

接触 Riemann 多様体におけるエルミート Tanno 接続
と Bochner 型の曲率テンソルについて

2018 年 9 月

埼玉大学大学院理工学研究科 (博士後期課程)
理工学専攻数学コース (主指導教員 長瀬正義)

佐々木大輔

目次

1	序論	2
2	準備	4
2.1	接触 Riemann 多様体	4
2.2	可積分性と Tanno テンソル	5
2.3	接触 Riemann 多様体に付随する接続について	8
3	エルミート Tanno 接続	13
3.1	曲率テンソル, 擬エルミート Ricci 曲率, 擬エルミートスカラー曲率	13
3.2	ユニタリ枠を用いた表示	15
4	CR 共形変換	21
4.1	定義	21
4.2	エルミート Tanno 接続の CR 共形変換	22
5	エルミート Tanno 接続を用いた Bochner 型の曲率テンソル	31
5.1	$B(\nabla)^0$ の構成	31
5.2	その他の CR 共形不変なテンソルについて	34
6	付録	39
6.1	エルミート Tanno 接続と Levi-Civita 接続との関係	39
6.2	Levi-Civita 接続の CR 共形変換	40
	参考文献	46

1 序論

本論文では、接触 Riemann 多様体において、CR 共形不変な Bochner 型の新しいテンソルをエルミート Tanno 接続を用いて構成し底流にあるアイデアを詳細に解説する。この結果は Nagase 氏との共同研究 (Nagase-Sasaki [6]) の一部である。

本研究で扱う接触 Riemann 多様体には一般に可積分性を課さない。そうした多様体の研究においてどのような線形接続を道具として選ぶかは重要であり、本研究では Nagase 氏の導入したエルミート Tanno 接続を採用している。この接続を援用して Kohn-Rossi ラプラシアンや Fefferman 空間に関する様々な結果が Nagase 氏によって得られており (Nagase [3], [4], [5], [7], [8], [9]), 本研究はそうした研究の一環として進められたものである。

Klein のエルランゲンプログラムに従うと、固有な変換に関して不変なものを見出すことは重要な研究テーマである。上述のように本研究では接触 Riemann 多様体の持つ固有な変換である CR 共形変換に着目する。[6] において、我々はエルミート Tanno 接続を用いて CR 共形不変な新しいテンソルを幾つか構成した。そのうちの 1 つ $B(\nabla)^0$ は

$$\begin{aligned} B(\nabla)^0(X, \bar{Y})Z &= F(\nabla)(X, \bar{Y})Z - \frac{1}{n+2} \left\{ \text{Ric}^\nabla(Z, \bar{Y})X + \text{Ric}^\nabla(X, \bar{Y})Z \right. \\ &\quad \left. - g(Z, \bar{Y}) \text{ric}^\nabla(X) - g(X, \bar{Y}) \text{ric}^\nabla(Z) \right\} \\ &\quad + \frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)} \left\{ g(Z, \bar{Y})X + g(X, \bar{Y})Z \right\} \end{aligned}$$

と定義される。ここで、 $X, Y, Z \in H_+$ であり、 ∇ はエルミート Tanno 接続、 $F(\nabla)$ をその曲率テンソル、 Ric^∇ を擬エルミート Ricci 曲率、 s^∇ を擬エルミートスカラー曲率としているが、これらについては第 2 章、第 3 章で説明する。この曲率テンソルについて次が分かる。

主定理 (定理 5.1)

$B(\nabla)^0$ は CR 共形変換において不変なテンソルである。

この主定理を証明するためには、エルミート Tanno 接続、その曲率テンソル、特に、擬エルミート Ricci 曲率、擬エルミートスカラー曲率等の CR 共形変換を計算す

る必要がある．最終的に第 5 章においてこの定理を証明するが，このテンソルの構成のアイデアはその証明を観察することにより明らかとなる．

続いて本論文の構成を簡単に述べておく．2 章では，本論文全体の準備として，接触 Riemann 多様体の定義や可積分性について詳しく説明し，付随する接続をいくつか紹介する．3 章では我々の注目しているエルミート Tanno 接続について詳しくまとめる．さらに，その曲率テンソルや擬エルミート Ricci 曲率，擬エルミートスカラー曲率について詳しく解説し，それらのユニタリ枠を用いた表示を与える．4 章においては，まず CR 共形変換の定義等を述べ，続いてその変換によってエルミート Tanno 接続やそれに付随する様々な曲率テンソルがどのように変換されるか纏めて記述する．5 章が本論文の中心であり，主定理 (定理 5.1) をこの章において実際に証明する．6 章では付録としてエルミート Tanno 接続と Levi-Civita 接続の関係について考察し，その結果から，Levi-Civita 接続の CR 共形変換を計算する．また，その結果から CR 共形変換における Weyl の曲率テンソルの変換式について記述する．

最後に，研究室に所属させていただいてから，本論文を書くに至った今日までの長い間，熱心にご指導くださった長瀬正義先生に心から感謝いたします．

2 準備

この章では, まず接触 Riemann 多様体の定義と基本事項を述べる. 次に, 可積分性や付随する接続について詳しく説明する.

2.1 接触 Riemann 多様体

ここでは, Blair-Dragomir[1] と Dragomir-Tomassini[2] を参照して, 接触リーマン多様体に関する基本事項をまとめる.

M を $2n + 1$ 次元 C^∞ 多様体とする. このとき, 1-形式 $\theta \in \Gamma(T^*M)$ が M 上で $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ を満たすとき, 接触形式という. この θ を付随させた (M, θ) を接触多様体という. θ について以下の命題が成り立つ.

命題 2.1 次の条件を満たす $\xi \in \Gamma(TM)$ が一意に存在する: $\theta(\xi) = 1, \iota_\xi d\theta = 0$ である. ただし, $\iota_\xi d\theta(X) = d\theta(\xi, X)$ とおいている.

このベクトル場 ξ を Reeb ベクトル場という. ここで, TM において $\mathbb{R}\{\xi\}$ は 1 次元部分束であり, $\ker \theta := \{X \in TM | \theta(X) = 0\}$ は $2n$ 次元部分束である. TM はこれらによって,

$$(2.1) \quad TM = \mathbb{R}\{\xi\} \oplus \ker \theta$$

と直和分解される.

命題 2.2 $X, Y \in \ker \theta$ について, 次の条件を満たす Riemann 計量 g と $(1, 1)$ -テンソル場 J が存在する:

$$(2.2) \quad g(X, JY) = -d\theta(X, Y), \quad g(X, \xi) = 0, \quad g(\xi, \xi) = 1,$$

$$(2.3) \quad J(JX) = -X, \quad J\xi = 0$$

である. ただし, $d\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y])$ とおいている.

そのような g, J は, 必然的に

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad (X, Y \in \ker \theta)$$

を満たしていることに注意せよ。このことは

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= -d\theta(JX, Y) = d\theta(Y, JX), \\ g(X, Y) &= g(Y, X) = g(Y, -J(JX)) = -d\theta(Y, -JX) = d\theta(Y, JX) \end{aligned}$$

であることから分かる。

これら g, J を接触多様体 (M, θ) に付随させた (M, θ, g, J) を接触 Riemann 多様体という。また, $H_{\pm} = \{X \in TM \otimes \mathbb{C} \mid JX = \pm iX\}$ において,

$$(2.4) \quad [\Gamma(H_+), \Gamma(H_+)] \subset \Gamma(H_+)$$

が成り立つとき, J が可積分であるという。(2.4) は $[\Gamma(H_-), \Gamma(H_-)] \subset \Gamma(H_-)$ と同値である。 J が可積分であるとき, (M, θ, g, J) を可積分接触 Riemann 多様体と呼ぶ。 (M, θ, g, J) を研究する上で J が可積分かどうか重要である。

なお, (2.1) より $TM \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\{\xi\} \oplus H_+ \oplus H_-$ (余接束については $T^*M \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\{\theta\} \oplus H_+^* \oplus H_-^*$ である) であり, この上の局所ユニタリ枠

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \xi_{\bullet} &= (\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{\bar{1}}, \dots, \xi_{\bar{n}}) \\ (\xi_{\bar{\alpha}} &:= \overline{\xi_{\alpha}} \in H_-, g(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) = \delta_{\alpha\beta}, 1 \leq \alpha, \beta \leq n) \end{aligned}$$

とその双対枠 $\theta^{\bullet} = (\theta^0 = \theta, \theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\bar{1}}, \dots, \theta^{\bar{n}})$ を用いて, 接続やテンソルなどの値を計算する。ユニタリ枠を使うことで, 様々な計算結果が単純明快になり, 本論文のテーマでもある Bochner 型の曲率テンソルを見い出すことが出来た。また,

$$(2.6) \quad e_0 = \xi, e_{\alpha} = \frac{\xi_{\alpha} + \xi_{\bar{\alpha}}}{\sqrt{2}}, e_{\alpha+n} = \frac{\xi_{\bar{\alpha}} - \xi_{\alpha}}{\sqrt{2}i}$$

によって定義される $(e_0, e_1, \dots, e_{2n})$ は g の正規直交枠であり, 本論文の正規直交枠はこれを用いる。最後に, 添え字については $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \{1, \dots, n\}, A, B, C, \dots \in \{0, 1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n}\}$ としていることに注意せよ。

2.2 可積分性と Tanno テンソル

ここでは, J の可積分性について詳しくまとめる。

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

によって定義される $[J, J]$ を J の Nijenhuis テンソルという。このとき, 次が言える。

命題 2.3 (2.4) と, $[J, J](X, Y) = 0$ ($X, Y \in \ker \theta$) であることは同値である.

証明. $Z, W \in H_+$ について,

$$\begin{aligned} [J, J](Z, W) &= [iZ, iW] - [Z, W] - J[iZ, W] - J[Z, iW] \\ &= -2([Z, W] + iJ[Z, W]), \\ [J, J](Z, \bar{W}) &= [iZ, -i\bar{W}] - [Z, \bar{W}] - J[iZ, \bar{W}] - J[Z, -i\bar{W}] = 0 \end{aligned}$$

である. (2.4) が成り立つとき,

$$\begin{aligned} [J, J](Z, W) &= -2([Z, W] + i(i[Z, W])) \\ &= -2([Z, W] - [Z, W]) = 0 \end{aligned}$$

であるから, $\ker \theta \otimes \mathbb{C} = H_+ \oplus H_-$ 上で $[J, J] = 0$ である. 逆に, $\ker \theta \otimes \mathbb{C}$ 上で $[J, J] = 0$ であるとき,

$$0 = [J, J](Z, W) = -2([Z, W] + iJ[Z, W])$$

であるから,

$$[Z, W] = -iJ[Z, W]$$

が成り立つ. $\theta([Z, W]) = -d\theta(Z, W) = ig(Z, W) = 0$ より, $[Z, W] \in \ker \theta \otimes \mathbb{C}$ である. 従って, $J^2[Z, W] = -[Z, W]$ が成り立つ. よって,

$$J[Z, W] = -iJ^2[Z, W] = i[Z, W]$$

であることから, $[Z, W] \in H_+$ であり (2.4) が成り立つ. ■

J の可積分性は, Tanno 氏の導入した Tanno テンソルによって次のように特徴づけることもできる:

∇^g を g に関する Levi-Civita 接続とし,

$$(2.7) \quad \mathcal{Q}(Y, X) = (\nabla_X^g J)(Y) + (\nabla_X^g \theta)(JY)\xi + \theta(Y) J\nabla_X^g \xi$$

によって定義される \mathcal{Q} を Tanno テンソルという. このとき次が言える.

命題 2.4 (Tanno [12]) J が可積分であることと, $\mathcal{Q} = 0$ は同値である.

証明. まず, $Q = 0$ のとき, J が可積分であることを示そう. $X, Z, W \in H_+$ について, (2.7) より,

$$\begin{aligned} Q(Z, W) - Q(W, Z) &= (\nabla_Z^g J)(W) + (\nabla_Z^g \theta)(JW)\xi - (\nabla_W^g J)(Z) - (\nabla_W^g \theta)(JZ)\xi \\ &= i\nabla_Z^g W - J\nabla_W^g Z - i\theta(\nabla_W^g Z)\xi - i\nabla_W^g Z + J\nabla_Z^g W + i\theta(\nabla_Z^g W)\xi \\ &= i\left([Z, W] - iJ[Z, W] + i\theta([Z, W])\xi\right) \\ &= i\left([Z, W] - iJ[Z, W]\right) = -\frac{i}{2}[J, J](Z, W) \end{aligned}$$

であり, $[J, J](Z, W) = 2i(Q(Z, W) - Q(W, Z))$ が成り立つ. よって, $Q = 0$ のとき, $[J, J](Z, W) = 0$ である. よって, 命題 2.3 により, J は可積分であることが言える. 次に, J が可積分であるとき, $Q = 0$ を示そう. $[J, J](Z, W) = 2i(Q(Z, W) - Q(W, Z))$ と Q の性質 (命題 2.5) から

$$\begin{aligned} (2.8) \quad &g([J, J](W, Z), X) + g([J, J](Z, X), W) - g([J, J](X, W), Z) \\ &= 4ig(Q(W, Z), X) \end{aligned}$$

が成り立つ. J が可積分であるとき, 命題 2.3 により $[J, J] = 0$ である. よって, (2.8) より $g(Q(W, Z), X) = 0$ が示せた. ■

J の可積分性はこのように Tanno テンソル Q の消滅によって特徴づけられる. 可積分性を課さない接触 Riemann 多様体に注目している本論文において, このテンソルは頻繁に現れる. 以下その持つ性質をいくつか紹介しておく.

命題 2.5 (Tanno [12])

$$\begin{aligned} g(Q(X, Y), Z) + g(X, Q(Z, Y)) &= 0, \\ g(Q(X, Y), Z) + g(Q(Y, Z), X) + g(Q(Z, X), Y) &= 0, \\ Q(\xi, \cdot) = Q(\cdot, \xi) &= 0, \\ Q(H_+, H_-) = Q(H_-, H_+) &= 0, \\ Q(\cdot, H_+) \in H_-, \quad Q(\cdot, H_-) \in H_+ \end{aligned}$$

である.

テンソル Q はユニタリ枠 (2.5) を用いて次のように書き表せることが命題 2.5 より分かる.

系 2.6 \mathcal{Q} に関して

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q} &= \xi_\alpha \otimes \theta^{\bar{\beta}} \otimes \theta^{\bar{\gamma}} \cdot \mathcal{Q}_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha + \xi_{\bar{\alpha}} \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma \cdot \mathcal{Q}_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}}, \\ \overline{\mathcal{Q}_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}}} &= \mathcal{Q}_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha = -\mathcal{Q}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\beta, \quad \mathcal{Q}_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha + \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^\beta + \mathcal{Q}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^\gamma = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし, $\mathcal{Q}_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha = g(Q(\xi_{\bar{\beta}}, \xi_{\bar{\gamma}}), \xi_{\bar{\alpha}})$ とおいている。

2.3 接触 Riemann 多様体に付随する接続について

ここでは接触 Riemann 多様体に付随する接続をいくつか紹介する。可積分接触 Riemann 多様体 (M, θ, g, J) において, 以下の命題が成り立つ。

命題 2.7 (cf. Dragomir-Tomassini [2]) 次を満たす線形接続 ∇^{TW} が一意に存在する:

$$\begin{aligned} \nabla^{TW} \theta &= 0, \quad \nabla^{TW} g = 0, \quad \nabla^{TW} J = 0, \\ T(\nabla^{TW})(Z, W) &= 0, \quad T(\nabla^{TW})(Z, \bar{W}) = ig(Z, \bar{W})\xi \quad (Z, W \in H_+), \\ \tau^{TW} \circ J + J \circ \tau^{TW} &= 0 \end{aligned}$$

である。ただし, $T(\nabla^{TW})$ を ∇^{TW} の捩率テンソル, $\tau^{TW}(X) = T(\nabla^{TW})(\xi, X)$ とおいている。

この ∇^{TW} を Tanaka-Webster 接続と呼ぶ。この接続を用いた可積分ケースの研究は膨大である。

J に可積分性を課さない場合には以下の 2 つの接続が知られている。

命題 2.8 (Tanno [12]) 次を満たす線形接続 $^*\nabla$ が一意に存在する:

$$\begin{aligned} ^*\nabla \theta &= 0, \quad ^*\nabla g = 0, \quad (^*\nabla J)(X, Y) = \mathcal{Q}(Y, X) \quad (X, Y \in TM), \\ T(^*\nabla)(Z, W) &= 0, \quad T(^*\nabla)(Z, \bar{W}) = ig(Z, \bar{W})\xi \quad (Z, W \in H_+), \\ \tau^* \circ J + J \circ \tau^* &= 0 \end{aligned}$$

である。ただし, $T(^*\nabla)$ を $^*\nabla$ の捩率テンソル, $\tau^*(X) = T(^*\nabla)(\xi, X)$ とおいている。

この $^*\nabla$ を Tanno 接続という。

命題 2.9 (Nagase [3]) 次を満たす線形接続 ∇ が一意に存在する:

$$\begin{aligned}
 \nabla\theta &= 0, \quad \nabla g = 0, \quad \nabla J = 0, \\
 (2.10) \quad T(\nabla)(Z, W) &= \frac{1}{4}[J, J](Z, W), \quad T(\nabla)(Z, \overline{W}) = ig(Z, \overline{W})\xi \quad (Z, W \in H_+), \\
 \tau \circ J + J \circ \tau &= 0
 \end{aligned}$$

である. ただし, $T(\nabla)$ を ∇ の振率テンソル, $\tau(X) = T(\nabla)(\xi, X)$ とおいている.

