

氏名	中村 恒平		
博士の専攻分野の名称	博士（理学）		
学位記号番号	博理工甲第 1137 号		
学位授与年月日	令和元年 9 月 20 日		
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当		
学位論文題目	Interpolation between the isoperimetric ratio and curvature for plane curves and an application to curvature flows with non-local terms (平面閉曲線に対する等周比を用いた補間不等式とその非局所曲率流への応用)		
論文審査委員	委員長	教授	長澤 壯之
	委員	教授	町原 秀二
	委員	准教授	佐藤 洋平
	委員	教授	長瀬 正義

論文の内容の要旨

平面閉曲線に対する非局所曲率流については多くの研究結果がある。例えば、面積保存曲率流は初期曲線が狭義凸のとき、時間大域解が円に指数的に収束することが知られている。その他の非局所曲率流についても同様の結果が知られている。しかし、ほとんどの先行研究が初期曲線の狭義凸性を仮定したときについての研究であり初期曲線が狭義凸でないときについてはあまり結果が知られていない。そこで、初期曲線の狭義凸性を仮定しないときの非局所曲率流について考察したい。

まず $f(s) : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を回転数 1 の平面閉曲線、 s を弧長パラメータ、 L を周長、 A を曲線 f が囲む領域の面積、 κ を曲率ベクトル、 κ を曲率、 $\bar{\kappa} = \kappa - \frac{1}{L} \int_0^L \kappa ds = \kappa - \frac{2\pi}{L}$ と定義する。

時間発展する平面閉曲線の挙動の解析には曲率や曲率の導関数の評価が重要となる。その評価に関しては Gagliardo-Nirenberg の不等式という有名な不等式が用いられることが多く、実際にその不等式を利用して、解の漸近挙動を調べている研究はたくさんある。

I_ℓ を $I_\ell = L^{2\ell+1} \int_0^L |\bar{\kappa}^{(\ell)}|^2 ds$ で定義する。Gagliardo-Nirenberg の不等式とは、 I_ℓ ($\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) の間に成立する

$$I_\ell \leq C I_m^{\frac{\ell}{m}} I_0^{1-\frac{\ell}{m}}$$

をいう。

しかしこの不等式も万能ではなく、凸等の情報が無いときには上手く効果を発揮できない場面もある。

本論文では、そのような問題を解消するために Gagliardo-Nirenberg の不等式を改良することを考えた。その際に利用したのが等周比である。等周比は平面閉曲線に対して定義でき、曲線が円のときに等周比が 1 となることが等周不等式から示される。この性質を利用することで、Gagliardo-Nirenberg の不等式の改良に成功した。具体的には等周比を用いた次の補間不等式を証明した。

I_{-1} を $I_{-1} = 1 - \frac{4\pi A}{L^2}$ で定義する。

定理 $0 \leq \ell \leq m$ とする。このとき L によらない定数 $C = C(\ell, m)$ が存在して

$$I_\ell \leq C \left(I_{-1}^{\frac{m-\ell}{2}} I_m + I_{-1}^{\frac{m-\ell}{2}} I_m^{\frac{\ell+1}{m}} \right)$$

が成り立つ。

証明には複素数値関数表示した曲線の Fourier 級数展開を用いる。このとき、曲率の積分を Fourier 係数の和の形で表せることを示し、その性質を利用することで等周比を用いた補間不等式を証明した。

また、新たに得た補間不等式を非局所曲率流の漸近解析に応用することを考えた。上で書いたように、初期曲線の狭義凸性を仮定しないときの結果はほとんど知られていない。本論文では初期曲線の狭義凸性を仮定しないときに、非局所曲率流の解の漸近挙動に関して結果を得た（ただし、時間大域解の存在を仮定している）。具体的には次の非局所曲率流を考えた。

$$(1.1) \quad \partial_t f = \kappa - \frac{1}{L} \left(\int_0^L \kappa \cdot \nu \, ds \right) \nu,$$

$$(1.2) \quad \partial_t f = \kappa - \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^L \|\kappa\|^2 \, ds \right) \nu,$$

$$(1.3) \quad \partial_t f = \kappa - \frac{L}{2A} \nu.$$

ただし ν は内向き法線ベクトルである。

このとき、次の定理を示した。

定理 (1.1), (1.2) または (1.3) の解に対して $I_\ell(t)$ を考える。このとき任意の $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対してある $C_\ell > 0$ と $\lambda_\ell > 0$ が存在して

$$I_\ell(t) \leq C_\ell e^{-\lambda_\ell t}$$

が成り立つ。

この定理は解が円に指数的に収束することを意味している。補間不等式に等周比を用いていることで、シンプルな手法での証明に成功した。実際、証明手法はエネルギー法と呼ばれるもので、この手の分野では良く用いられる手法である。さらに円の中心の挙動について考察した。円の中心に関してはほとんど先行研究が無く、収束するかどうか分かっていなかった。したがってこれまでの先行研究では、解が円に収束することは分かっていても、その円が無遠方にスライドしていったり、有限な範囲で永遠に動き回ったりする可能性を潰し切れていなかった。本論文では、円の中心に関する漸近解析を行い、ある一点に収束することが示せた。これにより、上記の現象は起こらないということが分かった。また、接線速度が 0 に収束することも示せた。これは有限時刻では解が回転していても、時間無限大では回転が止まることを意味している。最後に解が有限時刻で凸化することが示せた。凸化現象は曲率流に対して成り立つ性質であるが、非局所曲率流の場合でも、時間大域解の存在を仮定すれば同様の現象が起こることを示すことができた。

