による説明を考えさせる。文字式による説明の例は以下の通りである。

> ３つの続いた自然数のうち、もっとも小さい自然数を n とすると、３つの続いた自然数は
>
> $n,\ n+1,\ n+2$
>
> と表される。したがって、それらの和は
>
> $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$
>
> $n+1$ は自然数だから、$3(n+1)$ は３の倍数である。したがって、３つの続いた自然数の和は、３の倍数になる。

文字式による説明をクラス全体で共有した後、$3(n+1)$ の部分に着目させ、(真ん中の数) ×３となっていることに気づかせる。そして、真ん中の数を n としたときの説明についても考えさせた。

多くの教科書はこの題材を扱っているものの、教科書ではここまでしか扱われていない。しかしながら、これはブラウン・ワルター (1990) の What if not の手法を用いることで、統合的・発展的に考えることが可能になると考える。説明について一応の解決をした後、「<u>3つ</u>の<u>続いた</u><u>自然数</u>の<u>和</u>は３の倍数になります。」と原題に下線を引き、「下線を引いた部分を自分で変えて、新たな法則をみつけなさい。さらに本当にそれが成り立つかを文字式を使って説明しなさい」と発問をした。多くの生徒は「３つ」という部分を４つや５つと変えていたが、中には「続いた」という部分を１つ飛ばし・２つ飛ばしに、「自然数」を整数や奇数・偶数に、「和」の部分を積にする生徒もいた。

そして、練り上げではなるべく多くの生徒の考えを取り上げるようにした。その中でも、多くの生徒が数の個数を変えていたので、その部分をクラス全体で共有し、文字式による説明を行わせるようにした。文字式による説明を全体で共有することによって、次のように生徒の考えがまとめられた。

3つの場合→3の倍数（3n +3=3(n+1)）
4つの場合→2の倍数（4n +6=2(2n+3)）
5つの場合→5の倍数（5n +10=5(n+2)）
6つの場合→3の倍数（6n +15=3(2n+5)）

この時、クラスの実態によっては数字を増やすだけでなく、「1つの場合」や「2つの場合」と数字を減らして特殊の場合を考えるという学習活動を取り入れるということも考えられる。これらを見比べて、生徒は「数字の個数が奇数個の時はその個数倍になって、偶数個の場合は個数÷2の倍数になることが分かる」という結論を得る。しかしながら、教師側から「奇数の時と偶数の時とで違う言い方になってしまっている。1つにまとめることはできないか」とさらに問いかける。そうすると、生徒から「例えば、4つの場合のとき、文字式で計算すると4n +6となるけど、これを4で割ってみよう」という発言があった。そうして、4n+6=4(n+1.5)、6n+15=6(n+2.5)と計算させていく中で、括弧の中の数字に着目し、それが「真ん中の数」であることに気づく生徒が出てきた。これらの検討を通して、最終的にクラス全体で「(真ん中の数) × (数字の個数)」と、より洗練されたアイデアにすることができた。この関係は「続いた」という部分を1つ飛ばし・2つ飛ばしに変えても同様にいえる部分である。生徒の実態に応じて扱うことは十分可能であろう。

上記の実践は、教科書で扱われている教材をWhat if notによって、さらに生徒に深く考えさせることを意図したものである。「3つの続いた自然数の和」が3の倍数になると統合した上で、What if notを用いて生徒に多様な考えを出すように求めることで発展的に考えさせることを意図した。さらに、出てきた考えをさらに高次に統合し、より一般的な表現をさせることができる教材である。また、この教材では、多様な考えを引き出すことが、統合的・発展的に考えるうえで重要な役割を果たしている。このように、多様な考えを引き出し、統合的・発展的に考えることで、創造的な学習活動が展開されるのである。

このような学習活動を展開するにあたって、生徒が学習活動に従事できるようにするためには、教師が教材についてより深く検討する力量を備えている必要があるだろう。山崎（2017）は創造的思考力の育成において「数学的活動を通した指導のできる教員を養成すること」の必要性を述べている。往々にして、人は自分が教わったように教えるものであろうが、教員養成の段階から数学的活動を十分に体験し、教材に対する見方をより深くすることが求められている。