この ∇ をエルミート Tanno 接続という. これは Nagase 氏によって導入され, Tanno 接続を用いた場合よりも議論を単純化することが知られている. この命題については証明を与えておこう. 以下 J には可積分性を課していないことに注意せよ.

命題 2.9 の証明. まず (2.10) をみたす接続 ∇ が存在することを示そう. 命題 2.8 より Tanno 接続 $^*\nabla$ が一意に存在する. そこで, ∇ を

$$(2.11) \quad \nabla_X Y := \begin{cases} \frac{1}{2} \left(^*\nabla_X Y - J(^*\nabla_X JY) \right) & (Y \in \ker \theta), \\ ^*\nabla_X(f\xi) & (Y = f\xi) \end{cases}$$

と定義する. これが ∇ が線形接続であることは明らかである. この ∇ が命題 2.9 の条件を満たすことを示そう. まず, $\nabla\theta = 0$ を示す.

$$(\nabla_X \theta)(Y) = \nabla_X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y)$$

である. $Y \in \ker \theta$ のとき, (2.11) より $\nabla_X Y = \frac{1}{2}(^*\nabla_X Y - J(^*\nabla_X JY))$ である. $\theta \circ J = 0$, 命題 2.8 より $^*\nabla\theta = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X \theta)(Y) &= -\theta\left(\frac{1}{2}(^*\nabla_X Y - J(^*\nabla_X JY))\right) \\
 &= -\frac{1}{2}\theta(^*\nabla_X Y) = \frac{1}{2}(^*\nabla_X \theta)(Y) = 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ. $Y = f\xi$ のとき, (2.11) より $\nabla_X f\xi = ^*\nabla_X f\xi$ である. よって,

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X \theta)(f\xi) &= \nabla_X(\theta(f\xi)) - \theta(^*\nabla_X f\xi) \\
 &= \nabla_X(f) - \theta\left((^*\nabla_X(f))\xi + f^*\nabla_X \xi\right) \\
 &= X(f) - X(f) = 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ ($^*\nabla_X \xi = 0$ であることに注意せよ). 以上より $\nabla\theta = 0$ である. 次に, $\nabla J = 0$ を示そう. $Y \in \ker \theta$ のとき,

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X JY - J(\nabla_X Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(*\nabla_X JY - J(*\nabla_X J^2 Y)) - \frac{1}{2}\{J(*\nabla_X Y) - J^2(*\nabla_X JY)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(*\nabla_X JY + J(*\nabla_X Y)) - J(*\nabla_X Y - *\nabla_X JY)\} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。また, $Y = f\xi$ のとき,

$$(\nabla_X J)(f\xi) = \nabla_X J(f\xi) - J(\nabla_X f\xi) = -J(*\nabla_X f\xi) = -J(X(f)\xi) = 0$$

である。以上より $\nabla J = 0$ が示せた。次に $\nabla g = 0$ を示そう。 $X, Y, Z \in TM$ について

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

が成り立つ。 $Y \in \ker \theta$ のとき, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}(*\nabla_X Y - J(*\nabla_X JY))$ である。 $g(X, Y) = g(JX, JY)$, $*\nabla g = 0$ を用いると

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X g)(Y, Z) \\
&= X(g(Y, Z)) - \frac{1}{2}\left(g(*\nabla_X Y, Z) - g(J(*\nabla_X JY, Z) \right. \\
&\quad \left. + g(Y, *\nabla_X Z)) - g(Y, J(*\nabla_X JZ))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2X(g(Y, Z)) - g(*\nabla_X Y, Z) - g(Y, *\nabla_X Z) \right. \\
&\quad \left. - g(*\nabla_X JY, JZ) - g(JY, *\nabla_X JZ)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((*\nabla_X g)(Y, Z) + (*\nabla_X g)(JY, JZ)\right) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。 $Y = f\xi$ のとき, $\nabla_X(f\xi) = *\nabla_X(f\xi)$ だから

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X g)(f\xi, Z) = X(g(f\xi, Z)) - g(*\nabla_X f\xi, Z) - g(f\xi, *\nabla_X Z) \\
&= X(f\theta(Z)) - X(f)\theta(Z) - f(X(\theta(Z))) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ ($g(\xi, *\nabla_X Z) = X(g(\xi, Z)) - g(*\nabla_X \xi, Z) = X(\theta(Z))$ であることに注意せよ)。以上より, $\nabla g = 0$ が示せた。次に, $T(\nabla)$ について示そう。まず, $T(\nabla)(Z, W)$ を計算しよう。

$$T(\nabla)(Z, W) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W]$$

である。また,

$$\nabla_Z W = \frac{*\nabla_Z W - iJ(*\nabla_Z W)}{2} = (*\nabla_Z W)_+$$

である。よって,

$$\begin{aligned} T(\nabla)(Z, W) &= (*\nabla_Z W)_+ - (*\nabla_W Z)_+ - [Z, W] \\ &= (T(*\nabla)(Z, W) + [Z, W])_+ - [Z, W] = -([Z, W])_- \end{aligned}$$

である。また, $[J, J](Z, W) = -2([Z, W] + iJ[Z, W]) = -4([Z, W])_-$ である。よって, $T(\nabla)(Z, W) = \frac{1}{4}[J, J](Z, W)$ であることが示せた。次に, $T(\nabla)(Z, \bar{W})$ を計算しよう。

$$T(\nabla)(Z, \bar{W}) = \nabla_Z \bar{W} - \nabla_{\bar{W}} Z - [Z, \bar{W}]$$

であり,

$$\begin{aligned} \nabla_Z \bar{W} &= \frac{*\nabla_Z \bar{W} + iJ(*\nabla_Z \bar{W})}{2} = (*\nabla_Z \bar{W})_- = ([Z, \bar{W}])_-, \\ \nabla_{\bar{W}} Z &= \frac{*\nabla_{\bar{W}} Z - iJ(*\nabla_{\bar{W}} Z)}{2} = (*\nabla_{\bar{W}} Z)_+ = ([\bar{W}, Z])_+ = -([Z, \bar{W}])_+ \end{aligned}$$

である。 $[Z, \bar{W}] = ([Z, \bar{W}])_+ + ([Z, \bar{W}])_- + \theta([Z, \bar{W}])\xi$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} T(\nabla)(Z, \bar{W}) &= ([Z, \bar{W}])_- + ([Z, \bar{W}])_+ - [Z, \bar{W}] \\ &= -\theta([Z, \bar{W}])\xi = d\theta(Z, \bar{W})\xi = ig(Z, \bar{W})\xi \end{aligned}$$

が成り立つ。最後に, $(\tau \circ J + J \circ \tau)(X) = 0$ を示そう。 $X = \xi$ のとき, $\tau(\xi) = T(\nabla)(\xi, \xi) = 0$ である。また, $J\xi = 0$ である。よって, $(\tau \circ J + J \circ \tau)(\xi) = 0$ が成り立つ。 $X \in \ker \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} \tau(X) &= T(\nabla)(\xi, X) = \nabla_\xi X - \nabla_X \xi - [\xi, X] \\ &= \nabla_\xi X - [\xi, X] = \nabla_\xi X - *\nabla_\xi X + \tau^*(X) \end{aligned}$$

である $(\tau^*(X) = T(*\nabla)(\xi, X) = *\nabla_\xi X - [\xi, X])$ であることに注意。 (2.11) より

$$\begin{aligned} \nabla_\xi X &= \frac{1}{2}(*\nabla_\xi X - J(*\nabla_\xi JX)) = \frac{1}{2}(*\nabla_\xi X - J^2(*\nabla_\xi X)) \\ &= \frac{1}{2}(*\nabla_\xi X + *\nabla_\xi X) = *\nabla_\xi X \end{aligned}$$

である。よって, $\tau(X) = \tau^*(X)$ である。ここで, 命題 2.8 より $\tau^* \circ J + J \circ \tau^* = 0$ であるから $\tau \circ J + J \circ \tau = 0$ が成り立つ。以上で ∇ は (2.10) を満たすことが示せた。次に, ∇ の一意性を示そう。 (2.11) より,

$$\nabla_Z W = \frac{*\nabla_Z W - iJ(*\nabla_Z W)}{2} = (*\nabla_Z W)_+ \in H_+$$

である。同様にして、

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{Z}}W &= \frac{{}^*\nabla_{\bar{Z}}W - iJ({}^*\nabla_{\bar{Z}}W)}{2} = ({}^*\nabla_{\bar{Z}}W)_+ \in H_+, \\ \nabla_{\xi}W &= \frac{1}{2}({}^*\nabla_{\xi}W - iJ({}^*\nabla_{\xi}W)) = ({}^*\nabla_{\xi}W)_+ \in H_+, \\ \nabla_Z\xi &= \frac{{}^*\nabla_Z\xi - J({}^*\nabla_ZJ\xi)}{2} = 0\end{aligned}$$

である。ただし、 $\ker \theta \otimes \mathbb{C} \ni X = \frac{X - iJX}{2} + \frac{X + iJX}{2} := X_+ + X_-$ であることに注意せよ。また、 $X, Y \in TM \otimes \mathbb{C}$ について、 $\overline{\nabla_X Y} = \nabla_{\bar{X}} \bar{Y}$ であるから、 ∇ は上記の $\nabla_Z W, \nabla_{\bar{Z}} W, \nabla_{\xi} W, \nabla_Z \xi$ で決まる。 ${}^*\nabla$ は一意に存在することから ∇ は一意である。

■

J が可積分のとき、明らかに ${}^*\nabla = \nabla = \nabla^{TW}$ が成り立つ。このことから、Tanno 接続, エルミート Tanno 接続は Tanaka-Webster 接続の可積分性を課さないケースへの拡張と考えられる。

本論文では Tanno 接続ではなく、エルミート Tanno 接続に着目して議論する。このことが本論文の特徴であり、強調しておきたい点である。

3 エルミート Tanno 接続

この章では, 本論文において中心的な役割を果たすこととなるエルミート Tanno 接続 ∇ について詳しく説明し, $B(\nabla)^0$ を構成するために必要なその接続の曲率テンソルや擬エルミート Ricci 曲率, 擬エルミートスカラー曲率についてまとめた.

3.1 曲率テンソル, 擬エルミート Ricci 曲率, 擬エルミートスカラー曲率

∇ の曲率テンソル $F(\nabla)$ は

$$F(\nabla)(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

によって定義され, 以下の性質を持つ.

命題 3.1 (cf. Nagase-Sasaki [6])

$$(3.1) \quad F(\nabla)(X, Y)Z = -F(\nabla)(Y, X)Z,$$

$$(3.2) \quad g(F(\nabla)(X, Y)Z, W) = -g(F(\nabla)(X, Y)W, Z),$$

$$(3.3) \quad F(\nabla)(X, Y)H_+ \in H_+, \quad F(\nabla)(X, Y)H_- \in H_-,$$

$$(3.4) \quad F(\nabla)(X, Y)\xi = 0,$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & g(F(\nabla)(X, Y)Z, W) + g(F(\nabla)(Y, Z)X, W) + g(F(\nabla)(Z, X)Y, W) \\ &= g(JX, Y)g(\tau Z, W) + g(JY, Z)g(\tau X, W) + g(JZ, X)g(\tau Y, W) \\ &+ \frac{1}{2}g((\nabla_X \mathcal{Q})(Z, Y) - (\nabla_Y \mathcal{Q})(Z, X) + \mathcal{Q}(Z, T(\nabla)(X, Y)), JW) \\ &+ \frac{1}{2}g((\nabla_Y \mathcal{Q})(X, Z) - (\nabla_Z \mathcal{Q})(X, Y) + \mathcal{Q}(X, T(\nabla)(Y, Z)), JW) \\ &+ \frac{1}{2}g((\nabla_Z \mathcal{Q})(Y, X) - (\nabla_X \mathcal{Q})(Y, Z) + \mathcal{Q}(Y, T(\nabla)(Z, X)), JW) \\ &- \frac{1}{4}g(\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, Y), X) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, X), Y), W) \\ &- \frac{1}{4}g(\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(X, Z), Y) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(X, Y), Z), W) \\ &- \frac{1}{4}g(\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Y, X), Z) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Y, Z), X), W), \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & g(F(\nabla)(X, Y)Z, W) \\ &= g(F(\nabla)(Z, W)X, Y) + g((LZ \wedge LW)X, Y) - g((LX \wedge LY)Z, W) \\ &- \frac{1}{2}g((\nabla_Z \mathcal{Q})(X, W) - (\nabla_W \mathcal{Q})(X, Z) + \mathcal{Q}(X, T(\nabla)(Z, W)), JY) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}g((\nabla_X \mathcal{Q})(Z, Y) - (\nabla_Y \mathcal{Q})(Z, X) + \mathcal{Q}(Z, T(\nabla)(X, Y)), JW) \\
& + \frac{1}{4}g(\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(X, W), Z) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(X, Z), W), Y) \\
& - \frac{1}{4}g(\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, Y), X) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, X), Y), W)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし, $L = \tau + \frac{1}{2}J$ とおいている。

次に ∇ の定める Ricci 曲率と擬エルミート Ricci 曲率について詳しく述べよう。

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad \text{Ric}(\nabla)(X, Y) &:= \text{tr} \left(Z \mapsto F(\nabla)(Z, Y)X \right) \\
&= \sum g(F(\nabla)(e_j, Y)X, e_j)
\end{aligned}$$

によって定義される $\text{Ric}(\nabla)$ を ∇ の定める Ricci 曲率といい,

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad \text{Ric}^\nabla(X, Y) &:= \text{tr}_{H_+} \left(Z \mapsto F(\nabla)(X, Y)Z \right) \\
&= \sum g(F(\nabla)(X, Y)\xi_\lambda, \xi_{\bar{\lambda}})
\end{aligned}$$

によって定義される Ric^∇ を ∇ の定める擬エルミート Ricci 曲率という。(3.6) より

$$\text{Ric}(\nabla)(X, Y) \neq \text{Ric}(\nabla)(Y, X)$$

であり, Levi-Civita 接続の場合と異なり, $\text{Ric}(\nabla)$ は対称テンソルではない。また, Ric^∇ に関しては定義より

$$\text{Ric}^\nabla(X, Y) = -\text{Ric}^\nabla(Y, X)$$

であり, Ric^∇ は交代テンソルである。なお, (2.6) より

$$\text{Ric}(\nabla)(X, Y) = \sum g(F(\nabla)(\xi_A, Y)X, \xi_{\bar{A}})$$

であることに注意せよ。

∇ に関するスカラー曲率, 擬エルミートスカラー曲率について定義しよう。

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad s(\nabla) &:= \sum \text{Ric}(\nabla)(e_j, e_j) \\
&= \sum \text{Ric}(\nabla)(\xi_A, \xi_{\bar{A}}) = \sum g(F(\nabla)(\xi_A, \xi_{\bar{B}})\xi_B, \xi_{\bar{A}})
\end{aligned}$$

によって定義される $s(\nabla)$ を ∇ の定めるスカラー曲率といい,

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad s^\nabla &:= \sum \text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= \sum g(F(\nabla)(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\beta}})
\end{aligned}$$

によって定義される s^∇ を ∇ の定める擬エルミートスカラー曲率という.

これら擬エルミートなものについて着目することが, $B(\nabla)^0$ を構成する上で重要である.

3.2 ユニタリ枠を用いた表示

エルミート Tanno 接続の接続形式, 曲率形式, 擬エルミート Ricci 曲率, 擬エルミートスカラー曲率を計算しよう.

$$\nabla \xi_B = \xi_A \cdot \omega(\nabla)_B^A$$

と表すとき, $M(2n+1; \mathbb{C})$ 値 1-形式 $\omega(\nabla) := \left(\omega(\nabla)_B^A \right)$ を ∇ の接続形式という. また, $F(\nabla)_B^A = d\omega(\nabla)_B^A + \omega(\nabla)_C^A \wedge \omega(\nabla)_B^C$ とおくと, $M(2n+1; \mathbb{C})$ 値 2-形式 $F(\nabla) := \left(F(\nabla)_B^A \right)$ を ∇ の曲率形式という.

