「五角形の分数のわり算」問題を原題とする数学的活動
―大学院生による数学的活動を事例として―

Mathematical Activities on "Division of Fractions with Pentagonal Cycle" Problem:
A Case Study by Graduate Students

森田大輔＊ MORITA Daisuke
佐藤達也＊＊ SATO Tatsuya
川﨑隼＊＊＊ KAWASAKI Shun
内田敦也＊＊＊ UCHIDA Atsuya
本間太陽＊＊＊ HOMMA Takaaki
小沢征司＊＊＊ OZAWA Seiji
二宮裕之＊＊＊＊ NINOMIYA Hiroyuki

【概要】本稿の目的は、大学院生が取り組んだ数学的活動を基に、算数・数学の授業における望ましい数学的活動の在り方について考察し、指導への示唆を得ることである。そこでは、フランス数学教授学における主要理論である教授人間学理論(ATD)の範疇であり、学習者の問いを重要視するStudy and Research Paths (SRP)に基づく学習活動の設計ならびに分析を試みた。最初の問い Q_0 として「五角形の分数のわり算」問題を設定した際、大学院生が各々の視点から問題を見出し、一般化と教材化を志向する様子を描写することができた。

【キーワード】数学的活動、「五角形の分数のわり算」問題、Study and Research Paths(SRP)

1．はじめに

学校教育を通じて子供たちに育てたい姿の在り方の１つとして「変化の激しい社会の中でも、感性を豊かに働かせながら、よりよい人生や社会の在り方を考え、試行錯誤しながら問題を発見・解決し、新たな価値を創造していくとともに、新たな問題の発見・解決につなげていくことができること」(中央教育審議会, 2016, p.13) と言われているように、今日の学校教育では問題の発見やその解決が重視されている。そして、算数・数学の授業における資質・能力の育成に関して文部科学省 (2016) は、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」といった数学的に問題解決する過程が重要であると指摘した上で、この過程を遂行することを「数学的活動」と位置付けている。また、文部科学省 (2018, p.72) は、数学的活動について、「単に問題解決することのみならず、問題解決の過程や結果を振り返って得られた結果を捉え直したり、新たな問題を見いだしたりして、統合的・発展的に考察を進めていくことが大切である」と述べた上で、数学的活動の取り組みにおける配慮事項として、以下の５点を挙げている。

- 各学年の内容に示す事項は、数学的活動を通しての指導するようにすること。
- 数学的活動を楽しめるようにする機会を設けること。
- 自ら問題を見いだし、解決するための構想を立て、実践し、その結果を評価・改善する機会を設けること。
- 具体物、図、数、式、表、グラフ相互の関連を図る機会を設けること。
- 友達と考えを伝え合うことで学び合ったり、学習の過程と成果を振り返り、よりよく問題解決できたことを実感したりする機会を設けること。

このような数学的活動に対して、二宮 (2019, p.18) は平林 (1987) の授業のアスペクト (相)[(1)] という概念に言及した上で、「これらの活動は、授業のアスペクト (相) の中でも特に、「問題解決」や「問題設定」を指向するものであると捉えられる。そこでの活動は『考える』ことに主眼が置かれ、教師から示される「決まった手順」を再現するような学習プロセスではなく、「解決の手順を自分／自分たちで考える」ものである」と述べている。

このように、算数・数学の授業において、児童・生徒が自ら問題解決・問題発見を行い、数学的活動を充実させていくことが今後さらに重要視されることが考えられる。そのために、「望ましい数学的活動とはどのようなものなのか？」という数学的活動に関する規範を示す必要がある。そこで、本稿では大学院生が取り

＊ 東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科院生
＊＊ 春日部市立春日部南中学校（埼玉県長期研修教員）
＊＊＊ 埼玉大学大学院教育学研究科院生
＊＊＊＊ 埼玉大学教育学部自然科学講座　算数・数学分野

組んだ数学的活動を基に、算数・数学の授業における望ましい数学的活動の在り方について考察し、指導への示唆を得ることを目的とする。

そのために第２章では、問題解決・問題発見を重視している指導・学習過程の理論的な枠組みとして、世界探究パラダイムに関する先行研究を整理する。次に第３章では、大学院生による数学的活動を行う基になる問題（原題）である「五角形の分数のわり算」問題について紹介する。そして第４章では、原題をもとに大学院生がどのような活動を行ったのかを整理した上で、一般化と教材化の観点を詳述し、世界探究パラダイム基づいた指導・学習の過程を定式化したものを記述するモデル（ヘルバルト図式）を用いた分析･考察を行う。

２．指導・学習過程の定式化

近年、我が国の数学教育研究において、フランス数学教授学に依拠した研究が進められている（e.g.，濵中ら，2016；宮川，2011，2017；宮川ら，2016；真野ら，2019）。本稿では、フランス数学教授学における主要な理論である教授人間学理論（Anthropological Theory of the Didactic，以下ATDと略記）に着目する（cf. Bosch & Gascón，2006；Chevallard，2015，2019）。ATDは教授学的転置理論[2]から発展した理論である（cf. 宮川，2011，2017）。Chevallard（2015，p.174）は「ここでの勉強されるもの（そして学習されるべきもの）が、その状況における教授争点（didactic stake）である」と述べているが、ATDにおいては、「何を学習すべきか―何が教授争点Oとなりうるのか―、そして何がその争点を学習する形態となるのかを暗黙裡に規定する規則の集まり」のことを「教授パラダイム（didactic paradigm)」と呼んでいる（ibid.，p.174)。