さらに次のような高階曲率流について考察した。

$$(1.4) \quad \partial_t f = (-1)^m (\partial_s^{2m} \kappa) \nu.$$

これは上記の面積保存曲率流の一般化になっている。この場合には、一般に凸性の保存は成り立たないため凸性の仮定は意味をなさない。この曲率流においても、時間大域解を仮定することで、同様の手法で上記と同じ結果を得た。

論文の審査結果の要旨

回転数が1の平面閉曲線の長さ L とそれが囲む面積 A から決まる等周比 $4\pi A/L^2$ は常に1以下であり、閉曲線が円の場合に限り1となる。いわゆる等周不等式である。等周比と1との差 $1 - 4\pi A/L^2$ は非負量となり、これを I_1 とする。曲率とその積分平均値との差の k 階導関数の L^2 ノルムの平方をスケール不変になるように全長の冪を掛けたものを I_k とする。 k が1と m の間であるとき、 I_k が I_0 と I_m を用いて評価出来る事は Gagliardo-Nirenberg の補間不等式から得られる。本研究は、 I_k を I_1 と I_m を用いた補間不等式が成り立つ事を示したものである。

I_1 は I_0 を用いて評価できる (Wirtinger の不等式) が、逆は不可能である。それらを Fourier 級数を用いて表現した際の multiplier の増大の差より明らかである。このことから、本論文で得られた評価式は、新規のものであり、非線型解析において Gagliardo-Nirenberg 不等式よりよい知見をもたらさう。ここでいう Gagliardo-Nirenberg 不等式は積分平均が0である周期関数について成立するものである。曲率とその積分平均値との差はそのような関数である。本論文で得られた不等式は積分平均が0である任意の周期関数について成り立つものではなく、「曲率とその積分平均値との差」に特化した不等式である。その分、汎用性が劣るような印象があるが、逆に、平面閉曲線に対する幾何解析の問題には、Gagliardo-Nirenberg 不等式では得られない詳細な解析を可能ならしめる。実際、論文の後半では得られた不等式の応用を述べている。

不等式の証明は、平面閉曲線を座標で表現し、それらを実部と虚部に持つ複素数値周期関数の解析に帰着させる。曲率はその関数から決まるものであるが、線形な対応は無い。その関数の導関数と曲率の導関数の間に成立する漸化式を導出し、Fourier 解析を活用する。Fourier 解析を用いる手段は標準的であるが、それに帰着させるアイデアは興味深い。論文中で、 I_1 を I_0 を用いて評価している。評価が可能である事は Wirtinger の不等式より明らかであるが、その方法では不等式の最良定数は得られない。評価する関数が、曲率とその積分平均値との差という情報を巧みに利用し、Wirtinger の不等式から得られるものに改良することに成功した。幾何学的な考察と実関数論の議論が組み合わされる事で得られる興味深い結果である。

論文の後半では、得られた補間不等式を、非局所曲率流や面積保存曲率流の漸近挙動の解析に応用している。平面閉曲線をその曲率ベクトルの方向に曲率の大きさに比例する速さで変形する運動方程式は曲率流と呼ばれる。これは、初期曲線が凸である場合に、有限時間内に1点に退化する事が Gage によって示された。後に Grayson により単純閉曲線であれば有限時間内に凸化し、結局初期曲線の凸性の仮定が不要である事が示された。一方、幾何学的な制約条件下で曲率ベクトルの方向に変形する運動は異なる挙動を示す場合が知られている。制約条件としては、

1. 等周比を増やす変形
2. 曲線が囲む面積が保存されるような変形
3. 曲線の長さが保存されるような変形

などが考えられる。元の曲率流は曲率という局所的な量を用いて方程式が記述されるのに対して、これらの制約条件下での変形は、非局所的な量 (長さ、面積、等周比) が方程式に現れるため、非局所曲率流と呼ばれる。

これらの非局所曲率流では、初期曲線が凸であれば、曲率に対する最大値原理が適用され、変形によって凸性が失われない事が分かり、それにより時間大域的に解が存在し、時間発展に伴って円に収束する事が知られている。一方で、初期曲線が凸でない場合は、数値実験によって大域解が示唆される場合や、有限時間に尖点の出現が示唆される場合が分かり、解析は一筋縄ではいかない事が分かる。

本論文では、上で得られた補間不等式を用いて、これらの非局所流が大域解を持つような初期曲線に対して、解は時間発展に伴って円に指数的に収束する事が示された。特に、初期曲線が凸でなくても「大域解が存在する」限り、有限時間内に凸化することが明らかにされた。これは、Grayson の結果の非局所版といえる結果である。

同様の解析は、高階の曲率流に対しても適用可能である。Sobolev 空間 H^m における長さの勾配流は $2m$ 階の曲率流になる。特に $m = 1$ の場合は、粒界溝の発展プロセスが表面拡散のみによる場合にその発展プロセスを記述する方程式として Mullin が 1957 年に提唱したものである。 $m = 1$ の場合に限らず、自然数 m に対して上の補間不等式は適用可能で、方程式に大域解が存在すれば円に指数的に漸近する事を示している。

これまでに日本数学会での発表、国際研究集会での講演、その他の研究集会やセミナーでの講演を 10 回程度行っている。学位論文の内容は、3 編の学術論文として纏められた。そのうち、初めのもは、微分方程式の専門誌 *Advances in Differential Equations* に掲載が決定している。この学術誌は、オーストラリア数学会の *Journal Ranking of ARC FoR* でランク A とされるなど、高い評価を受けているものである。

当学位論文審査委員会は、提出論文の内容の独自性と結果の有意性を高く評価し、博士（理学）の学位授与の相応しいものと判断した。