命題 3.2 接続形式については,

$$(3.11) \quad \omega(\nabla) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\alpha, \beta)\text{-成分} & (\alpha, \beta)\text{-成分} & (0, \bar{\beta})\text{-成分} \\ 0 & 0 & \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\overline{\omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}} = \omega(\nabla)_{\beta}^{\alpha}),$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} \omega(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_0) = g([\xi_0, \xi_{\beta}], \xi_{\bar{\alpha}}), & \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\xi_{\gamma}) = g(\xi_{\beta}, [\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}]), \\ \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\xi_{\bar{\gamma}}) = g([\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\beta}], \xi_{\bar{\alpha}}) \end{cases}$$

であり, 曲率形式については,

$$(3.13) \quad F(\nabla) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\alpha, 0)\text{-成分} & F(\nabla)_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & F(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\overline{F(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}} = F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}),$$

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_0, \xi_{\gamma}) = -(\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \tau)_{\beta}^{\bar{\gamma}} - \frac{i}{2} \tau_{\bar{\alpha}}^{\nu} \mathcal{Q}_{\nu\beta}^{\bar{\gamma}}, \\ F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_0, \xi_{\bar{\gamma}}) = (\nabla_{\xi_{\beta}} \tau)_{\alpha}^{\gamma} - \frac{i}{2} \tau_{\beta}^{\bar{\nu}} \mathcal{Q}_{\bar{\nu}\alpha}^{\gamma}, \\ F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}, \xi_{\lambda}) = -i\tau_{\gamma}^{\bar{\beta}} \delta_{\alpha\lambda} + i\tau_{\lambda}^{\bar{\beta}} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i}{2} (\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \mathcal{Q})_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}}, \\ F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}) = i\tau_{\bar{\lambda}}^{\alpha} \delta_{\beta\gamma} - i\tau_{\bar{\gamma}}^{\alpha} \delta_{\beta\lambda} + \frac{i}{2} (\nabla_{\xi_{\beta}} \mathcal{Q})_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^{\lambda}, \\ F(\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) = F(\nabla^g)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \frac{1}{4} \mathcal{Q}_{\mu\gamma}^{\bar{\beta}} \mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\alpha} \\ \quad - \tau_{\gamma}^{\bar{\beta}} \tau_{\bar{\lambda}}^{\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\lambda} \end{array} \right.$$

である。また、振率テンソルについては、

$$(3.15) \quad \begin{aligned} T(\nabla) &= \xi \otimes \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\alpha}} \cdot i + \xi_{\alpha} \otimes \theta \wedge \theta^{\bar{\beta}} \cdot \tau_{\bar{\beta}}^{\alpha} + \xi_{\bar{\alpha}} \otimes \theta \wedge \theta^{\beta} \cdot \tau_{\beta}^{\bar{\alpha}} \\ &\quad + \xi_{\alpha} \otimes \theta^{\bar{\beta}} \otimes \theta^{\bar{\gamma}} \cdot \frac{1}{4} [J, J]_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\alpha} + \xi_{\bar{\alpha}} \otimes \theta^{\beta} \otimes \theta^{\gamma} \cdot \frac{1}{4} [J, J]_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

である。ただし、 $F(\nabla^g)$ は Levi-Civita 接続 ∇^g の曲率テンソルであり、

$$\begin{aligned} (\nabla_X \tau)_{\beta}^{\bar{\gamma}} &= g((\nabla_X \tau) \xi_{\beta}, \xi_{\gamma}), \\ (\nabla_X \mathcal{Q})_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} &= g((\nabla_X \mathcal{Q})(\xi_{\beta}, \xi_{\gamma}), \xi_{\alpha}), \\ [J, J]_{BC}^A &= g([J, J](\xi_B, \xi_C), \xi_A) \end{aligned}$$

とおいている。

この命題を示すために、補題を用意する。

補題 3.3 (cf. Seshadri [11]) 接続形式については、

$$\omega(*\nabla) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (0, \beta)\text{-成分} & (0, \bar{\beta})\text{-成分} & \\ 0 & \omega(*\nabla)_{\beta}^{\alpha} & \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} \\ (\alpha, 0)\text{-成分} & (\alpha, \beta)\text{-成分} & (\alpha, \bar{\beta})\text{-成分} \\ 0 & \omega(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}} & \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \\ (\bar{\alpha}, 0)\text{-成分} & (\bar{\alpha}, \beta)\text{-成分} & (\bar{\alpha}, \bar{\beta})\text{-成分} \end{pmatrix} \quad (\overline{\omega(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}}}} = \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_0) = g([\xi_0, \xi_{\beta}], \xi_{\bar{\alpha}}), \quad \omega(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}) = g(\xi_{\beta}, [\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}]), \\ \omega(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\bar{\gamma}}) = g([\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\beta}], \xi_{\bar{\alpha}}), \quad \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\xi_0) = \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\xi_{\gamma}) = 0, \\ \omega(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\xi_{\bar{\gamma}}) = \frac{i}{2} \mathcal{Q}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\alpha} \end{array} \right.$$

であり, 曲率形式については,

$$F(*\nabla) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (0, \beta)\text{-成分} & (0, \bar{\beta})\text{-成分} & \\ 0 & F(*\nabla)_{\beta}^{\alpha} & F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} \\ (\alpha, 0)\text{-成分} & (\alpha, \beta)\text{-成分} & (\alpha, \bar{\beta})\text{-成分} \\ 0 & F(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}} & F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \\ (\bar{\alpha}, 0)\text{-成分} & (\bar{\alpha}, \beta)\text{-成分} & (\bar{\alpha}, \bar{\beta})\text{-成分} \end{pmatrix} \quad (\overline{F(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}} = F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_0, \xi_{\gamma}) = -(*\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \tau^*)_{\beta}^{\bar{\gamma}} - \frac{i}{2} \tau_{\bar{\alpha}}^{*\nu} \mathcal{Q}_{\nu\beta}^{\bar{\gamma}}, \\ F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\xi_0, \xi_{\bar{\gamma}}) = (*\nabla_{\xi_{\beta}} \tau^*)_{\bar{\alpha}}^{\gamma} - \frac{i}{2} \tau_{\beta}^{*\bar{\nu}} \mathcal{Q}_{\nu\bar{\alpha}}^{\gamma}, \\ F(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}, \xi_{\lambda}) = -i\tau_{\gamma}^{*\bar{\beta}} \delta_{\alpha\lambda} + i\tau_{\lambda}^{*\bar{\beta}} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i}{2} (*\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \mathcal{Q})_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}}, \\ F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}) = i\tau_{\bar{\lambda}}^{*\alpha} \delta_{\beta\gamma} - i\tau_{\bar{\gamma}}^{*\alpha} \delta_{\beta\lambda} + \frac{i}{2} (*\nabla_{\xi_{\beta}} \mathcal{Q})_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^{\lambda}, \\ F(*\nabla)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) = F(\nabla^g)_{\beta}^{\alpha}(\xi_{\bar{\lambda}}, \xi_{\mu}) - \tau_{\gamma}^{*\bar{\beta}} \tau_{\bar{\lambda}}^{*\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\lambda}, \\ F(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\xi_0, \xi_{\gamma}) = -(*\nabla_{\xi_{\alpha}} \tau^*)_{\beta}^{\bar{\gamma}} + (*\nabla_{\xi_{\beta}} \tau^*)_{\alpha}^{\bar{\gamma}}, \\ F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\xi_0, \xi_{\bar{\gamma}}) = \frac{i}{2} \tau_{\bar{\nu}}^{*\gamma} \{ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\bar{\nu}} - \mathcal{Q}_{\beta\alpha}^{\bar{\nu}} \}, \\ F(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\lambda}) = \frac{i}{2} (*\nabla_{\xi_{\lambda}} \mathcal{Q})_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}}, \\ F(*\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}) = \frac{i}{2} (*\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}, \\ F(*\nabla)_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) = \frac{i}{2} (*\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} \end{array} \right.$$

である.

命題 3.2 の証明. (3.11) は, $\nabla J = 0$, $\nabla \xi = 0$, $\nabla g = 0$ より明らかである. (3.12) は, 簡単な計算によって示せる. 続いて, (3.15) は, (2.10) より

$$T(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}) = \frac{1}{4} [J, J](\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}), \quad T(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) = 2i\delta_{\alpha\beta}, \quad T(\nabla)(\xi_0, \xi_{\alpha}) = \tau(\xi_{\alpha})$$

であるから, 言えた. 最後に, 曲率形式 $F(\nabla)$ について計算しよう. 接続形式と同様に $\nabla J = 0$, $\nabla g = 0$, $\nabla \xi = 0$ より $(F(\nabla)_{\bar{B}}^A)$ は歪 Hermite 行列である. よって, 0 行と 0 列の成分は 0 である. また, $F(\nabla)_{\bar{B}}^A = \overline{F(\nabla)_{\bar{B}}^A}$ であるから $F(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha}$ の値を計算すればよい. ここで,

$$\begin{aligned} F(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} &= d\omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} + \omega(\nabla)_{\bar{A}}^{\alpha} \wedge \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^A \\ &= d\omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} + \omega(\nabla)_0^{\alpha} \wedge \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^0 + \omega(\nabla)_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\gamma} + \omega(\nabla)_{\bar{\gamma}}^{\alpha} \wedge \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \end{aligned}$$

である. ここで $\omega(\nabla)_0^{\alpha} = \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^0 = \omega(\nabla)_{\bar{\gamma}}^{\alpha} = \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = 0$ だから

$$F(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} = d\omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\alpha} + \omega(\nabla)_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega(\nabla)_{\bar{\beta}}^{\gamma}$$

を得る. また, 同様に Tanno 接続についての $F(*\nabla)_\beta^\alpha$ を考えると $\omega(*\nabla)_0^A = \omega(*\nabla)_B^0 = 0$ だから

$$F(*\nabla)_\beta^\alpha = d\omega(*\nabla)_\beta^\alpha + \omega(*\nabla)_\gamma^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^\gamma + \omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}$$

を得る. ここで, 補題 3.3 より $\omega(\nabla)_\beta^\alpha = \omega(*\nabla)_\beta^\alpha$ が成り立つから,

$$(3.16) \quad F(\nabla)_\beta^\alpha = F(*\nabla)_\beta^\alpha - \omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}$$

を得る. $F(*\nabla)$, $\omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha$, $\omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}$ の値はすでにわかっているなのでこの関係式を用いて $F(\nabla)$ の値が計算できる. 補題 3.3 より,

$$\begin{aligned} \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}} &= \theta^0 \cdot \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}(\xi_0) + \theta^\lambda \cdot \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}(\xi_\lambda) + \theta^{\bar{\lambda}} \cdot \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}}(\xi_{\bar{\lambda}}) \\ &= \theta^\lambda \cdot \left(-\frac{i}{2} Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

を得る. 同様にして,

$$\omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha = \overline{\omega(*\nabla)_\gamma^{\bar{\alpha}}} = \overline{\theta^\mu \cdot \left(-\frac{i}{2} Q_{\gamma\mu}^{\bar{\alpha}}\right)} = \theta^{\bar{\mu}} \cdot \frac{i}{2} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha$$

を得る. したがって,

$$\begin{aligned} \omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}} &= \theta^{\bar{\mu}} \cdot \left(\frac{i}{2} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha\right) \wedge \theta^\lambda \cdot \left(-\frac{i}{2} Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) \\ &= \theta^\lambda \wedge \theta^{\bar{\mu}} \cdot \left(-\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

である. よって, (3.16) より,

$$F(\nabla)_\beta^\alpha = F(*\nabla)_\beta^\alpha + \theta^\lambda \wedge \theta^{\bar{\mu}} \cdot \left(-\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right)$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} (\omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}})(\xi_0, \xi_\lambda) &= \left((\theta^\lambda \wedge \theta^{\bar{\mu}})(\xi_0, \xi_\lambda)\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) = 0, \\ (\omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}})(\xi_\lambda, \xi_\mu) &= \left((\theta^\lambda \wedge \theta^{\bar{\mu}})(\xi_\lambda, \xi_\mu)\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) = 0, \\ (\omega(*\nabla)_{\bar{\gamma}}^\alpha \wedge \omega(*\nabla)_\beta^{\bar{\gamma}})(\xi_\lambda, \xi_{\bar{\mu}}) &= \left((\theta^\lambda \wedge \theta^{\bar{\mu}})(\xi_\lambda, \xi_{\bar{\mu}})\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}\right) = -\frac{1}{4} Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}} \end{aligned}$$

であるから,

$$F(\nabla)_\beta^\alpha(\xi_0, \xi_\lambda) = F(*\nabla)_\beta^\alpha(\xi_0, \xi_\lambda),$$

$$F(\nabla)_\beta^\alpha(\xi_0, \xi_{\bar{\lambda}}) = F(*\nabla)_\beta^\alpha(\xi_0, \xi_{\bar{\lambda}}),$$

$$\begin{aligned}
F(\nabla)_\beta^\alpha(\xi_\lambda, \xi_\mu) &= F(*\nabla)_\beta^\alpha(\xi_\lambda, \xi_\mu), \\
F(\nabla)_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\lambda}}, \xi_{\bar{\mu}}) &= F(*\nabla)_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\lambda}}, \xi_{\bar{\mu}}), \\
F(\nabla)_\beta^\alpha(\xi_\lambda, \xi_{\bar{\mu}}) &= F(*\nabla)_\beta^\alpha(\xi_\lambda, \xi_{\bar{\mu}}) - \frac{1}{4}Q_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\alpha Q_{\beta\lambda}^{\bar{\gamma}}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで (2.11) より, $\tau^* = \tau$, $(*\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \tau^*)_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = (\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \tau)_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}$, $(*\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \mathcal{Q})_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} = (\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}} \mathcal{Q})_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}}$, etc. であることに注意すると, 補題 3.3 により (3.14) が成り立つ. ■

次に, $\text{Ric}(\nabla)$, Ric^∇ , $s(\nabla)$, s^∇ を計算しよう.

命題 3.4 擬エルミート Ricci 曲率について,

$$(3.17) \quad \overline{\text{Ric}^\nabla(X, Y)} = \text{Ric}^\nabla(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \overline{\text{Ric}(\nabla)(X, Y)} = \text{Ric}(\nabla)(\bar{X}, \bar{Y}),$$

$$(3.18) \quad \begin{cases} \text{Ric}^\nabla(\xi, \xi) = 0, \\ \text{Ric}^\nabla(\xi, \xi_\beta) = -(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \tau)_{\bar{\lambda}}^{\bar{\beta}} - \frac{i}{2} \tau_{\bar{\lambda}}^\nu \mathcal{Q}_{\nu\lambda}^{\bar{\beta}}, \\ \text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \frac{i}{2} (\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\alpha\lambda}^{\bar{\beta}}, \\ \text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) = \text{Ric}^{\nabla^g}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) - \frac{1}{4} \mathcal{Q}_{\mu\alpha}^{\bar{\lambda}} \mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\beta}}^\lambda - \tau_{\bar{\alpha}}^{\bar{\lambda}} \tau_{\bar{\beta}}^\lambda + \frac{2n+1}{4} \delta_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

$$(3.19) \quad \begin{cases} \text{Ric}(\nabla)(\xi, Y) = 0, \\ \text{Ric}(\nabla)(\xi_\alpha, \xi) = (\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \tau)_{\bar{\lambda}}^{\bar{\alpha}} + \frac{i}{2} \tau_{\bar{\lambda}}^\nu \mathcal{Q}_{\nu\alpha}^{\bar{\lambda}}, \\ \text{Ric}(\nabla)(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \frac{i}{2} (\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\lambda\alpha}^{\bar{\beta}} + i(n-1) \tau_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}, \\ \text{Ric}(\nabla)(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) = \text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) - \frac{1}{4} \mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}} \mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^\beta \end{cases}$$

であり, また, 擬エルミートスカラー曲率については

$$(3.20) \quad s^\nabla = s^{\nabla^g} - \frac{1}{4} |\mathcal{Q}|^2 - |\tau|^2 + \frac{n(2n+1)}{4},$$

$$(3.21) \quad s(\nabla) = 2s^\nabla - \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}} \mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^\alpha$$

である．ただし, $|\mathcal{Q}|^2 = \mathcal{Q}_{\mu\nu}^{\bar{\lambda}} \mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^\lambda$, $|\tau|^2 = \tau_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} \cdot \tau_{\bar{\rho}}^\nu$ とおいている．

証明. Ric^∇ , $\text{Ric}(\nabla)$ の定義から, (3.17) は明らかである．次に, (3.18) を示そう． $\text{Ric}^\nabla(X, Y) = g(F(\nabla)(X, Y)\xi_\lambda, \xi_{\bar{\lambda}})$ であるから, $\text{Ric}^\nabla(\xi, \xi) = 0$ は明らかである．また, (3.14) より残りは次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\text{Ric}^\nabla(\xi, \xi_\beta) &= F(\nabla)_\lambda^\lambda(\xi, \xi_\beta) = -(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \tau)_{\bar{\lambda}}^{\bar{\beta}} - \frac{i}{2} \tau_{\bar{\lambda}}^\nu \mathcal{Q}_{\nu\lambda}^{\bar{\beta}}, \\
\text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_\beta) &= F(\nabla)_\lambda^\lambda(\xi_\alpha, \xi_\beta) = -i\tau_{\bar{\alpha}}^{\bar{\lambda}} \delta_{\lambda\beta} + i\tau_{\bar{\beta}}^{\bar{\lambda}} \delta_{\lambda\alpha} + \frac{i}{2} (\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\alpha\lambda}^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\tau_{\alpha}^{\bar{\beta}} + i\tau_{\beta}^{\bar{\alpha}} + \frac{i}{2}(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\alpha\lambda}^{\bar{\beta}} = \frac{i}{2}(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \mathcal{Q})_{\alpha\lambda}^{\bar{\beta}}, \\
\text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) &= F(\nabla)_{\lambda}^{\lambda}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) \\
&= F(\nabla^g)_{\lambda}^{\lambda}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\mu\alpha}^{\bar{\lambda}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\beta}^{\lambda} - \tau_{\alpha}^{\bar{\lambda}}\tau_{\beta}^{\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda\lambda}\delta_{\alpha\beta} \\
&= \text{Ric}^{\nabla^g}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\mu\alpha}^{\bar{\lambda}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\beta}^{\lambda} - \tau_{\alpha}^{\bar{\lambda}}\tau_{\beta}^{\lambda} + \frac{2n+1}{4}\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

である．(3.19) についても同様にして計算できる．ここではその最後の等式が成立することだけをチェックしよう． $\text{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) = g(F(\nabla)(\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\alpha}, \xi_{\lambda})$ であり，

$$\begin{aligned}
&g(F(\nabla)(\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\alpha}, \xi_{\lambda}) + g(F(\nabla)(\xi_{\bar{\beta}}, \xi_{\alpha})\xi_{\bar{\lambda}}, \xi_{\lambda}) + g(F(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\lambda})\xi_{\bar{\beta}}, \xi_{\bar{\lambda}}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{Q}_{\alpha\lambda}^{\bar{\mu}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\beta}^{\lambda} - \mathcal{Q}_{\lambda\alpha}^{\bar{\mu}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\lambda} - \mathcal{Q}_{\alpha\lambda}^{\bar{\mu}}\mathcal{Q}_{\beta\bar{\mu}}^{\lambda} + \mathcal{Q}_{\lambda\alpha}^{\bar{\mu}}\mathcal{Q}_{\beta\bar{\mu}}^{\lambda}) = -\frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\beta}
\end{aligned}$$