そこで、本章ではATDの範疇で提示される２つの教授パラダイムを整理した上で、探究を記述するための図式であるヘルバルト図式（Herbartian Schema）を概観することとする。

（１）記念碑主義（作品訪問）パラダイム

記念碑主義（monumentalism)、あるいは作品訪問（visiting works）パラダイムとは、「複数の偉人の作り上げた作品をそれだけで意味をなす小さな部品に細分化し、それらを順々に学習していくというパラダイム」（宮川ら，2016，p.26）である。それは例えて言えば、ピタゴラスの定理やタレスの定理、ヘロンの公式、ユークリッドの互除法などのように偉人のつくりあげた作品を小さな部分に細分化し、それらはモニュメントや記念碑のようなものとして授業の中で扱われる（ibid.，p.26)。このパラダイムの問題点として、「知識が細分化されるため、知識の存在理由が消え、「なぜこれが生じたのか？」「何の役に立つのか？」といった問いは扱われない」ことが挙げられる（ibid.，p.26)。またChevallard（2015）は、これらの問いがもみ消されてしまうことを述べた上で、教育者が熱意をもって楽しませようとしているときでさえ、生徒らはほとんどただの観客に矮小化されることを指摘している。そしてChevallard（2015，p.176）は、記念碑主義の帰結について、「指導されたすべての知識は、試験が終わるとすぐに当然のことのように忘れさられるか、より正確にいえば無視される」と指摘している。

（２）世界探究パラダイム

Chevallard（2015）は、記念碑主義にとって代わる新しいパラダイムとして「世界探究（questioning the world)」パラダイムを提唱している。世界探究パラダイムは、科学者の態度とされている探究の態度を目指すものである（宮川，2016，p.27)。このパラダイムにおいて、学習者xは「何らかの問いQが生じた際に、xがそれについて考察し、（中略）価値ある答えAに到達するために、可能な限り頻繁にそれについて研究する態度や、出会ったことも解いたこともない問題を含む状況に、常に尻込みしない態度」が求められる（Chevallard，2015，p.178)。また、宮川ら（2016）は、世界探究パラダイムについて、学習すべき内容が事前に決まっており、それを順々に、その存在理由も知らずに学習していくのではなく、「すでに知られた過去のものを後ろ向きに学習するのではなく、問いに答えるため、何かを発見するため、という前向きの姿勢で、Qに関するものについて学習することになる」（p.27）と述べている[3]。このように、世界探究パラダイムにおいて学習指導の中心になるのは、知識の小片（作品W）ではなく問いQとなり、探究者は問いへ答える過程で必要になった知識を必要なだけ学びながら、自分なりの答えを創り出すことが重要視される（真野ら，2019，pp.102-103)。このような世界探究パラダイムに基づいた学習の形態は、今日の社会を生きるために必要な能力の育成に適している（宮川ら，2016，p.27)。

このような世界探究パラダイムの目指すものは、本稿の目的と軌を一にするものである。そこで､次節では、世界探究パラダイムに基づいた指導・学習における主要理論として、Study and Research Paths（以下、SRPと略記)、メディア・ミリューの往還、ヘルバルト図式について概観する。

（３）世界探究パラダイムに基づいた指導･学習の定式化

①Study and Research Paths（SRP）

SRPとは、世界探究パラダイムに基づいた指導・学習の過程を定式化したものである（宮川ら，2016，p.28)。ここでは、既存の作品や仕事をその存在理由も知らぬまま単に訪問するのではなく、問いに回答を与えようとする過程で必要となるものを、存在理由を伴って随時学習することが学習者に求められる（ibid.，p.28)。SRPの構造の過程は、具体的には次のように示される（cf. 宮川ら，2016；Winsløw et al.，2013）：まず、数多くの問いを生み出し、より多くの知識に出会えるようなひとつの問いから始まる。この問いに答えるべく、様々な資料にあたりそれらを学習し、そこから考察を進める。すると、Qに部分的な回答を与えるであろう様々な新たな問いが生じる。それは、部分的な問いのこともあれば、

Qから導かれた関連の問いのこともある。そしてさらに、それらの新たな問いに取り組むことにより、場合によっては何かしらの回答が得られ、場合によってはさらに新たな問いが生じる。こうしたことが続いていくのである。

このような過程を、Winsløw et al. (2013) は図１のような樹形構造として示している。

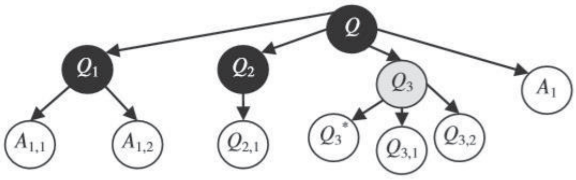

図１　SRP の樹形構造 (Winsløw et al., 2013, p.271)

