氏　　　　　名	郡司　克徳
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記号番号	博理工甲第1125号
学位授与年月日	平成31年3月20日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	The L^2-representations of the second variations and the Łojasiewicz inequality for decomposed Möbius energies （分解されたMöbiusエネルギーに対する第二変分のL^2表現とŁojasiewicz不等式）
論文審査委員	委員長　教　授　長澤　壯之 委　員　教　授　町原　秀二 委　員　准教授　Richard Neal Bez 委　員　教　授　下川　航也

論文の内容の要旨

n 次元空間内の Jordan 曲線を f とする。特に、$n=3$ の場合は f の像は結び目となる。曲線 f をなるべく複雑さの少ない形で描きたい。一つの方法として曲線の複雑さを表現する汎関数を導入し、その値を減らすように曲線を変形していくということが考えられる。O'Hara はこの動機付けのもとで以下のような汎関数を導入した。

$$\mathcal{E}_{(\alpha,p)}(f)=\iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2}\left(\frac{1}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}}^{\alpha}}-\frac{1}{\mathscr{D}(f(s_1),f(s_2))^{\alpha}}\right)^p ds_1ds_2.$$

ただし s は弧長パラメーターであり、$\Delta f=f(s_1)-f(s_2)$ とし、$\mathscr{D}$ は2点間の曲線に沿った距離を表すものとする。この汎関数は f が自己交叉を持つと発散する。特に $n=3$ の場合は f の結び目型を保存した変形が期待できる。$\alpha=2,p=1$ のときは Möbius 不変性という幾何学的対称性を持つため Möbius エネルギーと呼ばれる。以下 $\mathcal{E}_{(2,1)}$ を $\mathcal{E}$ と書く。すなわち

$$\mathcal{E}(f)=\iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2}\mathscr{M}(f)ds_1ds_2,$$

$$\mathscr{M}(f)=\frac{1}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2}-\frac{1}{\mathscr{D}(f(s_1),f(s_2))^2}$$

である。Möbius エネルギーが有限値をとるための必要十分条件は、f が Sobolev 空間 $H^{\frac{3}{2}}$ に属しかつ bi-Lipschitz 連続であるということが Blatt によって示された。

Ishizeki-Nagasawa は Möbius エネルギーが2つの Möbius 不変な汎関数と定数の3つの項に分解できることを示し、それらに対する第一変分と第二変分の積分表示を与えた。つまり

$$\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}_1(f)+\mathcal{E}_2(f)+4,$$

$$\mathcal{E}_i(f)=\iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2}\mathscr{M}_i(f)ds_1ds_2\quad(i=1,2),$$

$$\mathscr{M}_1(f)=\frac{\|\Delta\tau\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2},$$

$$\mathscr{M}_2(f) = \frac{2}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^4} \det \begin{pmatrix} \tau(s_1)\cdot\tau(s_2) & (\Delta f)\cdot\tau(s_1) \\ (\Delta f)\cdot\tau(s_2) & \|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2 \end{pmatrix}$$

と分解でき、$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ はともに Möbius 不変性を持つエネルギーである。ただし $\tau = f'$ である。分解されたエネルギーやその第一・第二変分は、f と変分をとる方向の関数が全て $H^{\frac{3}{2}}$ 空間に属しかつ bi-Lipschitz 連続であるとき有限な値を持つ。

さらに Ishizeki-Nagasawa は、分解された Möbius エネルギーの第一変分が L^2 表現可能であることを示した。つまりエネルギーの f から ϕ 方向への Gâteaux 微分は、f のみに依存する L^2 関数と ϕ との L^2 内積で表される。このとき f は H^3 空間に属しかつ bi-Lipschitz 連続でなければならない。一方で ϕ の定義域は L^2 空間全体に拡張することができる。第一変分の L^2 表現は具体的に、分数冪 Laplacian $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ の定数倍 (主要項) と f の 3 階未満の Sobolev ノルムで上から押さえられる低階項とに分けられる。

本論文では以上の結果を拡張して、第二変分に対して L^2 表現を得た。第二変分は関数 ϕ, ψ を変数に持つ双線形形式である。第二変分は f と ϕ によって定まる L^2 関数と ψ との L^2 内積という形で表現可能である。このとき f と ϕ は H^3 空間に属しかつ bi-Lipschitz 連続でなければならないが、ψ は L^2 空間全体に拡張することが出来る。さらに第二変分の L^2 表現は、主要項である $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ の定数倍と f と ϕ の 3 階未満の Sobolev ノルムで上から押さえられる低階項とに分けられる。

次にエネルギー最小化の道具として勾配流方程式の方法がある。Möbius エネルギーの第一変分は L^2 表現を持つので勾配流は放物型発展方程式としてあらわすことが出来る。Blatt はこの発展方程式について、局所解の存在と初期曲線がエネルギーの停留点の近傍にあるときの時間大域解の存在と停留点への L^2 収束を示し、さらに極限のエネルギー値の評価を与えた。大域解の存在と停留点への収束を示す際に、Möbius エネルギーがŁojasiewicz 不等式を満たすという性質が利用された。