である．ここで， $g(F(\nabla)(\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\alpha}, \xi_{\lambda}) = \text{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}})$ ， $g(F(\nabla)(\xi_{\bar{\beta}}, \xi_{\alpha})\xi_{\bar{\lambda}}, \xi_{\lambda}) = -\text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}})$ であるから $\text{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) = \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\beta}$ が成り立つ．次に，擬エルミートスカラー曲率について計算すると，

$$\begin{aligned}
s^{\nabla} &= \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= \text{Ric}^{\nabla^g}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\mu\alpha}^{\bar{\lambda}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\alpha}}^{\lambda} - \tau_{\alpha}^{\bar{\lambda}}\tau_{\bar{\alpha}}^{\lambda} + \frac{2n+1}{4}\delta_{\alpha\alpha} \\
&= s^{\nabla^g} - \frac{1}{4}|\mathcal{Q}|^2 - |\tau|^2 + \frac{(2n+1)n}{4}
\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
s(\nabla) &= \text{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\alpha} \\
&= s^{\nabla} - \frac{1}{4}\mathcal{Q}_{\lambda\mu}^{\bar{\alpha}}\mathcal{Q}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}^{\alpha}
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上から (3.20) , (3.21) が成り立つ． ■

4 CR 共形変換

この章では CR 共形変換の解説をする．また，エルミート Tanno 接続とその曲率テンソル，擬エルミート Ricci 曲率，擬エルミートスカラー曲率の CR 共形変換の前後の差を計算する．

4.1 定義

接触 Riemann 多様体 (M, θ, g, J) の以下のような変換を考える：

$$\theta \longmapsto \tilde{\theta} := e^{2f}\theta \quad (f \in C^\infty(M))$$

である． $\tilde{\theta} \wedge (d\tilde{\theta})^n = e^{2(n+1)f}\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ であるから， $\tilde{\theta}$ は接触形式である．対応する Reeb ベクトル場を $\tilde{\xi} \in \Gamma(TM)$ と記そう．また， $\ker \tilde{\theta} = \ker \theta$ であることに注意して $(1, 1)$ -テンソル場 \tilde{J} を以下で定める：

$$\tilde{J}X = JX \quad (X \in \ker \tilde{\theta}), \quad \tilde{J}\tilde{\xi} = 0$$

である．この \tilde{J} を用いて Riemann 計量 \tilde{g} を以下で定める：

$$\tilde{g}(X, Y) = d\tilde{\theta}(X, \tilde{J}Y) + \tilde{\theta}(X)\tilde{\theta}(Y)$$

である． \tilde{g} は， $X, Y \in \ker \theta$ について

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, \tilde{J}Y) &= -d\tilde{\theta}(X, Y), \quad \tilde{g}(X, \tilde{\xi}) = 0, \quad \tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = 1, \\ \tilde{J}(\tilde{J}X) &= -X, \quad \tilde{J}\tilde{\xi} = 0 \end{aligned}$$

を満たす．以上の構造を付随させた $(M, \tilde{\theta}, \tilde{g}, \tilde{J})$ は接触 Riemann 多様体である．

$$(M, \theta, g, J) \longmapsto (M, \tilde{\theta}, \tilde{g}, \tilde{J})$$

を CR 共形変換という．CR 共形変換について次の結果が知られている．

命題 4.1 (cf. Blair-Dragomir [1]) ξ, J, g, Q, τ について，

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \xi \cdot e^{-2f} + \xi_\gamma \cdot \{-2i\xi_{\bar{\gamma}}(f)e^{-2f}\} + \xi_{\bar{\gamma}} \cdot \{2i\xi_\gamma(f)e^{-2f}\}, \\ \tilde{J} &= \xi_\gamma \otimes \theta^\gamma \cdot i + \xi_{\bar{\gamma}} \otimes \theta^{\bar{\gamma}} \cdot (-i) + \left(\xi_\gamma \cdot \{-2\xi_{\bar{\gamma}}(f)\} + \xi_{\bar{\gamma}} \cdot \{-2\xi_\gamma(f)\} \right) \otimes \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= (\theta^\alpha \otimes \theta^{\bar{\alpha}} + \theta^{\bar{\alpha}} \otimes \theta^\alpha) e^{2f} + (\theta \otimes \theta^\alpha + \theta^\alpha \otimes \theta) \{-2i\xi_\alpha(f) e^{2f}\} \\
&\quad + (\theta \otimes \theta^{\bar{\alpha}} + \theta^{\bar{\alpha}} \otimes \theta) \{2i\xi_{\bar{\alpha}}(f) e^{2f}\} + \theta \otimes \theta \{e^{4f} + 8e^{2f} \xi_\gamma(f) \xi_{\bar{\gamma}}(f)\}, \\
e^f \tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} &= Q_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}}, \\
e^{2f} \tilde{\tau}_\alpha^{\bar{\beta}} &= \tau_\alpha^{\bar{\beta}} + 2i \left(\xi_\alpha(\xi_\beta(f)) - \nabla_{\xi_\alpha} \xi_\beta(f) - 2\xi_\alpha(f) \xi_\beta(f) \right) + (Q_{\alpha\gamma}^{\bar{\beta}} - Q_{\gamma\alpha}^{\bar{\beta}}) \xi_\gamma(f)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

CR 共形不変な量を構成することに関しては, Sakamoto 氏, Takemura 氏 (Sakamoto-Takemura [10]) や Tanno 氏 (Tanno [13], [14]) の先行研究がある.

4.2 エルミート Tanno 接続の CR 共形変換

以下, $(M, \tilde{\theta}, \tilde{g}, \tilde{J})$ に付随するものはすべて \sim の記号を付けて表す. ここでは, $\tilde{\nabla} - \nabla$, $F(\tilde{\nabla}) - F(\nabla)$, $\text{Ric}(\tilde{\nabla}) - \text{Ric}(\nabla)$, $\text{Ric}^{\tilde{\nabla}} - \text{Ric}^\nabla$, $s(\tilde{\nabla}) - s(\nabla)$, $s^{\tilde{\nabla}} - s^\nabla$ を計算する.

まず, エルミート Tanno 接続について, $\tilde{\nabla} - \nabla$ を計算しよう.

命題 4.2

$$(4.1) \quad \tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta = \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f),$$

$$(4.2) \quad \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta = -\xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f),$$

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad \tilde{\nabla}_\xi \xi_\beta - \nabla_\xi \xi_\beta &= \xi_\alpha \cdot i \left\{ 2 \left(\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_\beta} \xi_{\bar{\alpha}} \right) (f) + 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) \right\} \\
&\quad + \xi_\beta \cdot 4i \xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f)
\end{aligned}$$

である.

この命題を証明する前に次の補題を用意する.

補題 4.3 (Nagase-Sasaki [6, Lemma 2.1]) $\tilde{\nabla}$ の接続形式について, $\tilde{\omega}_B^A(\tilde{\xi}_C) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}_C} \tilde{\xi}_B, \tilde{\xi}_{\bar{A}})$ とおくとき,

$$(4.4) \quad e^f \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}_\gamma) = \omega_\beta^\alpha(\xi_\gamma) + \delta_{\alpha\beta} \xi_\gamma(f) + \delta_{\alpha\gamma} 2\xi_\beta(f),$$

$$(4.5) \quad e^f \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}_{\bar{\gamma}}) = \omega_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\gamma}}) - \delta_{\alpha\beta} \xi_{\bar{\gamma}}(f) - \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f),$$

$$\begin{aligned}
(4.6) \quad e^{2f} \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}) &= \omega_\beta^\alpha(\xi) + i\xi_{\bar{\alpha}} \xi_\beta(f) + i\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}}(f) - 4i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) \\
&\quad - i\omega_\beta^\mu(\xi_{\bar{\alpha}}) \xi_\mu(f) + i\omega_\mu^\alpha(\xi_\beta) \xi_{\bar{\mu}}(f) - 2i\omega_\beta^\alpha(\xi_\mu) \xi_{\bar{\mu}}(f) + 2i\omega_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\mu}}) \xi_\mu(f)
\end{aligned}$$

である.

証明. $\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}_C} \tilde{\xi}_B = \tilde{\xi}_A \cdot \tilde{\omega}_B^A(\tilde{\xi}_C)$ においていることに注意すると, 補題 4.2 の (4.4) , (4.5) より

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta &= \tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} e^f \tilde{\xi}_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \\
&= e^f \tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \tilde{\xi}_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta + \xi_\gamma(e^f) \tilde{\xi}_\beta \\
&= e^f \left\{ \omega_\beta^\alpha(\xi_\gamma) + \delta_{\alpha\beta} \xi_\gamma(f) + \delta_{\alpha\gamma} 2\xi_\beta(f) \right\} \tilde{\xi}_\alpha \\
&\quad - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta + \xi_\gamma(e^f) \tilde{\xi}_\beta \\
&= \left\{ \delta_{\alpha\beta} \xi_\gamma(f) + \delta_{\alpha\gamma} 2\xi_\beta(f) \right\} \xi_\alpha + \xi_\gamma(f) \xi_\beta \\
&= \xi_\alpha \cdot \left\{ \delta_{\alpha\beta} 2\xi_\gamma(f) + \delta_{\alpha\gamma} 2\xi_\beta(f) \right\}, \\
\tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta &= \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} e^f \tilde{\xi}_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta \\
&= e^f \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \tilde{\xi}_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta + \xi_{\bar{\gamma}}(e^f) \tilde{\xi}_\beta \\
&= e^f \tilde{\xi}_\alpha \cdot \left\{ \omega_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\gamma}}) - \delta_{\alpha\beta} \xi_{\bar{\gamma}}(f) - \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \right\} \\
&\quad - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\beta + \xi_{\bar{\gamma}}(e^f) \tilde{\xi}_\beta \\
&= -\xi_\beta \cdot \xi_{\bar{\gamma}}(f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) + \xi_\beta \cdot \xi_{\bar{\gamma}}(f) \\
&= -\xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f)
\end{aligned}$$

と計算できる. さらに,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\xi \xi_\beta &= \tilde{\nabla}_\xi e^f \tilde{\xi}_\beta = e^f \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\xi}_\beta + \xi(f) \xi_\beta \\
&= e^f \left\{ e^{2f} \tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}} \tilde{\xi}_\beta + e^f 2i\xi_{\bar{\nu}}(f) \tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}_{\bar{\nu}}} \tilde{\xi}_\beta - e^f 2i\xi_\nu(f) \tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}_{\bar{\nu}}} \tilde{\xi}_\beta \right\} + \xi(f) \xi_\beta \\
&= \tilde{\xi}_\alpha \cdot e^f \left\{ e^{2f} \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}) + e^f 2i\xi_{\bar{\nu}}(f) \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}_\nu) - e^f 2i\xi_\nu(f) \tilde{\omega}_\beta^\alpha(\tilde{\xi}_{\bar{\nu}}) \right\} + \xi(f) \xi_\beta \\
&= \xi_\alpha \cdot \left\{ \omega_\beta^\alpha(\xi) + i\xi_{\bar{\alpha}} \xi_\beta(f) + i\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}}(f) - 4i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) \right. \\
&\quad \left. - i\omega_\beta^\nu(\xi_{\bar{\alpha}}) \xi_\nu(f) + i\omega_\nu^\alpha(\xi_\beta) \xi_{\bar{\nu}}(f) - 2i\omega_\beta^\alpha(\xi_\nu) \xi_{\bar{\nu}}(f) + 2i\omega_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\nu}}) \xi_\nu(f) \right. \\
&\quad \left. + 2i\xi_{\bar{\nu}}(f) \omega_\beta^\alpha(\xi_\nu) + \delta_{\alpha\beta} 2i\xi_{\bar{\nu}}(f) \xi_\nu(f) + 4i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) \right. \\
&\quad \left. - 2i\xi_\nu(f) \omega_\beta^\alpha(\xi_{\bar{\nu}}) + \delta_{\alpha\beta} 2i\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) + 4i\xi_\beta(f) \xi_{\bar{\alpha}}(f) \right\} + \xi(f) \xi_\beta \\
&= \xi_\alpha \cdot \left\{ \omega_\beta^\alpha(\xi) + i\xi_{\bar{\alpha}} \xi_\beta(f) + i\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}}(f) - i\omega_\beta^\nu(\xi_{\bar{\alpha}}) \xi_\nu(f) - i\omega_{\bar{\alpha}}^\beta(\xi_\beta) \xi_{\bar{\nu}}(f) \right. \\
&\quad \left. + 4i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) + \delta_{\alpha\beta} 4i\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \right\} + \xi(f) \xi_\beta
\end{aligned}$$

であるから, (4.4), (4.5), (4.6) を用いると

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\xi \xi_\beta - \nabla_\xi \xi_\beta &= \xi_\alpha \cdot i \left\{ \xi_{\bar{\alpha}} \xi_\beta(f) + \xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}}(f) - \omega_\beta^\nu(\xi_{\bar{\alpha}}) \xi_\nu(f) - \omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}}(\xi_\beta) \xi_{\bar{\nu}}(f) \right. \\
&\quad \left. + 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) + \delta_{\alpha\beta} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \right\} + \xi_\beta \cdot \xi(f) \\
&= \xi_\alpha \cdot i \left\{ 2\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}}(f) - 2\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}}(\xi_\beta) \xi_{\bar{\nu}}(f) + 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) + \delta_{\alpha\beta} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \right\} \\
&= \xi_\alpha \cdot i \left\{ 2 \left(\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_\beta} \xi_{\bar{\alpha}} \right)(f) + 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) \right\} + \xi_\beta \cdot 4i \xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f)
\end{aligned}$$

である. 以上から (4.1), (4.2), (4.3) が証明された. ■

次に曲率テンソルについて, $F(\tilde{\nabla}) - F(\nabla)$ に関しては以下の命題が成り立つ.

命題 4.4 (Nagase-Sasaki [6, Proposition 2.2])

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad & F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_\lambda) \xi_\beta - F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda) \xi_\beta \\
&= \xi_\lambda \cdot 2 \left(\xi_\gamma \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \right)(f) - \xi_\lambda \cdot 4\xi_\beta(f) \xi_\gamma(f) \\
&\quad - \xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_\lambda \xi_\beta - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \right)(f) + \xi_\gamma \cdot 4\xi_\beta(f) \xi_\lambda(f) \\
&\quad + \xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(f) i \mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} + \xi_\beta \cdot \xi_{\bar{\mu}}(f) i \left(\mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\mu}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\mu}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.8) \quad & F(\tilde{\nabla})(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta - F(\nabla)(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta \\
&= \xi_\mu \cdot \delta_{\beta\gamma} 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\mu}} - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_{\bar{\mu}} \right)(f) - \xi_\mu \cdot \delta_{\beta\gamma} 4\xi_{\bar{\lambda}}(f) \xi_{\bar{\mu}}(f) \\
&\quad - \xi_\mu \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \left(\xi_{\bar{\gamma}} \xi_{\bar{\mu}} - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_{\bar{\mu}} \right)(f) + \xi_\mu \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\bar{\gamma}}(f) \xi_{\bar{\mu}}(f) \\
&\quad + \xi_\mu \cdot \xi_\beta(f) i \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\lambda + \xi_\beta \cdot \xi_\mu(f) i \left(\mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\mu - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\mu \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad & F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta - F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta \\
&= -\xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta \right)(f) - \xi_\gamma \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\gamma - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma \right)(f) - \xi_\beta \cdot \delta_{\gamma\lambda} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad - \xi_\mu \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \left(\xi_\gamma \xi_{\bar{\mu}} - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\mu}} \right)(f) - \xi_\mu \cdot \delta_{\gamma\lambda} 2 \left(\xi_\beta \xi_{\bar{\mu}} - \nabla_{\xi_\beta} \xi_{\bar{\mu}} \right)(f)
\end{aligned}$$

である.