このように、SRP では「問い」に焦点が当てられ、その役割が重要視される。なお、我が国の数学教育研究においても「子どもが問うこと」の重要性はしばしば主張されてきた。それは、特に「「問い」を軸とした算数・数学学習」(岡本・両角, 2008; 岡本・土屋, 2014) に見られるものである。また、宮川 (2017) は世界探究パラダイムと「問い」を軸とした数学学習を比較検討し、いずれも問いを重視し、それによって学習者のより主体的な学習を促す点は共通しているものの、問いの役割や扱われ方に差異が見られると結論づけている。いずれにしても、数学的活動を行うにあたっては、学習者の問いが重要視されるということがこれらの研究から示唆される。

②メディア・ミリューの往還

SRP においては問いが重要視されるが、なにがしかの問いに対して回答 $A^{\blacktriangledown}$ が提示されなければならない。ATD の範疇において、その過程で「メディア・ミリューの往還」がしばしばなされる。

ここで、メディア、ミリューの意味するところを概観しておきたい。メディアとは、テレビや新聞、ウェブサイト、教科書、教師などのように、何らかの情報を我々に与えようとするあらゆる媒体のことを指す (真野ら, 2019, p.97)。これに対して、ミリュー (milieu) とは、フランス語で「環境」を表す言葉であり、数学教育学の文脈では、数学的活動に使用される有形無形の道具の集まりのことを指す (ibid., p.98)。ATD では探究に本質的に関わるミリュー (教授ミリュー) を M と表し、真野ら (2019) は次のように定式化している。

$$M=\{A_1^{\diamond}, A_2^{\diamond}, \ldots, A_m^{\diamond}, W_{m+1}, W_{m+2}, \ldots, W_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \ldots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\}$$

ここで、真野ら (2019) によれば、$A_i^{\diamond}$は先行研究の成果を表している。W_j は $A_i^{\diamond}$を理解・再構成し、自分なりの成果 $A^{\blacktriangledown}$ を作る際に必要になる、様々な「物」を指す。Q_k は探究の中で生じてくる新たな問いである。そして、D_l はデータを意味する。

それでは、メディア・ミリューの往還とはどのような営みを指すのだろうか。この点について、宮川ら (2016) は次のように述べている。

> 例えば、何らかの問いに直面した際、研究者であれば、取り急ぎメディアからその問いの回答に関連する既存の回答 $A_1^{\diamond}$を得るであろう。そこから他の既存の作品や仕事 (O_i) との相互作用により、それが正しいのか検証したり、自らの問いの回答となりうるのか検討したりする。多くの場合、メディアから得られた最初の回答は十分でないため、もしくは新たな問いが生じたため、さらにメディアから別の既存の回答 $A_2^{\diamond}$ を得て、探究を進めていく。こうした過程がメディア・ミリューの往還である。(宮川ら, 2016, pp.29-30)

このように、SRP では「メディアの参照」と「ミリューとの相互作用」という二つの極を行き来しながら進むものである (真野ら, 2019, p.99)。

③ ヘルバルト図式

教授学において、生徒、教師、教授争点 O の３点を合わせて「教授三項 (didactic triplet)」と呼ぶ (Chevallard, 2015)。ATD においては、探究に参加している生徒の集まりを X、教師の集まりを Y と書く。個々の生徒 x は X の要素であり ($x \in X$)、個々の教師 y は Y の要素である ($y \in Y$)。

ATD では「教授システム (didactic system)」を $S(X; Y; O)$ で記述する。ここで、前述した２つの教授パラダイムを教授システムとして表記する (cf. 真野ら, 2019)。まず、作品訪問パラダイムにおいて重要視されるものは、教えなければならない内容 (作品 W) である。換言すれば、作品訪問パラダイムにおける教授争点は作品 W だと言えることになる。それ故、作品訪問パラダイムにおける教授システムは $S(X; Y; W)$ と表記される。

これに対し、世界探究パラダイムにおける教授争点は前述の通り問い Q となる。それ故、世界探究パラダイムにおける教授システムは $S(X; Y; Q)$ と表記される。そして、宮川ら (2016) は、SRP を以下の「ヘルバルト図式 (Herbartian schema)」によって記述している。

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow A^{\blacktriangledown}$$

$S(X; Y; Q)$：教授システム
Q：問い
X：Q を学習する人の集合
Y：それを助ける人の集合
M：教授ミリュー
$A^{\blacktriangledown}$：問い Q に対する回答

図２　ヘルバルト図式
(宮川ら, 2016, p.29 を基に筆者作成)

ヘルバルト図式の教授システムでは、問い Q に回答を与えるべく学習者はミリューに働きかける。また、宮川ら (2016) は、ここでのミリューについて、X と Y によってもたらされ、以下の２つの要素によって構成されるとし、以下のように述べている。

> 一つは、Q に関連した問いに対する利用可能な資料から得た先人の作った既存の回答 $A^{\diamond}$である。研究者は何の情報も得ず研究を進めるわけではない。まずは