本論文の最終章ではこの不等式が分解された Möbius エネルギー $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2)$ に対しても成り立つことを示した。すなわち $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を bi-Lipschitz 連続な $\mathcal{E}_i$ の停留点とするとき $\theta \in (0, \frac{1}{2}), \sigma > 0, c > 0$ が存在して任意の $f \in H^3$ で bi-Lipschitz 連続なものに対して $\|f - f_0\|_{H^3} \leq \sigma$ であれば

$$|\mathcal{E}_i(f) - \mathcal{E}_i(f_0)|^{1-\theta} \leq c\|G_i(f)\|_{L^2}$$

が成り立つ。ここで G_i は $\mathcal{E}_i$ の第一変分の L^2 表現である。証明には第一変分の解析性、第二変分の Fredholm 性が必要となる。これらに変分公式の L^2 表現が用いられた。

論文の審査結果の要旨

与えられた結び目型における標準形を決定するために様々なエネルギーが提案されている。各結び目型におけるエネルギーの最小元を標準形とする考えである。しかし、エネルギーによっては最小元は必ずしも存在しない。結び目のエネルギーの一つとして、Möbius エネルギーが知られる。これは、Möbius 変換によって不変であるという性質を持ち、これが名前の由来になっている。Möbius 変換の一つとして相似変換がある。従って、このエネルギーは相似変換によって不変である。そのため、エネルギー密度の集中が起こり得る。これは、最小元の存在を示す際の困難さを生む。Freedman-He-Wang により結び目型が自明、または素である場合には最小元が存在する事が示された。合成型結び目のクラスでは、最小元は存在しないと考えられているが、未解決の問題である。Möbius エネルギーは、Möbius 変換による不変性という幾何学的性質から興味深いものであるが、解析が困難になるという点でも多くの研究者から関心を持たれている。

与えられた結び目型におけるエネルギー最小元の存在を議論するため、エネルギーを減らす連続的な変形を考える。エネルギーの勾配流はこのような変形である。連続的な変形であるため、変形の過程において結び目型が変わる事はない。最小元が存在するならば、勾配流は時間大域的に存在する事が示唆され、さらにそれがある結び目に収束すれば、それはエネルギー極小元と考えられ、最小元の候補となる。最小元が存在しないならば、勾配流は何らかの特異挙動を起こすと考えられる。すなわち、勾配流の時間発展に伴う漸近解析が最小元の存在・非存在を考えるカギとなる。勾配流をはじめとする発展方程式の漸近解析に Łojasiewicz 不等式が用いられる。これはエネルギー停留点近傍におけるエネルギー勾配評価である。

Möbius エネルギーに対する勾配流の時間局所存在と Łojasiewicz 不等式は、2012 年に Blatt によって証明され、それらを組み合わせる事でエネルギー極小点近傍での勾配流の大域的挙動が明らかにされた。

一方、Möbius エネルギーは、結び目の曲がり具合と捩じれ具合をそれぞれ図るエネルギーの和に分解される事が 2014 年に石関らによって示された。分解エネルギー自身も Möbius 変換によって不変である。それぞれのエネルギーを減らす変形を考える事により、元のエネルギーを直接みるよりエネルギーを減らす変形の過程を詳細に知る事が出来ると期待されている。本研究は、分解された個々の Möbius エネルギーに対する Łojasiewicz 不等式が成り立つ事を証明したものである。元のエネルギーの停留点は、必ずしも分解エネルギーの停留点ではない。またエネルギーの構造も異なる。例えば、元のエネルギーと分解の第一エネルギーは非負値性を有するが、第二エネルギーは、そのような性質を持たない。従って、Möbius エネルギーの Łojasiewicz 不等式は、分解エネルギーのそれを示唆するものではない。また、第一エネルギーと第二エネルギーは、同程度の特異性を有しており、一方が主で他方が従という関係にもない。すなわち、一方の Łojasiewicz 不等式が他方のそれを導くものではない。従って、個々のエネルギーの解析が必要となる。本文では、それらに共通して適用できる解析的をはじめに纏め、後にそれぞれのエネルギーに適用し、更に個々のエネルギー固有の解析を加えている。

Łojasiewicz 不等式の証明に必要な具体的な事実は、個々の分解エネルギーの第一変分の解析性と第二変分の Fredholm 性である。これらを示すためには、変分公式の L^2 表現が必要となる。第一変分の L^2 表現は石関らによって得られていた（2016）。第二変分の L^2 表現は得られていなかった。論文の大半は、分解エネルギーの第二変分の L^2 表現の導出に充てられている。分解エネルギーは、特異性を持った密度の積分となり、その特異性が見かけ上のもの（特異性の解消）が証明の鍵となる。第二変分の方が第一変分より特異性が強いため、一層詳細かつ繊細な解析が必要となる。当初は、提出論文の 1.5 倍程度の計算を必要とした証明であったが、見通しのよい解析法を見出し、纏める事に成功した。Möbius エネルギーの特長である Möbius

不変性は用いていないため、特異性を有するその他のエネルギーの解析法としての汎用性もあると考えられる。

日本数学会の 2017 年秋季総合分科会で研究成果を公表した。また、国内開催の国際研究集会や複数の研究集会において講演を行っている。また、提出論文の内容は、微分方程式に関する一流誌の Advances in Differential Equations に投稿し掲載受理されている。

当学位論文審査委員会は、提出論文の内容の独自性と結果の有意性を高く評価し、博士（理学）の学位授与の相応しいものと判断した。