証明. 命題 4.1 の (4.1) より,

$$\tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta = \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f)$$

であるから,

$$\tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \tilde{\nabla}_{\xi_\lambda} \xi_\beta$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta + \tilde{\nabla}_{\xi_\gamma} \left(\xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \right) \\
&= \nabla_{\xi_\gamma} \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta + \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta)(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_\gamma} \left(\xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \right) + \left(\xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \right) 2\xi_\gamma(f) \\
&\quad + \xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \right) (f) \\
&= \nabla_{\xi_\gamma} \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta + \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta)(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) + \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma \xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\gamma \xi_\beta(f) \\
&\quad + \xi_\beta \cdot 4\xi_\lambda(f) \xi_\gamma(f) + \xi_\lambda \cdot 4\xi_\beta(f) \xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 8\xi_\beta(f) \xi_\lambda(f)
\end{aligned}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned}
[\xi_\gamma, \xi_\lambda] &= \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma - T(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda) \\
&= \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma + \xi_{\bar{\rho}} \cdot \frac{1}{4} [J, J]_{\lambda\gamma}^{\bar{\rho}} \\
&= \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma + \xi_{\bar{\rho}} \cdot \frac{i}{2} \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\rho}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\rho}} \right\}
\end{aligned}$$

であることから,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{[\xi_\gamma, \xi_\lambda]} \xi_\beta - \nabla_{[\xi_\gamma, \xi_\lambda]} \xi_\beta &= \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda)(f) + \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma)(f) - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) \\
&\quad - \xi_\alpha \cdot i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\beta}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\beta}} \right\}
\end{aligned}$$

と計算できる。よって,

$$\begin{aligned}
&F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_\lambda) \xi_\beta - F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda) \xi_\beta \\
&= \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta)(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) + \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) + \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma \xi_\lambda(f) + \xi_\lambda \cdot 2\xi_\gamma \xi_\beta(f) \\
&\quad + \xi_\beta \cdot 4\xi_\lambda(f) \xi_\gamma(f) + \xi_\lambda \cdot 4\xi_\beta(f) \xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 8\xi_\beta(f) \xi_\lambda(f) \\
&\quad - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda(f) - \xi_\lambda \cdot 2(\nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta)(f) \\
&\quad - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) - \xi_\beta \cdot 2\xi_\lambda \xi_\gamma(f) - \xi_\gamma \cdot 2\xi_\lambda \xi_\beta(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 4\xi_\gamma(f) \xi_\lambda(f) - \xi_\gamma \cdot 4\xi_\beta(f) \xi_\lambda(f) - \xi_\lambda \cdot 8\xi_\beta(f) \xi_\gamma(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda)(f) - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda \cdot 2\xi_\beta(f) \\
&\quad + \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma)(f) + \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) + \xi_\alpha \cdot i\xi_{\bar{\alpha}}(f) \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\beta}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\beta}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi_\beta \cdot 2 \left(\nabla_{\xi_\lambda} \xi_\gamma - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\lambda - [\xi_\lambda, \xi_\gamma] \right) (f) \\
&\quad + \xi_\lambda \cdot 2 \left(\xi_\gamma \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \right) (f) - \xi_\lambda \cdot 4 \xi_\beta (f) \xi_\gamma (f) \\
&\quad - \xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_\lambda \xi_\beta - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \right) (f) + \xi_\gamma \cdot 4 \xi_\beta (f) \xi_\lambda (f) + \xi_\alpha \cdot i \xi_{\bar{\alpha}} (f) \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\beta}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\beta}} \right\} \\
&= \xi_\lambda \cdot 2 \left(\xi_\gamma \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \right) (f) - \xi_\lambda \cdot 4 \xi_\beta (f) \xi_\gamma (f) \\
&\quad - \xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_\lambda \xi_\beta - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \right) (f) + \xi_\gamma \cdot 4 \xi_\beta (f) \xi_\lambda (f) \\
&\quad + \xi_\beta \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\alpha}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\alpha}} \right\} \xi_{\bar{\alpha}} (f) + \xi_\alpha \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\beta}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\beta}} \right\} \xi_{\bar{\alpha}} (f)
\end{aligned}$$

であり, (4.7) が言えた. 次に, 命題 4.1 の (4.1), (4.2) より,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta \\
&= \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta - \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \left(\xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \right) \\
&= \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta - \xi_\alpha \cdot g(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta, \xi_{\bar{\gamma}}) 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&\quad - \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\gamma}} \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&= \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta - \xi_\alpha \cdot g(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta, \xi_{\bar{\gamma}}) 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&\quad - \left\{ \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\alpha - \xi_\rho \cdot \delta_{\alpha\gamma} 2 \xi_{\bar{\rho}} (f) \right\} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\gamma}} \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&= \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) + \xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_{\bar{\gamma}}) 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&\quad + \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 4 \xi_{\bar{\gamma}} (f) \xi_{\bar{\alpha}} (f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \xi_{\bar{\gamma}} \xi_{\bar{\alpha}} (f)
\end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}
[\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}}] &= \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_{\bar{\lambda}} - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_{\bar{\gamma}} - \xi_\rho \cdot \frac{i}{2} \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\rho - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\rho \right\} \\
&= \xi_{\bar{\rho}} \cdot \omega_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}(\xi_{\bar{\gamma}}) - \xi_{\bar{\rho}} \cdot \omega_{\bar{\gamma}}^{\bar{\rho}}(\xi_{\bar{\lambda}}) - \xi_\rho \cdot \frac{i}{2} \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\rho - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\rho \right\}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{[\xi_\gamma, \xi_\lambda]} \xi_\beta - \nabla_{[\xi_\gamma, \xi_\lambda]} \xi_\beta \\
&= -\xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\rho} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \omega_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}(\xi_{\bar{\gamma}}) + \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\rho} 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \omega_{\bar{\gamma}}^{\bar{\rho}}(\xi_{\bar{\lambda}}) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\rho - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\rho \right\} \xi_\rho (f) - \xi_\rho \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\rho - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\rho \right\} \xi_\beta (f) \\
&= -\xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}} \xi_{\bar{\lambda}}) 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) + \xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_{\bar{\gamma}}) 2 \xi_{\bar{\alpha}} (f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\alpha - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\alpha \right\} \xi_\alpha (f) - \xi_\alpha \cdot i \left\{ \mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^\alpha - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^\alpha \right\} \xi_\beta (f)
\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}
& F(\tilde{\nabla})(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_{\beta} - F(\nabla)(\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_{\beta} \\
&= -\nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}}\xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) + \xi_{\alpha} \cdot g(\xi_{\beta}, \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\bar{\gamma}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\bar{\gamma}}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\xi_{\bar{\gamma}}\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_{\alpha} \cdot g(\xi_{\beta}, \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}}\xi_{\bar{\lambda}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma} 4\xi_{\bar{\lambda}}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) + \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\xi_{\bar{\lambda}}\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \xi_{\alpha} \cdot g(\xi_{\beta}, \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}}\xi_{\bar{\lambda}})2\xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_{\alpha} \cdot g(\xi_{\beta}, \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\bar{\gamma}})2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \xi_{\beta} \cdot i\left\{\mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^{\alpha} - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^{\alpha}\right\}\xi_{\alpha}(f) + \xi_{\alpha} \cdot i\left\{\mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^{\alpha} - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^{\alpha}\right\}\xi_{\beta}(f) \\
&= \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma} 2\left(\xi_{\bar{\lambda}}\xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\bar{\alpha}}\right)(f) - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma} 4\xi_{\bar{\lambda}}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\left(\xi_{\bar{\gamma}}\xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_{\bar{\gamma}}}\xi_{\bar{\alpha}}\right)(f) + \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\bar{\gamma}}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \xi_{\alpha} \cdot i\left\{\mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^{\alpha} - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^{\alpha}\right\}\xi_{\beta}(f) + \xi_{\beta} \cdot i\left\{\mathcal{Q}_{\bar{\gamma}\bar{\lambda}}^{\alpha} - \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}^{\alpha}\right\}\xi_{\alpha}(f)
\end{aligned}$$

と計算され, (4.8) が言えた. 最後に, (4.9) について計算する.

$$\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}_{\xi_{\gamma}}\tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta} \\
&= \tilde{\nabla}_{\xi_{\gamma}}\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta} - \tilde{\nabla}_{\xi_{\gamma}}\left(\xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\xi_{\bar{\alpha}}(f)\right) \\
&= \nabla_{\xi_{\gamma}}\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta} + \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta} \cdot 2\xi_{\gamma}(f) + \xi_{\gamma} \cdot 2(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta})(f) + \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2(\nabla_{\xi_{\gamma}}\xi_{\bar{\alpha}})(f) \\
&\quad - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\gamma}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_{\gamma} \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\alpha}(f)\xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\xi_{\gamma}\xi_{\bar{\alpha}}(f), \\
& \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}}\tilde{\nabla}_{\xi_{\gamma}}\xi_{\beta} \\
&= \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}}\nabla_{\xi_{\gamma}}\xi_{\beta} + \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}}\left(\xi_{\beta} \cdot 2\xi_{\gamma}(f)\right) + \tilde{\nabla}_{\xi_{\bar{\lambda}}}\left(\xi_{\gamma} \cdot 2\xi_{\beta}(f)\right) \\
&= \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\nabla_{\xi_{\gamma}}\xi_{\beta} + \xi_{\alpha} \cdot g(\xi_{\beta}, \nabla_{\xi_{\gamma}}\xi_{\bar{\lambda}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\beta} \cdot 2\xi_{\gamma}(f) - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\bar{\alpha}}(f)\xi_{\gamma}(f) + \xi_{\beta} \cdot 2\xi_{\bar{\lambda}}\xi_{\gamma}(f) \\
&\quad + \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\gamma} \cdot 2\xi_{\beta}(f) - \xi_{\alpha} \cdot \delta_{\gamma\lambda} 4\xi_{\bar{\alpha}}(f)\xi_{\beta}(f) + \xi_{\gamma} \cdot 2\xi_{\bar{\lambda}}\xi_{\beta}(f)
\end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}
[\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}] &= \nabla_{\xi_{\gamma}}\xi_{\bar{\lambda}} - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\gamma} - \xi \cdot i\delta_{\gamma\lambda} \\
&= \xi_{\bar{\rho}} \cdot \omega_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}(\xi_{\gamma}) - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_{\gamma} - \xi \cdot i\delta_{\gamma\lambda}
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}_{[\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}]} \xi_\beta - \nabla_{[\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}]} \xi_\beta \\
&= -\xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\lambda}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma)(f) - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) - i\delta_{\gamma\lambda} \left(\tilde{\nabla}_\xi \xi_\beta - \nabla_\xi \xi_\beta \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}
& F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta - F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_\beta \\
&= \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\gamma \cdot 2(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta)(f) + \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2(\nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\alpha}})(f) \\
&\quad - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_\gamma(f) \xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_\gamma \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_\alpha(f) \xi_{\bar{\alpha}}(f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2\xi_\gamma \xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad - \xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\lambda}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta \cdot 2\xi_\gamma(f) + \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\gamma(f) - \xi_\beta \cdot 2\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\gamma(f) \\
&\quad - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) + \xi_\alpha \cdot \delta_{\gamma\lambda} 4\xi_{\bar{\alpha}}(f) \xi_\beta(f) - \xi_\gamma \cdot 2\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\beta(f) \\
&\quad + \xi_\alpha \cdot g(\xi_\beta, \nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\lambda}}) 2\xi_{\bar{\alpha}}(f) \\
&\quad + \xi_\beta \cdot 2(\nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma)(f) + \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma \cdot 2\xi_\beta(f) + i\delta_{\gamma\lambda} \left(\tilde{\nabla}_\xi \xi_\beta - \nabla_\xi \xi_\beta \right) \\
&= -\xi_\gamma \cdot 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\beta \right)(f) - \xi_\gamma \cdot \delta_{\beta\lambda} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad - \xi_\beta \cdot 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}} \xi_\gamma - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}} \xi_\gamma \right)(f) - \xi_\beta \cdot \delta_{\gamma\lambda} 4\xi_\nu(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad - \xi_\alpha \cdot \delta_{\beta\lambda} 2 \left(\xi_\gamma \xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_{\bar{\alpha}} \right)(f) - \xi_\alpha \cdot \delta_{\gamma\lambda} 2 \left(\xi_\beta \xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_\beta} \xi_{\bar{\alpha}} \right)(f)
\end{aligned}$$

であり, (4.9) が示せた. ■

続いて $\text{Ric}(\tilde{\nabla}) - \text{Ric}(\nabla)$, $\text{Ric}^{\tilde{\nabla}} - \text{Ric}^\nabla$, $s(\tilde{\nabla}) - s(\nabla)$, $s^{\tilde{\nabla}} - s^\nabla$ などについても調べておく.

命題 4.5 (Nagase-Sasaki [6, Proposition 2.4]) Ricci 曲率については

$$\begin{aligned}
(4.10) \quad & \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\alpha, \xi_\beta) - \text{Ric}(\nabla)(\xi_\alpha, \xi_\beta) \\
&= i\xi_{\bar{\mu}}(f) \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \right) \\
&\quad - 2(n-1) \left(\xi_\beta \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\beta} \xi_\alpha \right)(f) + 4(n-1) \xi_\alpha(f) \xi_\beta(f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.11) \quad & \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_{\bar{\alpha}}, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}(\nabla)(\xi_{\bar{\alpha}}, \xi_{\bar{\beta}}) \\
&= -i\xi_\mu(f) \left(\mathcal{Q}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^\mu - 2\mathcal{Q}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}^\mu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(n-1)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\bar{\alpha}} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\bar{\alpha}}\right)(f) + 4(n-1)\xi_{\bar{\alpha}}(f)\xi_{\bar{\beta}}(f), \\
(4.12) \quad & \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) \\
& = -2(n+2)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f) \\
& \quad + \delta_{\alpha\beta}\left\{-2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f) - 4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) + 2(n+1)i\xi(f)\right\}
\end{aligned}$$

であり, 擬エルミート Ricci 曲率については

$$(4.13) \quad \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}) = i(n+2)\xi_{\bar{\mu}}(f)\mathcal{Q}_{\alpha\mu}^{\bar{\beta}},$$

$$(4.14) \quad \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\bar{\alpha}}, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\bar{\alpha}}, \xi_{\bar{\beta}}) = i(n+2)\xi_{\mu}(f)\mathcal{Q}_{\bar{\alpha}\bar{\mu}}^{\beta},$$

$$\begin{aligned}
(4.15) \quad & \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) \\
& = -2(n+2)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f) \\
& \quad + \delta_{\alpha\beta}\left\{-2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f) - 4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) + 2(n+1)i\xi(f)\right\}
\end{aligned}$$

である. そしてスカラー曲率, 擬エルミートスカラー曲率については

$$\begin{aligned}
(4.16) \quad & e^{2f}s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla} \\
& = \frac{1}{2}\left\{e^{2f}s(\tilde{\nabla}) - s(\nabla)\right\} \\
& = -4(n+1)\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f) - 4n(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) + 2n(n+1)i\xi(f) \\
& = 2(n+1)\Delta_H f - 4n(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)
\end{aligned}$$

である. ただし, $\Delta_H f = \sum_{A \neq 0} \left(\xi_{\bar{A}}\xi_A - \nabla_{\xi_{\bar{A}}}\xi_A\right)(f)$ とおいている.

証明. ここでは特に, (4.15), (4.16) について詳しく証明する.

$$\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(X, Y) = \tilde{g}(F(\tilde{\nabla})(X, Y)\tilde{\xi}_{\lambda}, \tilde{\xi}_{\bar{\lambda}})$$

であることに注意する. まず, (4.15) を示す. (4.9) より,

$$\begin{aligned}
& g(F(\tilde{\nabla})(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\lambda}}) - g(F(\nabla)(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\lambda}}) \\
& = g(F(\tilde{\nabla})(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}})\xi_{\lambda}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) \\
& = -\delta_{\lambda\alpha} \cdot 2\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\lambda} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\lambda}\right)(f) - \delta_{\lambda\alpha} \cdot \delta_{\lambda\beta} 4\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \\
& \quad - \delta_{\lambda\lambda} \cdot 2\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f) - \delta_{\lambda\lambda} \cdot \delta_{\alpha\beta} 4\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \\
& \quad - \delta_{\lambda\nu} \cdot \delta_{\lambda\beta} 2\left(\xi_{\alpha}\xi_{\bar{\nu}} - \nabla_{\xi_{\alpha}}\xi_{\bar{\nu}}\right)(f) - \delta_{\lambda\nu} \cdot \delta_{\alpha\beta} 2\left(\xi_{\lambda}\xi_{\bar{\nu}} - \nabla_{\xi_{\lambda}}\xi_{\bar{\nu}}\right)(f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2(n+1)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f)-\delta_{\alpha\beta}4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad -2\left(\xi_{\alpha}\xi_{\bar{\beta}}-\nabla_{\xi_{\alpha}}\xi_{\bar{\beta}}\right)(f)-\delta_{\alpha\beta}2\left(\xi_{\nu}\xi_{\bar{\nu}}-\nabla_{\xi_{\nu}}\xi_{\bar{\nu}}\right)(f) \\
&= -2(n+1)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f)-\delta_{\alpha\beta}4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&\quad -2\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f)+\xi(f)\cdot 2i\delta_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+\xi(f)\cdot i2n\delta_{\alpha\beta} \\
&= -2(n+2)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f) \\
&\quad +\delta_{\alpha\beta}\left\{-2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+i2(n+1)\xi(f)-4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。途中、 $\left(\xi_{\alpha}\xi_{\bar{\beta}}-\nabla_{\xi_{\alpha}}\xi_{\bar{\beta}}\right)-\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)=-T(\nabla)(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})=-\xi\cdot i\delta_{\alpha\beta}$ を用いた。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}}) &= e^{2f}\mathrm{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\tilde{\xi}_{\alpha},\tilde{\xi}_{\bar{\beta}})=e^{2f}\tilde{g}(F(\tilde{\nabla})(\tilde{\xi}_{\alpha},\tilde{\xi}_{\bar{\beta}})\tilde{\xi}_{\lambda},\tilde{\xi}_{\bar{\lambda}}) \\
&= g(F(\tilde{\nabla})(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})\xi_{\lambda},\xi_{\bar{\lambda}}) \\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})-2(n+2)\left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_{\alpha}\right)(f) \\
&\quad +\delta_{\alpha\beta}\left\{-2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+i2(n+1)\xi(f)-4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)\right\}
\end{aligned}$$