インターネットや文献を調べることにより、自らの問いに関連する既存の回答 $A^{\diamond}$ を見つけ、ミリューに加える。そして、更新したミリューに働きかけることにより、自らの回答 $A^{\heartsuit}$ を作り上げていくのである。ミリューを構成するもう一つの要素は、理論や実験など他の作品・仕事(works)である。これには、$A^{\diamond}$ に表出する数学的な概念や定理・性質といった理論、問いに取り組む際に用いられる道具や装置、さらには問いといったものが含まれる。(宮川ら, 2016, p.29)

さらに、宮川ら (2016) は、通常の探究では、複数の回答 $A^{\diamond}$、複数の作品・仕事 O と相互作用を行うことを踏まえ、$M = \{A_1^{\diamond}, A_2^{\diamond}, \dots, A_k^{\diamond}, O_{k+1}, \dots, O_m\}$ となることを指摘した上で、ヘルバルト図式がより完全には、以下のように記述されることを述べている。

$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{A_1^{\diamond}, A_2^{\diamond}, \dots, A_k^{\diamond}, O_{k+1}, \dots, O_m\}] \Rightarrow A^{\heartsuit}$

3.「五角形の分数のわり算」問題

ATD の範疇にある SRP では問いが重要視される。その中でも、SRP に基づいた授業設計では、最初の問い Q_0 の設定が重要である(濵中ら, 2016, p.61)。濵中ら(2016)は、最初の問い Q_0 として、「四則演算と平方根のボタンしかない通常の電卓で、与えられた数の3乗根を計算するにはどうすればよいか?」を設定し、教員養成課程の学部3年生に対し実践を行っている。これに対して、本稿では最初の問い Q_0 として「五角形の分数のわり算」問題を採用した。以下では、「五角形の分数のわり算」問題の概要を整理する。

片桐 (2019, pp.37-40) は、以下の流れで「五角形の分数のわり算」問題を扱っている。

問題1. 五角形①②③④⑤(図3)の頂点①と②に2つの数をかきます。そして、「(次の頂点+1)÷前の頂点」の計算をして次の頂点に答えをかきます。この計算を、⑤まで続けます。たとえば、①を2、②を4とすると、(4+1)÷2を計算して、その答えを③に書きます。これは5/2となるから③に5/2と書きます。つぎにまた「(次の頂点+1)÷前の頂点」の計算(5/2+1)÷4をして、答えを④に書きます。そして④と③の数を使って、もう1度この計算をして、その答えを⑤に書きます。

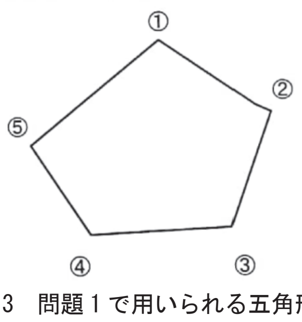

図3 問題1で用いられる五角形
(片桐, 2019, p.37)

問1. この計算をして、③、④、⑤に答えを書きましょう。

問2. ①を3、②を7にして、この計算をして③、④、⑤に答えを書きましょう。

問3. ①と②の数を決めて、(①が②より大きい数になるように)、③、④、⑤を求めてみましょう。

問4. 問1、2、3で求めたことから、どんなことがわかるでしょう。

問題2. 上の問4で見つけたきまりが、いつも言えるわけを考えましょう。そのために、①が2、②が4のときに、どんな計算をしたかを、式に書いていきましょう。

問題3. この計算を⑤を求めることで、やめないで、さらに⑥、⑦、⑧、…(図4、図5)と求めていったらどうなるでしょう。

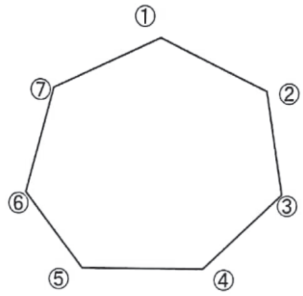

図4 問題3で用いられる七角形
(片桐, 2019, p.40)

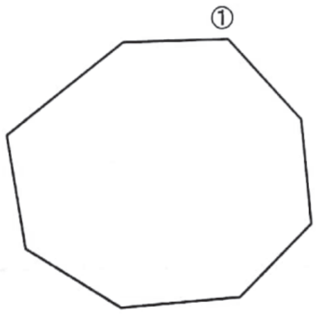

図5 問題3で用いられる八角形
(片桐, 2019, p.40)

上記原題について把握した上で、筆者らは漸化式「$a_{n+2} = (a_{n+1}+1)/a_n$, $a_{n+5} = a_n$」と言うことができる点に注目した。次章では、この原題と漸化式を用いて実際に行った活動についてまとめていく。