6．おわりに：教師教育研究からの示唆

本稿では、数学的な見方・考え方の育成について、先行研究を整理した上で、今日求められている「数学的な見方・考え方」の育成を図った教材の一例として、「文字式の利用」を取り上げた。そこでは、「統合的発展的な考察を通した創造的な学習活動」が重要視されており、そのような学習活動の実現のために、学習課題や目標の設定が重要であることを指摘した。新学習指導要領における数学的な見方・考え方は、中島（2015）の論に依拠しており、「創造的な学習指導」や「統合的発展的な考察」を生徒に行わせるような教材の工夫が今後ますます求められるところである。

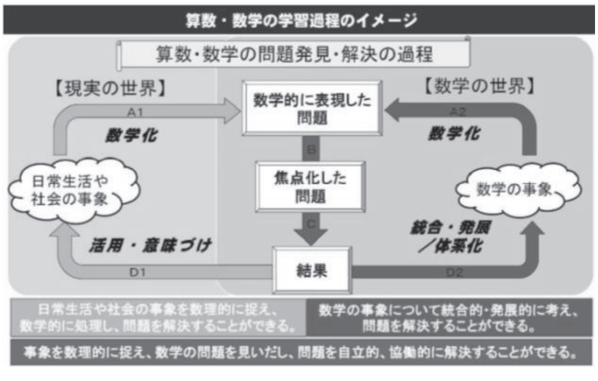
さて、本稿ではしばしば教師の役割に言及してきた。数学的な見方・考え方の育成を主眼においたとき、教師の位置づけや役割は重要なものとなるだろう。結びに代えて、数学教師教育研究から得られる示唆について言及したい。数学的な考え方を育成することを意図したときには、多様性が重要視されるべきだということを確認したが、その際に問題になるのは、「重要な数学的なアイデアが生起した際に、教師はそれに気づく[(2)]ことができるかどうか」という問題である。熟達した（skilled）教師や教師教育者は授業中に、重要な数学的瞬間を認識することができるとともに、生徒の学習を支援する多様な方法でその瞬間を機能させることができるのに対し、専門職である教師の中には（特に初任者（novices））、その瞬間を見逃したりうまく機能させたりすることができないということが指摘されている（e.g., Leatham et al., 2015; Stockero & Van Zoest, 2013）。ここでいう「重要な数学的瞬間」はどのようなものを指すのだろうか。ここでは「中核的な指導の瞬間（Pivotal Teaching Moments: PTMs）」や「生徒の思考を構築するための数学的に意義のある教育的機会（Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking: MOSTs）」について触れる。Stockero & Van Zoest（2013）はPTMsを「授業中の出来事によって、生徒の数学的な理解を拡張・変容させるために教師が指導の修正を行った場面」（p.127）と定義し、「生徒の数学的な考え方を構成する指導の鍵である」（p.125）として重要視している。また、Leatham et al.（2015）はMOSTsを「生徒の思考、意義ある数学、教育的機会の三者が出くわした（occur at the intersection）授業の一例」と定義している。

PTMsやMOSTsの定義にもあるように、PTMsやMOSTsのような「重要な数学的瞬間」には学習者の数学的な考え方が中核に据えられている。また、経験の浅い教師はこの瞬間にしばしば気付くことができないということも指摘されている。さらに気づくことができたとしても、その瞬間をどううまく機能させるかという点にも困難があることが指摘されている。重要な数学的瞬間を機能させる場面の一例として、練り上げやOrchestrating

といった、学級全体で数学的な考え方を共有する活動が挙げられる。このような、各自の考えを比較検討する場面では、「子供から出される質問や意見を適切に処理できず、いわゆる這い回る状態になってしまう」か「出された考えが生かされず、いつの間にか教師の意図にあった考えだけが“いい考え”として取り上げられる結果になってしまう」といった困難性が指摘されている (古藤・新潟算数教育研究会 , 1990, p.34)。この困難さが故に、「「子どもがつまずくこと」や「多様な考えをまとめきれない」などの不安から、問題提示の後すぐに解決方法を示唆したり、課題やまとめを教師主導で提示しがち」である「「問題解決の授業」に踏み切れない教師」の存在も指摘されている (早勢 , 2013)。Leatham et al. (2015) や Stockero & Van Zoest (2013) の言葉を借りれば、「重要な数学的瞬間に気づき、うまく機能させることのできる教員の養成」についてさらに検討することが今後の課題である。