であり、(4.15) が言えた。次に、(4.16) を示す。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\alpha}})-\mathrm{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= -2(n+2)\left(\xi_{\bar{\alpha}}\xi_{\alpha}-\nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}}\xi_{\alpha}\right)(f) \\
&\quad +\delta_{\alpha\alpha}\left\{-2\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+i2(n+1)\xi(f)-4(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)\right\} \\
&= -2(n+2)\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f) \\
&\quad -2n\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+2n(n+1)i\xi(f)-4n(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \\
&= -4(n+1)\left(\xi_{\bar{\nu}}\xi_{\nu}-\nabla_{\xi_{\bar{\nu}}}\xi_{\nu}\right)(f)+2n(n+1)i\xi(f)-4n(n+1)\xi_{\nu}(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)
\end{aligned}$$

であり、(4.16) が言えた。 ■

(4.12), (4.15) より、

$$\mathrm{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})-\mathrm{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})=\mathrm{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})-\mathrm{Ric}(\nabla)(\xi_{\alpha},\xi_{\bar{\beta}})$$

であることに注意せよ。

5 エルミート Tanno 接続を用いた Bochner 型の曲率テンソル

この章は本論文の中心である．エルミート Tanno 接続から, $B(\nabla)^0$, その他いくつかのテンソルを構成し, それらに関連する定理とその証明を [6] に基づき, 詳しく記そう．

5.1 $B(\nabla)^0$ の構成

序論でも表記したが,

$$\begin{aligned} B(\nabla)^0(X, \bar{Y})Z &= F(\nabla)(X, \bar{Y})Z - \frac{1}{n+2} \left\{ \text{Ric}^\nabla(Z, \bar{Y})X + \text{Ric}^\nabla(X, \bar{Y})Z \right. \\ &\quad \left. - g(Z, \bar{Y})\text{ric}^\nabla(X) - g(X, \bar{Y})\text{ric}^\nabla(Z) \right\} \\ &\quad + \frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)} \left\{ g(Z, \bar{Y})X + g(X, \bar{Y})Z \right\} \quad (X, Y, Z \in \Gamma(H_+)) \end{aligned}$$

によって定義される $B(\nabla)^0 \in \Gamma(H_+ \otimes H_+^* \otimes H_-^* \otimes H_+^*)$ を Bochner 型の曲率テンソルと呼ぶ．ただし, $\text{ric}^\nabla \in \Gamma(H_+ \otimes H_+^*)$ は, $\text{ric}^\nabla(Y) = \xi_\mu \cdot \text{Ric}^\nabla(\xi_\mu, Y)$ ($Y \in H_+$) によって定義される． $B(\nabla)^0$ は以下の性質を持つ．

定理 5.1 (Nagase-Sasaki [6, Theorem A])

$B(\nabla)^0$ は CR 共形変換で不変である．

これが本論文の主定理であり, 以下, この定理を証明するが, 最も重要なアイデアは, 曲率テンソルの差 $F(\tilde{\nabla}) - F(\nabla)$ (命題 4.4) を 2 種類の差 $\text{Ric}^{\tilde{\nabla}} - \text{Ric}^\nabla$ と $s^{\tilde{\nabla}} - s^\nabla$ (命題 4.5) を使って書き下せることに気付いたということである．

定理 5.1 の証明. $B(\nabla)^0 = B(\tilde{\nabla})^0$ であることを示せばよい．(4.9) より,

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\ &= -\delta_{\gamma\alpha} 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}}\xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_\beta \right)(f) - \delta_{\beta\alpha} 2 \left(\xi_{\bar{\lambda}}\xi_\gamma - \nabla_{\xi_{\bar{\lambda}}}\xi_\gamma \right)(f) \\ &\quad - \delta_{\beta\lambda} 2 \left(\xi_{\bar{\alpha}}\xi_\gamma - \nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}}\xi_\gamma \right)(f) - \delta_{\gamma\lambda} 2 \left(\xi_{\bar{\alpha}}\xi_\beta - \nabla_{\xi_{\bar{\alpha}}}\xi_\beta \right)(f) \\ &\quad + 2(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}) \left(i\xi(f) - 2\xi_\nu(f)\xi_{\bar{\nu}}(f) \right) \end{aligned}$$

と書ける．そして (4.15), (4.16) より,

$$\left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}^\nabla(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) \right\} + 2(n+2) \left(\xi_{\bar{\beta}}\xi_\alpha - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}}\xi_\alpha \right)(f)$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{\alpha\beta} \left\{ -2 \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) - 4(n+1) \xi_{\nu}(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) + 2(n+1) i \xi(f) \right\} \\
&= \delta_{\alpha\beta} \left\{ -2 \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) + \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{n} + \frac{4(n+1)}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) \right\} \\
&= \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{n} + \frac{2(n+2)}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) \right\}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad \left(\xi_{\bar{\beta}} \xi_{\alpha} - \nabla_{\xi_{\bar{\beta}}} \xi_{\alpha} \right) (f) &= -\frac{1}{2(n+2)} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\alpha}, \xi_{\bar{\beta}}) \right\} \\
&\quad + \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{2n(n+2)} + \frac{1}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. また, (4.16) より,

$$(5.3) \quad i \xi(f) - 2 \xi_{\nu}(f) \xi_{\bar{\nu}}(f) = \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{2n(n+1)} + \frac{2}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f)$$

である. (5.1) の右辺を (5.2), (5.3) を使って, $\text{Ric}^{\tilde{\nabla}} - \text{Ric}^{\nabla}$, $s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}$ で表すと

$$\begin{aligned}
&g(F(\tilde{\nabla})(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(F(\nabla)(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= \frac{\delta_{\gamma\alpha}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) \right\} + \frac{\delta_{\beta\alpha}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \right\} \\
&\quad + \frac{\delta_{\beta\lambda}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}) \right\} + \frac{\delta_{\gamma\lambda}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) \right\} \\
&\quad - 2(\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda} \delta_{\beta\alpha}) \left\{ \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{n(n+2)} + \frac{2}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) \right\} \\
&\quad + 2(\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda} \delta_{\beta\alpha}) \left\{ \frac{e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla}}{2n(n+1)} + \frac{2}{n} \left(\xi_{\bar{\nu}} \xi_{\nu} - \nabla_{\xi_{\bar{\nu}}} \xi_{\nu} \right) (f) \right\} \\
&= \frac{\delta_{\gamma\alpha}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) \right\} + \frac{\delta_{\beta\alpha}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \right\} \\
&\quad + \frac{\delta_{\beta\lambda}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}) \right\} + \frac{\delta_{\gamma\lambda}}{n+2} \left\{ \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) \right\} \\
&\quad - (\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda} \delta_{\beta\alpha}) \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} - s^{\nabla} \right\}
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}
(5.4) \quad &g(F(\tilde{\nabla})(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\alpha} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \delta_{\beta\alpha} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \\
&\quad - \delta_{\beta\lambda} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\lambda} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&\quad + (\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda} \delta_{\beta\alpha}) \frac{1}{(n+1)(n+2)} e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} \\
&= g(F(\nabla)(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}}) \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\alpha} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\beta}, \xi_{\bar{\lambda}}) - \delta_{\beta\alpha} \frac{1}{n+2} \text{Ric}^{\nabla}(\xi_{\gamma}, \xi_{\bar{\lambda}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{\beta\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + (\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\beta\alpha}) \frac{1}{(n+1)(n+2)} s^\nabla
\end{aligned}$$

が得られる．ここで、(5.4) の両辺を書き換える．左辺は

$$\begin{aligned}
& g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\alpha}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}}) - \delta_{\beta\alpha}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \\
& - \delta_{\beta\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + (\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\beta\alpha}) \frac{1}{(n+1)(n+2)} s^\nabla \\
& = g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}g(\text{ric}^\nabla(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}g(\text{ric}^\nabla(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + (g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}})) \frac{1}{(n+1)(n+2)} s^\nabla \\
& = g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}})
\end{aligned}$$

であり、右辺は

$$\begin{aligned}
& g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\alpha}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}}) - \delta_{\beta\alpha}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}}) \\
& - \delta_{\beta\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - \delta_{\gamma\lambda}\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + (\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\beta\alpha}) \frac{1}{(n+1)(n+2)} e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} \\
& = g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\tilde{g}(\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\tilde{g}(\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + (g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}})) \frac{1}{(n+1)(n+2)} e^{2f} s^{\tilde{\nabla}} \\
& = g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(\tilde{g}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\tilde{g}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(\tilde{g}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^{\tilde{\nabla}}}{(n+1)(n+2)}\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\tilde{g}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^{\tilde{\nabla}}}{(n+1)(n+2)}\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}})
\end{aligned}$$

と書き換えられる。したがって, (5.4) は

$$\begin{aligned}
& g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g\left(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}\right) - g\left(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}\right) \\
& + g(g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(g(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(g(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& = g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g\left(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}\right) - g\left(\frac{1}{n+2}\text{Ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}\right) \\
& + g(\tilde{g}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\gamma), \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\tilde{g}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{1}{n+2}\text{ric}^{\tilde{\nabla}}(\xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}}) \\
& + g(\tilde{g}(\xi_\beta, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^{\tilde{\nabla}}}{(n+1)(n+2)}\xi_\gamma, \xi_{\bar{\alpha}}) + g(\tilde{g}(\xi_\gamma, \xi_{\bar{\lambda}})\frac{s^{\tilde{\nabla}}}{(n+1)(n+2)}\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}})
\end{aligned}$$

の形に変形できる。この式より $B(\nabla)^0 = B(\tilde{\nabla})^0$ が成り立つ。 ■

また, $B(\nabla)^0$ の他に,

$$\begin{aligned}
B'(\nabla)^0(\bar{X}, Y)Z &= F(\nabla)(\bar{X}, Y)Z + \frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(Z, \bar{X})Y + \frac{1}{n+2}\text{Ric}^\nabla(Y, \bar{X})Z \\
& - g(Z, \bar{X})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(Y) - g(Y, \bar{X})\frac{1}{n+2}\text{ric}^\nabla(Z) \\
& - g(Z, \bar{X})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}Y - g(Y, \bar{X})\frac{s^\nabla}{(n+1)(n+2)}Z
\end{aligned}$$

によって定義される $B'(\nabla)^0 \in \Gamma(H_+ \otimes H_-^* \otimes H_+^* \otimes H_-^*)$ も考えられるが, これも (4.9) などから明らかに CR 共形変換で不変なテンソルである。

$B(\nabla)^0$ は Kähler 多様体における Bochner 曲率テンソルに見かけ上一致している。この一致が何を意味するのか, 筆者には大きな課題である。

5.2 その他の CR 共形不変なテンソルについて

ここでは, (4.7) に着目することで構成出来るテンソルをいくつか紹介する。Tanno [15, §4] に従って, M 上で消えない $2n+1$ 形式 ω について, ベクトル場 $\Xi_\pm^\omega \in \Gamma(H_\pm)$ を取る。 M 上で消えない $2n+1$ 形式 $dV_\theta := \theta \wedge (d\theta)^n$ とおこう。ある $h \in C^\infty(M)$ が存在して, $dV_\theta = e^h \omega$ 又は, $dV_\theta = -e^h \omega$ (以下, $dV_\theta = \pm e^h \omega$ と表す) と書ける。

$$\Xi_+^\omega = \xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(h) \in \Gamma(H_+), \quad \Xi_-^\omega = \xi_{\bar{\mu}} \cdot \xi_\mu(h) \in \Gamma(H_-),$$

$$\Xi^\omega = \Xi_+^\omega + \Xi_-^\omega \in \Gamma(\ker \theta)$$

とおこう.

$X, Y, Z \in \Gamma(H_+)$ について,

$$(5.5) \quad B(\nabla)^+(X, Y)Z = F(\nabla)(X, Y)Z$$

$$- \frac{1}{n-1} \left\{ g(Z, X) \operatorname{Ric}(\nabla)(Z, Y)X - \operatorname{Ric}(\nabla)(Z, X)Y \right\},$$

$$(5.6) \quad U^+(\Xi^\omega : X, Y, Z) = \frac{1}{n-1} \left\{ g(\mathcal{Q}(Z, X) - 2\mathcal{Q}(X, Z), J\Xi_+^\omega)Y \right. \\ \left. - g(\mathcal{Q}(Z, Y) - 2\mathcal{Q}(Y, Z), J\Xi_+^\omega)X \right\} \\ + g(\mathcal{Q}(X, Z), Y)J\Xi_+^\omega + g(\mathcal{Q}(X, Y) - \mathcal{Q}(Y, X), J\Xi_+^\omega)Z,$$

$$(5.7) \quad B(\nabla, \omega)^+(X, Y)Z = B(\nabla)^+(X, Y)Z - \frac{U^+(\Xi^\omega : X, Y, Z)}{2(n+1)}$$

によって定義される $B(\nabla)^+, B(\nabla, \omega)^+ \in \Gamma(H_+ \otimes H_+^* \otimes H_+^* \otimes H_+^*)$ に着目する. ただし $n \geq 2$ の場合だけを考えている. これらのテンソルについては以下の定理が成り立つ.

定理 5.2 (Nagase-Sasaki [6, Theorem A])

- (1) $n \geq 3$ のとき, $B(\nabla)^+$ が CR 共形変換で不変であることと, J が可積分であることは同値である. また, $B(\nabla, \omega)^+$ は CR 共形変換で不変である.
- (2) $n = 2$ のとき, $B(\nabla)^+$ は CR 共形変換で不変である.

証明. ここでも, 定理 5.1 の証明のアイディアに従い, $F(\tilde{\nabla}) - F(\nabla)$ は $\operatorname{Ric}(\tilde{\nabla}) - \operatorname{Ric}(\nabla)$ など書き表せるか考察する. (4.7), (4.10) を参照して

$$(5.8) \quad g(F(\tilde{\nabla}))(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}} - g(F(\nabla))(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}} \\ = \delta_{\alpha\lambda} 2 \left(\xi_\gamma \xi_\beta - \nabla_{\xi_\gamma} \xi_\beta \right) (f) - \delta_{\alpha\lambda} 4 \xi_\beta(f) \xi_\gamma(f) - \delta_{\alpha\gamma} 2 \left(\xi_\lambda \xi_\beta - \nabla_{\xi_\lambda} \xi_\beta \right) (f) \\ + \delta_{\alpha\gamma} 4 \xi_\beta(f) \xi_\lambda(f) + \xi_{\bar{\alpha}}(f) i \mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} + \delta_{\alpha\beta} \xi_{\bar{\mu}}(f) i \left(\mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\mu}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\mu}} \right) \\ = - \frac{\delta_{\alpha\lambda}}{n-1} \left(\operatorname{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\gamma) - \operatorname{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\gamma) \right) + \frac{\delta_{\alpha\lambda}}{n-1} \xi_{\bar{\mu}}(f) i \left(\mathcal{Q}_{\beta\gamma}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\mu}} \right) \\ + \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{n-1} \left(\operatorname{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\lambda) - \operatorname{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\lambda) \right) - \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{n-1} \xi_{\bar{\mu}}(f) i \left(\mathcal{Q}_{\beta\lambda}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\lambda\beta}^{\bar{\mu}} \right) \\ + \xi_{\bar{\alpha}}(f) i \mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} + \delta_{\alpha\beta} \xi_{\bar{\mu}}(f) i \left(\mathcal{Q}_{\gamma\lambda}^{\bar{\mu}} - \mathcal{Q}_{\lambda\gamma}^{\bar{\mu}} \right)$$

と計算できる. ここで,

$$(5.9) \quad U^+(\operatorname{grad}_+ f : X, Y, Z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \left\{ g(\mathcal{Q}(Z, X) - 2\mathcal{Q}(X, Z), J\text{grad}_+ f) Y \right. \\
&\quad \left. - g(\mathcal{Q}(Z, Y) - 2\mathcal{Q}(Y, Z), J\text{grad}_+ f) X \right\} + g(\mathcal{Q}(X, Z), Y) J\text{grad}_+ f \\
&\quad + g(\mathcal{Q}(X, Y) - \mathcal{Q}(Y, X), J\text{grad}_+ f) Z
\end{aligned}$$

とおくと (ただし, $\text{grad}_+ f = \xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(f)$ とおいている), (5.8) は

$$\begin{aligned}
(5.10) \quad & g(F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) - g(F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\delta_{\alpha\gamma} \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\lambda) - \delta_{\alpha\lambda} \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\gamma) \right) \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \left(\delta_{\alpha\gamma} \text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\lambda) - \delta_{\alpha\lambda} \text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\gamma) \right) \\
&\quad + g(U^+(\text{grad}_+ f : \xi_\gamma, \xi_\lambda, \xi_\beta), \xi_{\bar{\alpha}})
\end{aligned}$$

である. よって

$$\begin{aligned}
(5.11) \quad & F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta - F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\lambda)\xi_\gamma - \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\gamma)\xi_\lambda \right) \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \left(\text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\lambda)\xi_\gamma - \text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\gamma)\xi_\lambda \right) + U^+(\text{grad}_+ f : \xi_\gamma, \xi_\lambda, \xi_\beta)
\end{aligned}$$

である. ここで, $dV_{\tilde{\theta}}, dV_\theta$ は 0 でない $2n+1$ -形式だから, ある $h \in C^\infty(M)$ が存在し, $dV_{\tilde{\theta}} = \pm e^h dV_\theta = \pm e^{2(n+1)f+h}\omega$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}
e^{2f}\tilde{\Xi}_+^\omega - \Xi_+^\omega &= e^{2f}\tilde{\xi}_\mu \cdot \tilde{\xi}_{\bar{\mu}}(2(n+1)f+h) - \xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(h) \\
&= e^{2f} \cdot e^{-f}\xi_\mu \cdot e^{-f}\xi_{\bar{\mu}}(2(n+1)f+h) - \xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(h) \\
&= 2(n+1)\xi_\mu \cdot \xi_{\bar{\mu}}(f) = 2(n+1)\text{grad}_+ f
\end{aligned}$$