4. 大学院生による数学的活動

本章では、大学院生による数学的活動の概要をまとめた上で、一般化、教材化する際に起こった数学的活動について、ヘルバルト図式を用いて分析・考察を行う。

(1)活動の概要

大学院生による活動の概要をまとめたものは、次頁表1の通りである。

表１　活動の概要

日 付	活動概要
４月16日	・本稿における原題である、「五角形の分数のわり算」問題の登場。 →漸化式に着目した上で、この原題の条件を変えることや発展させること、すなわち一般性を見つける活動（以下、一般化とする）を試みた。
４月23日	・一般化に関する成果の報告。 →報告を基に、初等中等教育の学習過程で活用できる教材の開発（以下、教材化とする）を試みる。
５月７日	・教材化したものを報告。
５月28日	・小学校、中学校、高等学校で、本原題を用いることの教育的価値について考えることを試みる。
６月11日	・今までに取り組んだ活動の整理。
６月18日	・今までに取り組んだ活動の報告。 ・活動の際の過程を詳述することを試みる。
６月25日 ７月２日	・活動の際の過程に関する報告。 ・小学校、中学校、高等学校の学校段階ごとに、教材化することを試みる。
７月16日	・学校段階ごとに開発した教材の報告。
７月23日 ７月30日	・これまでの活動の総括。

本稿では、４月 16 日から４月 23 日の間で行われた、一般化に関する活動と、４月 23 日から５月７日の間で行われた、教材化に関する活動に焦点を当て、どのような活動が行われたかについて詳述する。

（２）一般化についての数学的活動

「五角形の分数のわり算」問題を全体で共有した後、４つのグループに分かれ、一般化に関する活動を行った。各グループで考察した活動の成果は、以下の通りである。

①Ａグループ

Ａグループが着目した点は、循環することである。その結果、アーベル群を用いることで、差や商に関しての漸化式において、循環することがわかった。

① $a_{n+2}=a_{n+1}+1-a_n$ (6 個で循環)
② $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ (6 個で循環)
③ $a_{n+4}=a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$ (10 個で循環)
　$a_{n+6}=a_{n+5}-a_{n+4}+a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$ (14 個で循環)
④ $k \in 2\mathbb{Z},\ a_{n+k}=a_{n+k-1}-a_{n+k-2}+...-a_n$ (2k+2 個で循環)
⑤ $a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$ (6 個で循環)
　$a_{n+4}=(a_{n+3}/a_{n+2})\cdot(a_{n+1}/a_n)$ (10 個で循環)
　$a_{n+k}=(a_{n+k-1}/a_{n+k-2})\cdot...\cdot(a_{n+1}/a_n)$ (2k+2 個で循環)
※（G，＊）アーベル群、$a_n \in G,\ n \in \mathbb{N}$
$a_{n+k}=a_{n+k-1} * (a_{n+k-2})^{-1} * a_{n+k-3} * ... * (a_n)^{-1}$ (2k+2 個で循環)

②Ｂグループ

Ｂグループは、分子に加えた１には規則性があるのではないかと予想を立てた。その結果、６回で第１項が循環するとき、$x=1$ となるのは偶然であることがわかった。

図３は循環する数列である。①を a、②を b (a, b は任意の実数）とする。第３項以降は、１つ前の項と１の和を２つ前の項で割っている。
つまり、$a_3=(b+1)/a$ となる。
これを第６項まで続けると、第１項と同じ値になる。
$a_3=(b+x)/a$ とおいた (x は a, b 以外の実数である)。
計算を進めると、$a_4=\frac{b+(1+a)x}{ab}$、$a_5=\frac{(ab+a+1)x+b}{b(b+x)}$、
$a_6=\frac{b+(1+ab+a)x+bx(b+x)}{(b+x)\{b+(1+a)x\}}$ となる。５回で循環すると仮定すると、$\frac{b+(1+ab+a)x+bx(b+x)}{(b+x)\{b+(1+a)x\}}=a$ となる。
この方程式を解くと、$(b-a-1)x^2+(b^2+a-2b+1)x+b(1-b)=0$ となり、因数分解すると、$(x-1)\{(b-a-1)x+b(b-1)\}$ となる。
これより、$x=1$、$\frac{b(1-b)}{b-a-1}$ となる。
次に、４回で循環すると仮定すると、$\frac{(ab+a+1)x+b}{b(b+x)}=a$ となる。この方程式を x について解くと、$x=\frac{b(ab-1)}{(a+1)}$ となる。以上より、４回で循環するとき、x は a, b に依存している。よって、５回で循環するとき、１つ前の項と１の和を２つ前の項で割って循環するのに規則性はないということが分かった。

③Ｃグループ

Ｃグループは、原題が循環することを式変形から示した。このことから、循環する式は式変形から求めることができた。

Excel を使って探究する。What if not? ストラテジーを用いて、まず $a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$ の $+1$ の部分を色々な数値に変えて循環するか否かを検討するものの、うまくいかなかった。
そこで、原題における「５つの数で循環する」ということを足がかりに、「n 個で循環する漸化式」を探究する。
そこで、
　$a_{n+1}=1/a_n$ (2 個で循環)
　$a_{n+2}=1/a_n$ (4 個で循環、ただしこれは自明？)
　$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$ (6 個で循環)
　$a_{n+3}=(a_{n+2}+a_{n+1}+1)/a_n$ (8 個で循環)
という関係式を帰納的に見つけることができた。
また、その過程で、偶数個で循環する数列を考える際、もし $a_{2k}=1/a_k$ となればうまく循環するという仮説を得ることができた。また、８個で循環する漸化式をつくることはできたが、あくまで試行錯誤の結果であり、循環する数列をつくる規則を発見するに至らなかった。