【注】

(1) 数学的活動とは、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」である (文部科学省 , 2018, p.23)。また、中央教育審議会 (2016) は数学的活動における問題発見・解決の過程には、「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現･処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」と、「数学の事象から問題を見いだし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察する過程」の 2 つを挙げ、以下のように図式化した。



(2) 「気づき」に関する研究として、数学教師の Noticing についての研究が著名である。Jacobs et al. (2010) は専門的な Noticing として、(a) 子どもの方略に対する傾聴 (attending to)、(b) 子どもの理解の解釈、(c) 子どもの理解に対してどのように対応するかを決定する、という 3 つの段階を提起している。

【謝辞】

本研究は、JSPS 科研費 (No. 16K01010) の助成を受けて行われています。

【引用・参考文献】

ブラウン , S. I. , & ワルター , M. I. (1990). 平林一栄 (監訳). いかにして問題をつくるか―問題設定の技術―. 東洋館出版社 .

中央教育審議会 (2016, December 21). 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について (答申) (中教審第 197 号) . Retrieved from http://www.mext.go.jp/b_menu/s hingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731.htm

Feiman-Nemser, S. (2001). From preparation to practice: Designing a continuum to strengthen and sustain teaching. *Teachers College Record,* 103(6), 1013-1055.

服部裕一郎 (2017). 数学教育における批判的思考力の育成とその課題 . 日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集 , 269-276.

早勢裕明 (2013). 「問題解決の授業」に踏み切れない教師の不安についての一考察―小学校における算数の授業研究を通して―. 北海道教育大学紀要 (教育科学編), 64(1), 97-109.

池田敏和 (2017). 陶冶的目的からみた数学教育における汎用的能力の育成とその課題―課題研究の意図と論理的思考力について―. 日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集 , 251-254.

石井英真 (2015). 今求められる学力と学びとは―コンピテンシー・ベースのカリキュラムの光と影―. 日本標準 .

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 41(2), 169-202.

片桐重男 (1988a). 数学的な考え方・態度とその指導 1 数学的な考え方の具体化 . 明治図書 .

片桐重男 (1988b). 数学的な考え方・態度とその指導 2 問題解決過程と発問分析 . 明治図書 .

国立教育政策研究所 (編)(2016). 国研ライブラリー 資質・能力［理論編］. 東洋館出版社 .

古藤怜・新潟算数教育研究会 (1990). 算数科 多様な考えの生かし方まとめ方 . 東洋館出版社 .

古藤怜・新潟算数教育研究会 (1998). コミュニケーションで創る新しい算数学習―多様な考えの生かし方まとめ方―. 東洋館出版社 .

Leatham, K. R., Peterson, B. E., Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2015). Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 46(1), 88-124.

文部科学省 (2018). 中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編 . 日本文教出版 .
中島健三 (2015). 復刻版 算数・数学教育と数学的な考え方―その進展のための考察―. 東洋観出版社 .
中島健三・大野清四郎 (編著) (1974). 現代教科教育学大系 第 4 巻 数学と思考 . 第一法規 .
二宮裕之・馬場卓也・植田敦三・日野圭子 (2016). わが国の数学教育における「価値観」に関する反省的記述 . 日本数学教育学会 第 4 回春期研究大会論文集 , 279-286.
Sherin,M.G.(2002).When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction,* 20(2), 119-150.
島田茂 (編著)(1995). ［新訂］算数・数学科のオープンエンドアプローチ―授業改善への新しい提案―. 東洋館出版社 .
清水紀宏 (2017). 数学教育における反省的思考力の育成 . 日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集 , 255-260.
Shimizu,Y.(1999).Aspects of mathematics teacher education in japan: Focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 2(1), 107-116.
Smith,M.S.,& Stein,M.K.(2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
Stockero,S.L.(2014).Transitions in Prospective Mathematics Teacher Noticing. In J.-J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (eds.) *Research Trends in Mathematics Teacher Education*(pp.239-259). Switzerland: Springer.
Stockero,S.L.,& Van Zoest,L.R.(2013).Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice.*Journal of Mathematics Teacher Education,* 16 (2), 125-147.
竹内芳男・沢田利夫 (編著)(1984). 問題から問題へ―問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善―. 東洋館出版社 .
和田義信 (編著)(1977). 教育学研究全集 第 13 巻 考えることの教育 . 第一法規 .
山崎浩二 (2017). 陶冶的目的からみた創造的思考力の育成 . 日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集 , 261-268.