である. よって,

$$(5.12) \quad U^+(\text{grad}_+ f :) = \frac{\tilde{U}^+(\tilde{\Xi}_+^\omega :)}{2(n+1)} - \frac{U^+(\Xi_+^\omega :)}{2(n+1)}$$

が成り立つ. (5.11) は (5.12) により

$$\begin{aligned}
& F(\tilde{\nabla})(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta - \frac{1}{n-1} \left(\text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\lambda)\xi_\gamma - \text{Ric}(\tilde{\nabla})(\xi_\beta, \xi_\gamma)\xi_\lambda \right) - \frac{\tilde{U}^+(\tilde{\Xi}_+^\omega :)}{2(n+1)} \\
&= F(\nabla)(\xi_\gamma, \xi_\lambda)\xi_\beta - \frac{1}{n-1} \left(\text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\lambda)\xi_\gamma - \text{Ric}(\nabla)(\xi_\beta, \xi_\gamma)\xi_\lambda \right) - \frac{U^+(\Xi_+^\omega :)}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

と書き換えられる。したがって、 $B(\nabla, \omega)^+$ が CR 共形変換で不変であることが言えた。後は次を示せばよい:

$$(5.13) \quad J \text{ が可積分である, 又は, } n = 2 \text{ のとき, } U^+(\text{grad}_+ f :) = 0 \text{ である.}$$

以下, (5.13) を示そう。まず,

$$(5.14) \quad g(U^+(\text{grad}_+ f : X, Y, Z), \bar{W}) = g(\mathcal{U}^+(X, Y, Z, \bar{W}), J\text{grad}_+ f)$$

によって定義される $\mathcal{U}^+(X, Y, Z, \bar{W})$ ($X, Y, Z, W \in \Gamma(H_+)$) に着目する。 $U^+(\text{grad}_+ f :)$ と \mathcal{U}^+ について以下が成り立つ:

$$(5.15) \quad U^+(\text{grad}_+ f :) = 0 \text{ と, } \mathcal{U}^+ = 0 \text{ は同値である.}$$

(5.15) の証明. $\mathcal{U}^+ = 0$ であるとき, $U^+(\text{grad}_+ f :) = 0$ は (5.14) より明らか。逆に, $U^+(\text{grad}_+ f :) = 0$ であるとき,

$$(5.16) \quad 0 = g(\mathcal{U}^+(X, Y, Z, \bar{W}), J\text{grad}_+ f) = g(\mathcal{U}^+(X, Y, Z, \bar{W}), i\xi_{\bar{\mu}}(f) \cdot \xi_{\mu})$$

である。与えられた点 $P \in M$ の近傍で正規直交枠 $(e_0, e_1, \dots, e_{2n})$ を取る。 P において, $(\partial/\partial x_i) = e_i$ を満たす正規座標系 $x_{\bullet} = (x_0, x_1, \dots, x_{2n})$ を取る。このとき, P の近傍で $f = x_{\nu}$ ($\nu \in \{1, \dots, 2n\}$) を取れば, $\xi_{\nu}(f)|_P \neq 0$, $\xi_{\mu}(f)|_P = 0$ ($\mu \neq \nu$) である。よって, (5.16) より $\mathcal{U}^+ = 0$ であり, (5.15) が示せた。(5.15) から, 以下を示せば (5.13) が示せたことになる:

$$(5.17) \quad n \geq 3 \text{ の場合には, } \mathcal{U}^+ = 0 \text{ と, } Q = 0 \text{ は同値である.}$$

$$(5.18) \quad n = 2 \text{ の場合には, 必然的に } \mathcal{U}^+ = 0 \text{ である.}$$

(5.17), (5.18) の証明. (5.9), 又は (5.14) より

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(\xi_{\gamma}, \xi_{\lambda}, \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) &= -\mathcal{U}^+(\xi_{\lambda}, \xi_{\gamma}, \xi_{\beta}, \xi_{\bar{\alpha}}) \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \delta_{\alpha\lambda} \left(\mathcal{Q}(\xi_{\beta}, \xi_{\gamma}) - 2\mathcal{Q}(\xi_{\gamma}, \xi_{\beta}) \right) - \delta_{\alpha\gamma} \left(\mathcal{Q}(\xi_{\beta}, \xi_{\lambda}) - 2\mathcal{Q}(\xi_{\lambda}, \xi_{\beta}) \right) \right\} \\ &\quad + g(\mathcal{Q}(\xi_{\gamma}, \xi_{\beta}), \xi_{\lambda}) \xi_{\bar{\alpha}} + \delta_{\alpha\beta} \left(\mathcal{Q}(\xi_{\gamma}, \xi_{\lambda}) - \mathcal{Q}(\xi_{\lambda}, \xi_{\gamma}) \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \delta_{\alpha\lambda} \left(\mathcal{Q}_{\beta\gamma}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} - \delta_{\alpha\gamma} \left(\mathcal{Q}_{\beta\lambda}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\lambda\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} \right\} + \mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\alpha}} + \delta_{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\gamma\mu}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\mu}} \end{aligned}$$

と書ける．まず, (5.17) を示す．よって, $n \geq 3$ のとき, $\mathcal{Q} = 0$ ならば $\mathcal{U}^+ = 0$ は明らかである．逆に $\mathcal{U}^+ = 0$ としよう．すると $\alpha \notin \{\gamma, \lambda\}$ として

$$\mathcal{U}^+(\xi_\gamma, \xi_\lambda, \xi_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}}) = \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\alpha}} + \mathcal{Q}_{\gamma\mu}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\mu}} = 2\mathcal{Q}_{\gamma\alpha}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\alpha}} + \sum_{\mu \neq \alpha} \mathcal{Q}_{\gamma\mu}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\mu}}$$

は消える．よって, 任意の γ, λ, ν において, $\mathcal{Q}_{\gamma\nu}^{\bar{\lambda}} = 0$ である．すなわち, $\mathcal{Q} = 0$ が言えた．次に, (5.18) を示す． $n = 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(\xi_\gamma, \xi_\lambda, \xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) &= -\mathcal{U}^+(\xi_\lambda, \xi_\gamma, \xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) \\ &= \delta_{\alpha\lambda} \left(\mathcal{Q}_{\beta\gamma}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} - \delta_{\alpha\gamma} \left(\mathcal{Q}_{\beta\lambda}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{\lambda\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} + \mathcal{Q}_{\gamma\beta}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\alpha}} + \delta_{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\gamma\mu}^{\bar{\lambda}} \xi_{\bar{\mu}} \end{aligned}$$

である．よって, \mathcal{U}^+ の値は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(\xi_\gamma, \xi_\gamma, \xi_\beta, \xi_{\bar{\alpha}}) &= 0, \\ \mathcal{U}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_\beta, \xi_{\bar{1}}) &= - \left(\mathcal{Q}_{\beta 2}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{2\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} + \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} \xi_{\bar{1}} + \delta_{1\beta} \mathcal{Q}_{1\mu}^{\bar{2}} \xi_{\bar{\mu}} \\ &= - \left(\mathcal{Q}_{\beta 2}^{\bar{1}} - 2\mathcal{Q}_{2\beta}^{\bar{1}} \right) \xi_{\bar{1}} - \mathcal{Q}_{\beta 2}^{\bar{2}} \xi_{\bar{2}} + \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} \xi_{\bar{1}} + \delta_{1\beta} \mathcal{Q}_{11}^{\bar{2}} \xi_{\bar{1}} + \delta_{1\beta} \mathcal{Q}_{12}^{\bar{2}} \xi_{\bar{2}} \\ &= \left(\mathcal{Q}_{12}^{\bar{\beta}} - \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} + \delta_{1\beta} \mathcal{Q}_{11}^{\bar{2}} \right) \xi_{\bar{1}} + \left(-\mathcal{Q}_{\beta 2}^{\bar{2}} + \delta_{1\beta} \mathcal{Q}_{12}^{\bar{2}} \right) \xi_{\bar{2}} = 0, \\ \mathcal{U}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_\beta, \xi_{\bar{2}}) &= \left(\mathcal{Q}_{\beta 1}^{\bar{\mu}} - 2\mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{\mu}} \right) \xi_{\bar{\mu}} + \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} \xi_{\bar{2}} + \delta_{2\beta} \mathcal{Q}_{1\mu}^{\bar{2}} \xi_{\bar{\mu}} \\ &= \mathcal{Q}_{\beta 1}^{\bar{1}} \xi_{\bar{1}} + \left(\mathcal{Q}_{\beta 1}^{\bar{2}} - 2\mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} \right) \xi_{\bar{2}} + \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} \xi_{\bar{2}} + \delta_{2\beta} \mathcal{Q}_{11}^{\bar{2}} \xi_{\bar{1}} + \delta_{2\beta} \mathcal{Q}_{12}^{\bar{2}} \xi_{\bar{2}} \\ &= \left(-\mathcal{Q}_{11}^{\bar{\beta}} + \delta_{2\beta} \mathcal{Q}_{11}^{\bar{2}} \right) \xi_{\bar{1}} + \left(\mathcal{Q}_{\beta 1}^{\bar{2}} - \mathcal{Q}_{1\beta}^{\bar{2}} + \delta_{2\beta} \mathcal{Q}_{12}^{\bar{2}} \right) \xi_{\bar{2}} = 0 \end{aligned}$$

のいずれかである．したがって, $n = 2$ の場合, 確かに必然的に $\mathcal{U}^+ = 0$ である． ■

(4.8) について考えると, $\Gamma(H_+ \otimes H_-^* \otimes H_-^* \otimes H_+^*)$ の元として, $B(\nabla)^+, B(\nabla, \omega)^+$ に類似したテンソルを構成することができ, それらテンソルについて定理 5.2 と同様の結果が得られる．そうした題材についてはここでは扱わないが, 興味のある読者は Nagase-Sasaki [6] を参照していただきたい．

6 付録

6.1 エルミート Tanno 接続と Levi-Civita 接続との関係

(2.11) において, ${}^*\nabla$ と ∇ の関係式が与えた. また, ${}^*\nabla$ と ∇^g については Blair-
Dragomir [1, §7] により,

$$(6.1) \quad g({}^*\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_X^g Y, Z) - g(\tau(X), Z)\theta(Y) + g(\tau(X), Y)\theta(Z) \\ + \frac{1}{2} \left\{ g(Y, JZ)\theta(X) + g(X, JZ)\theta(Y) - g(X, JY)\theta(Z) \right\}$$

が成り立つことが分かっている. (2.11), (6.1) により, ∇ と ∇^g の関係式を導くことができる.

命題 6.1

$$(6.2) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(LX, Y)\xi - \theta(Y)\tau X \\ - \frac{1}{2}\theta(X)JY - \frac{1}{2}\theta(Y)JX - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y, X)$$

である.

この命題により, 曲率テンソル, および Ricci 曲率, スカラー曲率の関係式も計算できる.

系 6.2

$$(6.3) \quad F(\nabla^g)(X, Y)Z \\ = F(\nabla)(X, Y)Z + (LX \wedge LY)Z \\ - \frac{1}{2}g(X, JY)JZ + \theta(Z)S^{\nabla, \tau}(X, Y) - g(S^{\nabla, \tau}(X, Y), Z)\xi \\ + \theta(Z)(\theta \wedge \mathcal{O})(X, Y) - g((\theta \wedge \mathcal{O})(X, Y), Z)\xi \\ + \frac{1}{2}J \left\{ (\nabla_X \mathcal{Q})(Z, Y) - (\nabla_Y \mathcal{Q})(Z, X) + \mathcal{Q}(Z, T(\nabla)(X, Y)) \right\} \\ + \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, Y), X) - \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(Z, X), Y) \right\} - \frac{1}{2}\theta(X)\mathcal{Q}(Z, Y) \\ + \frac{1}{2}\theta(Y)\mathcal{Q}(Z, X) + \frac{1}{2}\theta(Z) \left\{ \mathcal{Q}(Y, X) + J\mathcal{Q}(\tau Y, X) + J\tau\mathcal{Q}(Y, X) \right. \\ \left. - \mathcal{Q}(X, Y) - J\mathcal{Q}(\tau X, Y) - J\tau\mathcal{Q}(X, Y) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left\{ g(\mathcal{Q}(Y, X), Z) + g(J\mathcal{Q}(\tau Y, X), Z) + g(J\tau\mathcal{Q}(Y, X), Z) \right. \\ \left. - g(\mathcal{Q}(X, Y), Z) - g(J\mathcal{Q}(\tau X, Y), Z) - g(J\tau\mathcal{Q}(X, Y), Z) \right\} \xi,$$

$$\begin{aligned}
(6.4) \quad & \text{Ric}(\nabla^g)(Z, Y) \\
&= \text{Ric}(\nabla)(Z, Y) + g(\tau Y, JZ) - \frac{1}{2}g(Y, Z) \\
&\quad + \frac{n+1}{2}\theta(Y)\theta(Z) + \theta(Z)g((\nabla_{\xi_A}\tau)(Y), \xi_{\bar{A}}) \\
&\quad - 2\theta(Y)\theta(Z)g(\tau\xi_\alpha, \tau\xi_{\bar{\alpha}}) \\
&\quad + \frac{1}{2}g((\nabla_{\xi_A}Q)(Z, Y), J\xi_{\bar{A}}) + \frac{1}{4}g(Q(Z, Q(\xi_A, Y) - Q(Y, \xi_A), \xi_{\bar{A}}) \\
&\quad + \frac{1}{4}g(Q(Z, \xi_A), Q(\xi_{\bar{A}}, Y)) - g((\nabla_\xi\tau\nabla)(Y), Z) \\
&\quad + \frac{1}{2}\theta(Z)g(J\tau Q(Y, \xi_A) - JQ(\tau\xi_A, Y) - J\tau Q(\xi_A, Y), \xi_{\bar{A}}),
\end{aligned}$$

$$(6.5) \quad s(\nabla^g) = s(\nabla) - 2|\tau|^2 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}|Q|^2$$

と記述できる．ただし,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \tau^2 + J\tau - \frac{1}{4}, \\
(X \wedge Y)Z &= g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \\
(\theta \wedge \mathcal{O})(X, Y) &= \theta(X)\mathcal{O}(Y) - \theta(Y)\mathcal{O}(X), \\
S^{\nabla, \tau}(X, Y) &= (\nabla_X\tau)Y - (\nabla_Y\tau)X
\end{aligned}$$

とおいている．

6.2 Levi-Civita 接続の CR 共形変換

最後に, Levi-Civite 接続および, その曲率テンソルや Ricci 曲率などの CR 共形変換を記述しよう．これは, Levi-Civita 接続とエルミート Tanno 接続における関係式と, エルミート Tanno 接続の CR 共形変換における式を組み合わせることによって得られる．ここでは特に, $\ker \theta \otimes \mathbb{C} = H_+ \oplus H_-$ における値にのみ着目する．以下, $X, Y, Z \in H_+$ であるとする．

命題 6.3 Levi-Civita 接続は CR 共形変換によって

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\tilde{g}}Y &= \nabla_X^gY + 2Y(f)X + 2X(f)Y - e^{2f}\tilde{g}(\tilde{\tau}X, Y)\tilde{\xi} + g(\tau X, Y)\xi, \\
\nabla_{\bar{X}}^{\tilde{g}}Y &= \nabla_{\bar{X}}^gY - Y(f)\bar{X} - \bar{X}(f)Y - g(\bar{X}, Y)\xi_\rho(f)\xi_{\bar{\rho}} + g(\bar{X}, Y)\xi(f)\xi
\end{aligned}$$

と変換される.

証明.

$$\nabla^{\tilde{g}} = \nabla^g + \left(\nabla^{\tilde{g}} - \tilde{\nabla} \right) - \left(\nabla^g - \nabla \right) + \left(\tilde{\nabla} - \nabla \right)$$

であるから, 命題 4.2, 命題 6.1 によりを用いることにより得られる. ■

$F(\nabla^g)$, $\text{Ric}(\nabla^g)$, $s(\nabla^g)$ など, 同様の計算で以下のように記述される.