④Ｄグループ

原題が循環することを式変形から示した。

$a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$
$a_{n+3}=(a_{n+2}+1)/a_{n+1}$
$a_{n+3}=\{(a_{n+1}+1)/a_n+1\}/a_{n+1}$
$a_{n+3}=(a_{n+1}+a_n+1)/a_n(a_{n+1})$
$a_{n+4}=\{a_{n+1}+a_{n+1}+a_n(a_{n+1})\}/(a_{n+1}+1)(a_{n+1})$

$a_{n+5}=\{(a_{n+1}+a_n+1+a_n a_{n+1})/(a_{n+1}+1)(a_{n+1})\}+1/(a_{n+1}+a_n+1)/a_n(a_{n+1})$
$a_{n+5}=(a_{n+1}+1)/a_{n+2}=a_n$

（３）教材化についての数学的活動

各グループで導き出した回答を共有し、指摘し合った後に、同様のグループで各校種における教材化を目指す活動を行った。各グループでの活動は以下の通りである。

①Ａグループ

一般化を目指した活動を参考に、以下の式を用いた教材を作成できないかとした。

・$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$（6 個で循環）
・$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$（6 個で循環）

その上で、中学校では両方の式を用いることが可能であるが、小学校では、$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ をやろうとするが、負の数が出てきてしまうため、小中両方で計算可能な $a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$（6 個で循環）を用いて教材を作ることを試みた。

（小学校を対象にした教材案）
①好きな数字を２つ決めて、横に並べる。それを１番目の数、２番目の数とする。
②（２番目の数）÷（１番目の数）をし、出た結果を３番目の数としてさらに横へ書く。
③（３番目の数）÷（２番目の数）をし、出た結果を４番目の数としてさらに横へ書く。
④次は…と確認しながら繰り返していく。
⑤「気付いたことは何かな？」、「他に決まりないかな？」、「他の数字でもやってみたらどうかな？」などと問う。

（中学校を対象にした教材案）
（小学校を対象にした教材案）の後に、
⑥「なんでこうなるのかな？」、証明してみよう。
ただし中学校では、$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$（6 個で循環）も扱うことが可能とした。

発表前日に、個人で考えてきたことをグループで共有した。そして、5月7日は、小中の教材を報告するという方向で話がまとまった。また、その際に、文字式の証明や数列の素地、帰納と演繹の違いについて学ぶことが目的にできるかなどこれまでの活動をもとにした話し合いが行われた。先の話し合いをもとに､以下の教材が発表された。

・４月 23 日の授業で発表された、$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$, $a_{n+6}=a_n$（6 個で循環）を用いる。

①好きな数字を２つ決めたら横に並べて、それを１番目の数、２番目の数とする。
②（２番目の数）÷（１番目の数）をし、出た結果を３番目の数とする。
③（３番目の数）÷（２番目の数）＝（４番目の数)、…とどんどん進めていく。
④気付いたことなどの共有。
→他の数字でもやってみる。
⑤「なんでこうなるのか？」を、文字を用いて証明していく。
（小学校は④まで、中学校では⑤も）

②Ｂグループ

$a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$ をもとに、循環する問題の作成を試みた。しかし、原題は +1 以外（≠ 0）の数では成り立たなくなってしまう。また、証明をするにしても中学生にはやや難しい式変形が含まれていて、循環することを味わう以外にはあまりよい点がないだろう。そこで、中学生（特に中学校第１学年の指数の導入）でも生かすことが可能であるとし、2^n のなどの１の位が循環する問題を提案した。循環することを生かし、問題を回答することはできるが、証明活動などは弱くなってしまう可能性が挙げられた。

③Ｃグループ

Ｃグループは、４月 23 日の報告で、帰納的にいくつかの循環する関係式を見つけた。その中でも、$a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$ を題材に教材を作成した。校種は中学校を想定した。そして、教材の流れは、以下の通りである。

①１番目、２番目の数を子どもに決めさせる。
②（２番目）÷（１番目）を計算して、３番目の数をつくる。以下、６番目まで計算し、気づいたことを記述させる。
③「（気づいたことが）必ず成り立つか確かめよう」という課題を設定する。
④文字を使って説明する。
⑤除法でなく減法だとどうなるかを確かめる。

④Ｄグループ

どのような教材が作れるかを学校段階ごとに分けて作成した。

小学校においては、数が循環するきまりを、子ども達が発見することをねらいとした。扱う漸化式は、$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$ と $a_{n+4}=(a_{n+3}/a_{n+2})\cdot(a_{n+1}/a_n)$ である。これは、6 個と 10 個で循環する漸化式である。グループでの話し合いで提案された教材の流れは以下の通りである。

①具体的な数の並びを提示し、ヒントと合わせて循環していることを発見する。
②発見したきまりを使って自らで循環する数の並びを作る。
③同様にして 14 個で循環するきまりを見つける。

③の活動は、グループでの検討の結果、小学校では、実際に 14 個の数が循環しているということを確認することが困難という結論が出された。そのため、③を除いたものが、小学校を対象とした教材とされた。

中学校においては、文字を使って前形式的に証明する教材を作成した。その際のねらいは、文字を使って前形式的に周期の法則まで見いだすができることとした。また、文字で証明する際に、周期の半分を境に、今まで出てきた式の逆数が出てきていることに気付けるかどうかもねらいとしている。扱う漸化式は、$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$ と、$a_{n+4}=(a_{n+3}/a_{n+2})\cdot(a_{n+1}/a_n)$ である。

高等学校においては、漸化式 $a_{n+4}=a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$ が周期 10 になることを証明した。５月７日の報告で考察

した「漸化式の出所が因数分解の因数部分」と一致しているということについて、文字を使ってさらに明らかにした。また､他の減法の漸化式も同様にして証明でき、除法の漸化式も対数 log を用いることにより、同様にして証明できるため、その証明を高校生が行うことで、数学的活動を生むことができるのではないかと考えた。

（4）ヘルバルト図式を用いた分析

前節までに紹介した活動がどのような活動であったかを明らかにするために、２章３節で紹介したヘルバルト図式の枠組みをもとに今回の活動を捉えなおす。本稿の場合、ヘルバルト図式を用いることで，図６のように捉えなおすことができよう。

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow A^{\heartsuit}$$

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{A_1^{\diamond}, A_2^{\diamond}, \dots, A_k^{\diamond}, O_{k+1}, \dots, O_m\}] \Rightarrow A^{\heartsuit}$$

$S(X; Y; Q)$: 教授システム

Q: 漸化式「$a_{n+1}=(a_{n+1}+1)/a_n$, $a_{n+5}=a_n$」の一般化

X: 大学院生

Y: 指導教員

M: 教授ミリュー

O: 各グループの考察結果や新たな問い

$A^{\diamond}$: 複数の回答

$A^{\heartsuit}$: 問い Q に対する回答

図６　ヘルバルト図式に基づいた
「五角形の分数のわり算」問題を原題とする数学的活動

まず問いについてまとめる。問い Q(以下､原題と呼ぶ)は、「五角形の分数のわり算」問題をもとにして生じたものである。本章２節と３節で、原題に対して、４つのグループがそれぞれ異なるアプローチで考察を進め、それぞれの結論を導き出している。この原題は、SRP の構造の過程で最初の段階にあたる､「数多くの問いを生み出し、より多くの知識に出会えるような」問いであると考えられる。

次に、ヘルバルト図式に基づいて今回の活動を分析する。原題に対して大学院生 X は､考えを進めるコーディネーターの役割を担う指導教員 Y と共に、原題の一般化と教材化を進めていった。そして、一般化と教材化を進める際は、大学院生を４つのグループに分け、それぞれ検討をした。本稿では、具体的な活動をヘルバルト図式に基づいて解釈するため、一般化と教材化におけるＡグループの活動に注目して分析していく。

Ａグループでは、原題が商に関する漸化式であることから、商の形を保持したまま分子の「＋１」を除いて $a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$ の形の漸化式について考察を加えた。そして循環すること、商のみならず差を考えても同じ演算構造をもつことを見出し、ミリュー M に付け加えられるべき $A^{\diamond}$ を得た。ただし、原題の一般化 $A^{\heartsuit}$ には成功していない。しかし、原題の条件を変えることによって得られた部分的な回答 $A^{\diamond}$ は､原題を考えるうえで示唆的であったことは間違いない。そう述べることができる根拠として､教材化における検討が挙げられる。一般化の際に､商のみならず差に関しても考察を加えていたことにより、小学校での教材化において、数の拡張を考慮に入れた深い教材研究を行うことができた。つまり、小学校のカリキュラムにおける計算可能性を指摘できたことは、Ａグループにおける $A^{\diamond}$ に表出した性質 O があったからだと考えられる。その O と $A^{\diamond}$ との間で、教材化に対して、小学校でも中学校でも扱える教材提案をして、一つの教材 $A^{\diamond}$ が提案された。原題に対する回答 $A^{\heartsuit}$ は得られなかったが、原題をもとに様々な問いが生まれて活動を幅広く展開することができた。

（5）考察

本稿で取り上げた大学院生による数学的活動は､「五角形の分数のわり算」問題について、一般化と教材化を目指したものである。この数学的活動を行うに当たって、図６の Y にあたる指導教員は､「五角形の分数のわり算」問題の提示と一般化と教材化を目指すという指示のみを行い、見通しを与えたり、指導を行ったりということは特にしていない。そのことを踏まえると、大学院生たちは、各グループが、各々の視点から問題を見出し、一般化と教材化を目指している。これは、世界探究パラダイムに基づいた学習に類似していることが考えられる。また、ヘルバルト図式による活動分析においては、大学院生の活動がヘルバルト図式で記述できる活動として目指すべき数学的活動の１つの提案になりうるのではないかと考えられる。本稿で行った大学院生の活動は、少なくとも記念碑主義（作品訪問）パラダイムとは異なる活動になっている。さらに、教材化の際のＡグループやＤグループでは、それまでの過程や結果を振り返り、より理想的な教材や子どもたちを見据えた教材に作りかえる活動が見られる。これは、第１章で挙げた文部科学省（2018）による「数学的活動」が行われていることが期待できる。