命題 6.4 曲率テンソルについては,

$$\begin{aligned} & F(\nabla^{\tilde{g}})(X, Y)Z \\ &= F(\nabla^g)(X, Y)Z \\ &+ \left((XZ - \nabla_X^g Z)(f) - g(\tau Z, X)\xi(f) - 2X(f)Z(f) + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\rho}}(f)g(Q(X, \xi_{\rho}), Z) \right) Y \\ &- \left((YZ - \nabla_Y^g Z)(f) - g(\tau Z, Y)\xi(f) - 2Y(f)Z(f) + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\rho}}(f)g(Q(Y, \xi_{\rho}), Z) \right) X \\ &+ ig(Q(X, \xi_{\bar{\rho}}(f)\xi_{\rho}), Y)Z \\ &+ \left\{ (\tilde{g}(\tilde{\tau}X, Z)\tilde{g}(\tilde{\tau}Y, \xi_{\rho}) - \tilde{g}(\tilde{\tau}Y, Z)\tilde{g}(\tilde{\tau}X, \xi_{\rho})) - g(\tau X, Z)g(\tau Y, \xi_{\rho}) \right. \\ &\quad + g(\tau Y, Z)g(\tau X, \xi_{\rho}) + iX(f)g(Q(Z, Y), \xi_{\rho}) \\ &\quad \left. + iY(f)g(Q(\xi_{\rho}, X), Z) + iZ(f)g(Q(X, \xi_{\rho}), Y) \right\} \xi_{\bar{\rho}} \\ &- \left\{ \tilde{g}((\nabla_X^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Y, Z) - \tilde{g}((\nabla_Y^{\tilde{g}}\tilde{\tau})(X), Z) \right\} \tilde{\xi} + \left\{ g((\nabla_X^g\tau)Y, Z) - g((\nabla_Y^g\tau)(X), Z) \right\} \xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F(\nabla^{\tilde{g}})(X, \bar{Y})Z \\ &= F(\nabla^g)(X, \bar{Y})Z \\ &+ \left(-\frac{1}{4}g(Z, \bar{Y})(e^{2f} - 1) - 2(\bar{Y}Z - \nabla_{\bar{Y}}^g Z)(f) - 4g(Z, \bar{Y})\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f) \right) X \\ &+ \left(-\frac{1}{2}g(X, \bar{Y})(e^{2f} - 1) - 2(\bar{Y}X - \nabla_{\bar{Y}}^g X)(f) - 4g(X, \bar{Y})\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f) \right) Z \\ &+ \left((\tilde{g}(\tilde{\tau}X, Z)\tilde{\tau}\bar{Y} - g(\tau X, Z)\tau\bar{Y}) \right. \\ &\quad \left. - 2g(Z, \bar{Y})(X\xi_{\bar{\rho}} - \nabla_X^g \xi_{\bar{\rho}})(f) - 2g(X, \bar{Y})(Z\xi_{\bar{\rho}} - \nabla_Z^g \xi_{\bar{\rho}})(f) \right) \xi_{\rho} \\ &+ \left(\left(XZ - \nabla_X^g Z \right)(f) - 2X(f)Z(f) \right. \\ &\quad \left. - g(\tau Z, X)\xi(f) - \frac{i}{2}\xi_{\bar{\rho}}(f)g(Q(X, \xi_{\rho}), Z) \right) \bar{Y} \\ &+ \left(g(Z, \bar{Y}) \left\{ - \left(X\xi_{\rho} - \nabla_X^g \xi_{\rho} \right)(f) + 2X(f)\xi_{\rho}(f) + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\nu}}(f)g(Q(X, \xi_{\nu}), \xi_{\rho}) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(\tau\xi_\rho, X)\xi(f)\Big\} + i\bar{Y}(f)g(Q(Z, X), \xi_\rho) + ig(\bar{Y}, X)\xi_{\bar{\nu}}(f)g(Q(Z, \xi_\nu), \xi_\rho)\Big)\xi_{\bar{\rho}} \\
& +\frac{i}{2}\tilde{g}(\tilde{Q}(\bar{\tau}\bar{Y}, X), Z)\tilde{\xi} - \frac{i}{2}g(Q(\tau\bar{Y}, X), Z)\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F(\nabla^{\tilde{g}})(\bar{X}, \bar{Y})Z \\
& = F(\nabla^g)(\bar{X}, \bar{Y})Z \\
& + i\xi_\rho(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\rho}}), \bar{Y})Z \\
& + \Big(g(Z, \bar{X})\Big((\xi_{\bar{\rho}}\bar{Y} - \nabla_{\xi_{\bar{\rho}}}^g \bar{Y})(f) - 2\xi_{\bar{\rho}}(f)\bar{Y}(f) - g(\tau\xi_{\bar{\rho}}, \bar{Y})\xi(f) \\
& \quad - \frac{i}{2}\xi_\nu(f)g(Q(\bar{Y}, \xi_{\bar{\nu}}), \xi_{\bar{\rho}})\Big) - g(Z, \bar{Y})\Big((\xi_{\bar{\rho}}\bar{X} - \nabla_{\xi_{\bar{\rho}}}^g \bar{X})(f) - 2\xi_{\bar{\rho}}(f)\bar{X}(f) \\
& \quad - g(\tau\xi_{\bar{\rho}}, \bar{X})\xi(f) - \frac{i}{2}\xi_\nu(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\nu}}), \xi_{\bar{\rho}})\Big) + iZ(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\rho}}), \bar{Y})\Big)\xi_\rho \\
& + \frac{1}{4}g(Z, \bar{Y})(e^{2f} - 1)\bar{X} - \frac{1}{4}g(Z, \bar{X})(e^{2f} - 1)\bar{Y} \\
& + \frac{i}{2}\tilde{g}(\tilde{\tau}Z, \xi_\rho)\tilde{g}(\tilde{Q}(\bar{X}, \bar{Y}) - \tilde{Q}(\bar{Y}, \bar{X}), \xi_{\bar{\rho}})\tilde{\xi} \\
& - \frac{i}{2}g(\tau Z, \xi_\rho)g(Q(\bar{X}, \bar{Y}) - Q(\bar{Y}, \bar{X}), \xi_{\bar{\rho}})\xi
\end{aligned}$$

である。Ricci 曲率について,

$$\begin{aligned}
& \text{Ric}(\nabla^{\tilde{g}})(X, Y) \\
& = \text{Ric}(\nabla^g)(X, Y) - 2(n+1)\Big(YX - \nabla_Y^g X\Big)(f) \\
& \quad + 4(n+1)Y(f)X(f) + 2(n+1)g(\tau X, Y)\xi(f) \\
& \quad + i\xi_{\bar{\rho}}(f)(g(Q(X, Y) + Q(Y, X), \xi_\rho) - \Big\{\tilde{g}((\nabla_{\xi}^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Y, X) - g((\nabla_{\xi}^g\tau)Y, X)\Big\}), \\
& \text{Ric}(\nabla^{\tilde{g}})(X, \bar{Y}) \\
& = \text{Ric}(\nabla^g)(X, \bar{Y}) - \frac{1}{2}(e^{2f} - 1)g(X, \bar{Y}) - 2(n+2)\Big(\bar{Y}X - \nabla_{\bar{Y}}^g X\Big)(f) \\
& \quad + g(X, \bar{Y})\Big\{\xi(\xi(h)) + 2\Delta^H f - 4(n+1)\xi_\nu(f)\xi_{\bar{\nu}}(f)\Big\}
\end{aligned}$$

である。スカラー曲率について,

$$\begin{aligned}
e^{2f}s(\nabla^{\tilde{g}}) - s(\nabla^g) & = -2\Big(e^{2f}|\tilde{\tau}|^2 - |\tau|^2\Big) + 4(n+1)\Delta^H f \\
& \quad - 8n(n+1)\xi_\rho(f)\xi_{\bar{\rho}}(f)
\end{aligned}$$

である。 ■

以上のように, Levi-Civita 接続とその曲率テンソルなどの CR 共形変換における変換則を記述することができたが, これらの結果から CR 共形変換における Weyl テンソルの変換則を記述することができた.

定理 6.5 $W(\nabla^{\tilde{g}})$ と $W(\nabla^g)$ との関係式は,

$$\begin{aligned}
& W(\nabla^{\tilde{g}})(X, Y)Z \\
&= W(\nabla^g)(X, Y)Z \\
&+ \left(-\frac{3}{2n-1} \left\{ (XZ - \nabla_X^g Z)(f) - g(\tau Z, X)\xi(f) - 2X(f)Z(f) \right\} \right. \\
&\quad + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\rho}}(f)g(Q(X, \xi_{\rho}), Z) + \frac{i}{2n-1}\xi_{\bar{\rho}}(f)(g(Q(X, Z) + Q(Z, X), \xi_{\rho}) \\
&\quad \quad \quad \left. - \frac{1}{2n-1} \left\{ \tilde{g}((\nabla_{\xi}^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Z, X) - g((\nabla_{\xi}^g\tau)Z, X) \right\} \right) Y \\
&- \left(-\frac{3}{2n-1} \left\{ (YZ - \nabla_Y^g Z)(f) - g(\tau Z, Y)\xi(f) - 2Y(f)Z(f) \right\} \right. \\
&\quad + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\rho}}(f)g(Q(Y, \xi_{\rho}), Z) + \frac{i}{2n-1}\xi_{\bar{\rho}}(f)(g(Q(Y, Z) + Q(Z, Y), \xi_{\rho}) \\
&\quad \quad \quad \left. - \frac{1}{2n-1} \left\{ \tilde{g}((\nabla_{\xi}^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Z, Y) - g((\nabla_{\xi}^g\tau)Z, Y) \right\} \right) X \\
&+ ig(Q(X, \xi_{\bar{\rho}}(f)\xi_{\rho}), Y)Z \\
&+ (\tilde{g}(\tilde{\tau}X, Z)\tilde{\tau}Y - \tilde{g}(\tilde{\tau}Y, Z)\tilde{\tau}X) - (g(\tau X, Z)\tau Y - g(\tau Y, Z)\tau X) \\
&\quad + iX(f)Q(Z, Y) - iY(f)Q(Z, X) + iZ(f)(Q(X, Y) - Q(Y, X)) \\
&- \left\{ \tilde{g}((\nabla_X^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Y, Z) - \tilde{g}((\nabla_Y^{\tilde{g}}\tilde{\tau})(X), Z) \right\} \tilde{\xi} \\
&+ \left\{ g((\nabla_X^g\tau)Y, Z) - g((\nabla_Y^g\tau)(X), Z) \right\} \xi, \\
& W(\nabla^{\tilde{g}})(X, \bar{Y})Z \\
&= W(\nabla^g)(X, \bar{Y})Z \\
&+ \left(-\frac{n-2}{2(2n-1)}g(Z, \bar{Y})(e^{2f}-1) - \frac{2(n-3)}{2n-1}(\bar{Y}Z - \nabla_{\bar{Y}}^g Z)(f) \right. \\
&\quad + g(Z, \bar{Y}) \left\{ -\frac{4(n-1)}{2n-1}\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f) - \frac{1}{n(2n-1)}(e^{2f}|\tilde{\tau}|^2 - |\tau|^2) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{2}{n(2n-1)}\Delta^H f \right\} \right) X \\
&+ \left(-\frac{3}{2n-1} \left\{ (XZ - \nabla_X^g Z)(f) - 2X(f)Z(f) - g(\tau Z, X)\xi(f) \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2n-3}{2(2n-1)}Q(X, Z)(f) + \frac{2n+1}{2(2n-1)}Q(Z, X)(f) \\
& \quad -\frac{1}{2n-1}\left\{\tilde{g}((\nabla_{\xi}^{\tilde{g}}\tilde{\tau})Z, X) - g((\nabla_{\xi}^g\tau)Z, X)\right\}\Bigg)\bar{Y} \\
& + \left(-\frac{1}{2}g(X, \bar{Y})(e^{2f}-1) - 2(\bar{Y}X - \nabla_{\bar{Y}}^gX)(f) - 4g(X, \bar{Y})\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f)\right)Z \\
& + (\tilde{g}(\tilde{\tau}X, Z)\tilde{\tau}\bar{Y} - g(\tau X, Z)\tau\bar{Y}) \\
& + \left(-2g(Z, \bar{Y})(X\xi_{\bar{\rho}} - \nabla_X^g\xi_{\bar{\rho}})(f) - 2g(X, \bar{Y})(Z\xi_{\bar{\rho}} - \nabla_Z^g\xi_{\bar{\rho}})(f)\right)\xi_{\rho} \\
& + \left(g(Z, \bar{Y})\left\{-\left(X\xi_{\rho} - \nabla_X^g\xi_{\rho}\right)(f) + 2X(f)\xi_{\rho}(f) + g(\tau\xi_{\rho}, X)\xi(f) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{i}{2}\xi_{\bar{\nu}}(f)g(Q(X, \xi_{\nu}), \xi_{\rho})\right\} \right. \\
& \quad \left. + i\bar{Y}(f)g(Q(Z, X), \xi_{\rho}) + ig(\bar{Y}, X)\xi_{\bar{\nu}}(f)g(Q(Z, \xi_{\nu}), \xi_{\rho})\right)\xi_{\bar{\rho}}, \\
& W(\nabla^{\tilde{g}})(\bar{X}, \bar{Y})Z \\
& = W(\nabla^g)(X, \bar{Y})Z \\
& + \left(i\xi_{\rho}(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\rho}}), \bar{Y})Z + iZ(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\rho}}), \bar{Y}) \right. \\
& \quad + g(Z, \bar{X})\left((\xi_{\bar{\rho}}\bar{Y} - \nabla_{\xi_{\bar{\rho}}}^g\bar{Y})(f) - 2\xi_{\bar{\rho}}(f)\bar{Y}(f) \right. \\
& \quad \left. \left. - g(\tau\xi_{\bar{\rho}}, \bar{Y})\xi(f) - \frac{i}{2}\xi_{\nu}(f)g(Q(\bar{Y}, \xi_{\bar{\nu}}), \xi_{\bar{\rho}})\right) \right. \\
& \quad - g(Z, \bar{Y})\left((\xi_{\bar{\rho}}\bar{X} - \nabla_{\xi_{\bar{\rho}}}^g\bar{X})(f) - 2\xi_{\bar{\rho}}(f)\bar{X}(f) \right. \\
& \quad \left. \left. - g(\tau\xi_{\bar{\rho}}, \bar{X})\xi(f) - \frac{i}{2}\xi_{\nu}(f)g(Q(\bar{X}, \xi_{\bar{\nu}}), \xi_{\bar{\rho}})\right)\right)\xi_{\rho} \\
& + \frac{i}{2}\tilde{g}(\tilde{Q}(\bar{X}, \bar{Y}) - \tilde{Q}(\bar{Y}, \bar{X}), \tilde{\tau}Z)\tilde{\xi} - \frac{i}{2}g(Q(\bar{X}, \bar{Y}) - Q(\bar{Y}, \bar{X}), \tau Z)\xi \\
& + \left(\frac{2(n+2)}{2n-1}\left(\bar{Y}Z - \nabla_{\bar{Y}}^gZ\right)(f) + \frac{g(\bar{Y}, Z)}{n(2n-1)}\left\{-\left(e^{2f}|\tilde{\tau}|^2 - |\tau|^2\right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(n^2+1)\Delta^H f + \frac{n(2n+1)}{4}(e^{2f}-1) - 4n(n+1)(2n-1)\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f)\right\}\right)\bar{X} \\
& + \left(\frac{2(n+2)}{2n-1}\left(\bar{X}Z - \nabla_{\bar{X}}^gZ\right)(f) + \frac{g(\bar{X}, Z)}{n(2n-1)}\left\{-\left(e^{2f}|\tilde{\tau}|^2 - |\tau|^2\right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(n^2+1)\Delta^H f + \frac{n(2n+1)}{4}(e^{2f}-1) - 4n(n+1)(2n-1)\xi_{\rho}(f)\xi_{\bar{\rho}}(f)\right\}\right)\bar{Y}
\end{aligned}$$

である.

証明. CR 共形変換した $2n+1$ 次元接触 Riemann 多様体 $(M, \tilde{\theta}, \tilde{g}, \tilde{J})$ における Weyl の曲率テンソル $W(\nabla^g)$ は

$$\begin{aligned} W(\nabla^{\tilde{g}})(X, Y)Z &= F(\nabla^{\tilde{g}})(X, Y)Z + \frac{1}{2n-1} \{ \text{Ric}(\nabla^{\tilde{g}})(X, Z)Y - \text{Ric}(\nabla^{\tilde{g}})(Y, Z)X \\ &\quad - \tilde{g}(Y, Z)\text{ric}(\nabla^{\tilde{g}})(X) + \tilde{g}(X, Z)\text{ric}(\nabla^{\tilde{g}})(Y) \} \\ &\quad + \frac{s(\nabla^{\tilde{g}})}{2n(2n-1)} \{ \tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y \} \end{aligned}$$

であるから, 命題 6.4 により変換前の $F(\nabla^g)$, $\text{Ric}(\nabla^g)$, $s(\nabla^g)$ など表すことができる. ■

このように命題 6.3, 命題 6.4 の結果を用いることで Levi-Civita 接続が定めるテンソルの CR 共形変換を計算することが出来る. ここでは Weyl の曲率テンソルにのみ注目して, 定理 6.5 のような結果が得られた.

参考文献

- [1] D. E. Blair and S. Dragomir, Pseudohermitian geometry on contact Riemannian manifolds, *Rend. Mat. Appl.* (7) **22** (2002), 275–341.
- [2] S. Dragomir and G. Tomassini, Differential geometry and analysis on CR manifolds, *Progress in Math.* **246**, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2006.
- [3] M. Nagase, The heat equation for the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.
- [4] R. Imai and M. Nagase, The second term in the asymptotics of Kohn-Rossi heat kernel on contact Riemannian manifolds, preprint.
- [5] M. Nagase, CR conformal Laplacian and some invariants on contact Riemannian manifolds, preprint.
- [6] M. Nagase and D. Sasaki, Hermitian Tanno connection and Bochner type tensors of contact Riemannian manifolds, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **25** (2018), 149–169.
- [7] M. Nagase, On the curvature of the Fefferman metric of contact Riemannian manifolds, to appear in *Tohoku Math. J.*
- [8] M. Nagase, Dirac operators on the Fefferman spin spaces in almost CR geometry, to appear in *Osaka J. Math.*
- [9] M. Nagase, On the Chern-Moser connection in almost CR-Geometry, preprint.
- [10] K. Sakamoto and Y. Takemura, Curvature invariants of CR-manifolds, *Kodai Math. J.* **4** (1981), 251–265.
- [11] N. Seshadri, Approximately Einstein ACH metrics, volume renormalization, and an invariant for contact manifolds, *Bull. Soc. Math. France* **137** (2009), 63–91.
- [12] S. Tanno, Variational problems on contact Riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314**(1) (1989), 349–379.

- [13] S. Tanno, The Bochner type curvature tensor of contact Riemannian structure, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 55–66.
- [14] S. Tanno, Pseudo-conformal invariants of type $(1, 3)$ of CR manifolds, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 195–204.
- [15] S. Tanno, The standard CR structure on the unit tangent bundle, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 535–543.