５．おわりに

算数・数学を指導するにあたって、数学的活動の充実は今後いっそう求められる状況であることを踏まえ、本稿では、大学院生の活動をモデルとし、望ましい数学的活動の在り方についてまとめていった。そして、これまでの学習形態にとって変わるものとして、世界探究パラダイムが挙げられることを指摘し、その学習スタイルに則った活動を本稿では提案することができた。また、その活動を記述する枠組みとしてヘルバルト図式を援用して大学院生の数学的活動を価値づけている。本稿で紹介した大学院生の活動が、ヘルバルト図式の枠組みを用いて記述することができた点から、世界探究パラダイムに基づく学習が遂行できたと判断できる。その際に、指導教員自身も原題に対する回答はもっていなかったものの、大学院生の活動が十分にできるように時間や場所を確保するといった学びを保証する役目を果たしていた。すなわち､学習者自身が問いをもち、教員はその学習者の学びを保証することが望ましい数学的活動にとって重要であると結論付けることができるだろう。

今後の課題は、数多くの問いを生み出しうる最初の問い Q_0 のさらなる開発が挙げられる。

【注】

（1） 平林（1987）は、授業のアスペクト（相）について、「技能の練習」、「理解」、「問題解決」、「問題設定」のという４つの区分を置いている。

（2） 教授学的転置理論の主な目的は、教育において扱われる知そのものの性質を知ることにある（宮川， 2011， p.49）。教授学的転置理論の詳細については、Chevallard（1991）を参照されたい。

（3） Chevallard（2015）によると、記念碑訪問パラダイムによって形作られた教授世界では、ほとんどの人々が「後退認知的（retrocognitively）」にふるまうのに対し、世界探究パラダイムでは、「前進認知的（precognitive）」な態度が必要である。そして、後退認知的な性向においては、知ることが「後ろ向きに知ること」である一方、前進認知的な献身においては、知ることが「前向きに知ること」である。

【付記】

本研究は、片桐重男先生（元横浜国立大学教授・元文教大学教授）が平成31年３月27日の講演にて「五角形の分数のわり算」問題を提示されたことを契機に進められました。この教材を通して、片桐先生は、数学的に考えることの重要性を教えてくださいました。この場を借りて、衷心より感謝申し上げます。

また、本稿は、2019年度前期に大学院修士課程にて開講された講義「数学教育学特論Ａ」（担当教員：二宮裕之）で、受講生である大学院生が教材研究の過程で行った数学的活動について分析・考察を加えたものである。なお、その成果である教材研究については、森田ら（2020）を参照されたい。

【引用・参考文献】

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. ICMI Bulletin, 58, 51-65.

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y.(2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In S. J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges (pp.173-187). Springer.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12, 71-114.

中央教育審議会（2016, December 21）． 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）（中教審第197号）.Retrieved from http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731.htm

濵中裕明・大滝孝治・宮川健（2016）． 世界探究パラダイムに基づくSRPにおける論証活動（2）―電卓を用いた実践を通して―． 全国数学教育学会誌 数学教育学研究，22(2)，59-72.

平林一榮（1987）． 数学教育の活動主義的展開． 東洋館出版社．

片桐重男（2019）． 令和元年度 数学的な考え方を伸ばす「楽しい算数の問題」へのチャレンジ． 国分寺市教育委員会（未公刊）．

宮川健（2011）． フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格―わが国における「学」としての数学教育研究をめざして―． 日本数学教育学会誌 数学教育学論究，94，37-68.

宮川健（2017）． 世界探究パラダイムに基づいたSRPと「問い」を軸とした数学学習． 日本数学教育学会春期研究大会論文集，5，173-180.

宮川健・濵中裕明・大滝孝治（2016）． 世界探究パラダイムに基づくSRPにおける論証活動（1）―理論的活動を通して―． 全国数学教育学会誌 数学教育学研究，22(2)，25-36.

文部科学省（2016, August 26）． 算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ． Retrieved from http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/1376993.htm

文部科学省（2018）． 小学校学習指導要領解説（平成29年告示）算数編． 日本文教出版．

森田大輔・齋藤雄・水口鑑・岩﨑亮英・内田幸一・岡本大志・二宮裕之（2020）．「五角形の分数のわり算」問題の一般化を通した教材研究―小学校・中学校・高等学校の教材としての提案―． 埼玉大学紀要（教育学部），69(1)，87-97.

二宮裕之（2019, May 1）． 問題解決の型からの脱却． 新しい算数研究，580，16-19.

岡本光司・両角達男（編著）．（2008）． 子どもの「問い」を軸とした算数学習． 教育出版．

岡本光司・土屋史人（2014）． 生徒の「問い」を軸とした数学授業―人間形成のための数学教育をめざして―． 明治図書．

真野祐輔・溝口達也・熊倉啓之・大滝孝治（2019）． 数学的活動に基づく学習指導の設計． 岩崎秀樹・溝口達也（編著）， 新しい数学教育の理論と実践（pp.61-106）． ミネルヴァ書房．

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research course as an epistemological model for didactics. Educational Studies in Mathematics, 83(2), 267-284