『埼玉大学紀要（教養学部)』第 55 巻第 2 号、2020 年

ニュートンのプリンキピアの一定理に関する覚書

A Note on a Theorem in *Newton's PRINCIPIA*

都築　正信 *
TSUZUKI, Masanobu

ニュートンの主著 *Philosophiae Natularis Principia Matthematics* (以下ではこれを**プリンキピア**と記す）における数学理論はユークリッド幾何学を基調として記述されている。このため現代の読者にはその理論を理解するのが困難である。本稿では理論編の中の枢要な定理である第二編の命題 24・定理 19 の証明を現代的な記述に書き直してみる。これによって当たり前のことではあるが、ニュートンは現代の数学の用語と記号を使用していないとしても、当時すでに現代の微積分学によく通じていたことが了解されよう。
キーワード：等速落下の法則、微分積分学

1. 質量と重量

物体には軽いものと重いものがある。同じ大きさでもけん玉の球と鉄の球では重さがまるで違う。重いにせよ軽にせよ、物体は重さを持っている。これは大昔から人々が日常経験してきたことである。

一方、物体は重さとは別に質量という量をもっている。質量は重さ (重量) ではない。この違いを、最もよく示すのが近年テレビでひんぱんに見られるようになった宇宙船内部における物体の動きである。宇宙船内では、物体は宇宙船にしっかりと固定されていないかぎり、船内の空間にただよう状態にある。このとき物体の重さはほぼゼロに等しいが、質量は地球上にあるときと同じ量をもっている。

物体の質量は宇宙のどこのあっても一定不変の量であるが、重量は宇宙の場所によって異なる。地球上においても物体の重さは、高い山の上と平地とでは、また、赤道付近と南北の極地とではやや異なるが、質量はどこにあっても同じである。物体について人々が日頃経験するのは、その重量であって質量は日常的に人々が直接経験できる量ではない。

では、質量と重量はどのような関係にあるのか。これについて、

(地上においては)、物体の質量はその重量に比例する

ことを初めて主張したのがニュートンである。この命題は、物体の質量と重量の基本的関係を示すものであり、ニュートンにおいて初めて明確にされた。これを **質量に関する基本命題**と

---

* つづき・まさのぶ、埼玉大学名誉教授、西洋科学史・言語認識論

呼ぼう。

かれはこれを、**プリンキピア**において理論と実験の双方を用いて実証した。この場合、それぞれが互いに不可欠であり、どちらか一方を欠いても実証されたことにならない。

質量に関する基本命題は、**プリンピキア**で次の定理の形で述べられている（河辺訳編(1979:428)『ニュートン』)。

命題 6・定理 6　物体はすべて各惑星 に重力で引かれること。また、諸物体の任意の一惑星に対する重量は、その惑星の中心からの等し い距離にあっては、各物体における物質量に比例すること。

ここで重量とは物体が惑星に引かれるときに生じる 重さのことであり、物質量とは質量のことである。この命題は、地球上の同一の地点においては、質量は重量に比例することを主張している。太陽系の一惑星である地球の地上にあって人間が測定できる量は重量であるから、この定理を用いれば、質量もまた数量化できること になる。すなわち、地上にあっては人間が容易に経験できない質量もまた、この定理によって数値で表示できることになった。質量は数値として還元され、人間の経験のうちに取り込むことができたのである。この還元を欠けばニュートンの学説は実証科学の地位を維持できなかったであろう。

ニュートンは、この命題を自ら行った振子の実験によって確かめることができたと考えた。実験の詳細は論稿（都築（2018:35)）で述べた。ニュートンにおいて重要なことは、その実験が**質量に関する基本命題**を実証するものであることを証明する定理を提示していたことである。これがなければ実験の意味は失われよう。その定理は次のように述べられる（河辺訳編(1979:325)『ニュートン』):

命題 24・定理 19　振動中心が支持中心から相等しい距離にある、ひもでつりさげられた諸物体における物質量 [の比] [1] は、それぞれの重量の比と真空中における振動の時間の二乗の比との積にある。

定理の内容はこうである。二つの振子の物体の質量を、m_1, m_2, 重量を、W_1, W_2 とし、その周期を、T_1, T_2 とすれば、次式が成立する。

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{W_2}{W_1}\frac{T_2^2}{T_1^2}$$

ここで、$T_1 = T_2$ であれば、g を定数として次式が成り立つ。

$$W_1 = gm_1, \quad W_2 = gm_2$$

したがって、物体の質量は重量に比例する。

以上から、振子の振動周期が同じであることは、**質量・重量の基本関係**が成立することを意

[1] 河辺訳には、[の比] を欠く。

味するのである。

同時に上式における g は、運動方程式から、落下の加速度を意味し、それが諸物体において一定であることから、落下速度も同じであることにより、(**真空中**) **等速落下の法則**も成立することになる。

論文（都築（2018））で指摘したように、**等速落下の法則**を実証する実験として、振子の実験を最初に行ったのはガリレオである。しかし、ガリレオはその実験がその法則を実証するものであるという根拠を示すことはできなかった。かれには落下が力の作用によるものであるという考えがなかったのである。ニュートンの定理24は、振子の実験がその法則の根拠となることを証明するものであり、振子の実験とこの定理によって、ガリレオの発見にかかる**等速落下の法則**が実証されたといえるのである。

プリンキピアでは、この命題に証明が付されているが、上の論文では、その証明を割愛した。やや数学に専門的にすぎると考えたためである。しかし、論文として完全性を保つためには、その証明を述べるべきであろう。ところが、**プリンキピア**では微分積分学の考えが使われていながら、現代の微分積分学の記述の仕方はほとんど見られない。したがって現代の読者の目線ではきわめてわかりにくい。本稿では、ニュートンの証明を現代的な記号と理論を用いて解説しよう。これによって、かれの理論の数学的記述の下に現代の微分積分学の理論が十分に使われていたことがわかる。それはニュートンが微分積分学の創始者の一人であることを如実に示すものである。

2. 定理の証明

ニュートンの証明をいくつかのステップ (St.) に分けて、それぞれのステップを現代的な記述に改めてみる。

1.St 与えられた力が与えられた物質において、与えられた時間内に生じる速度の変化[2] は、力と時間とに比例し、物質の（量）に反比例する。

力が大きいか、時間が長いか、あるいは物質の（量）が大きいか小さいかするほど、いっそう大きな速度が生じられる。それは運動の法則より明らかである。

1．St の現代的記述

物体の質量を m, 時刻 t における物体の速度を $v(t)$、物体に作用する力を W とすれば、第二法則は次のように表わされる：

$$m\frac{dv(t)}{dt} = W$$

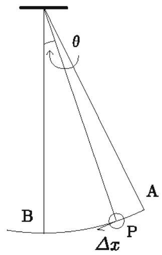
これより時間 t における物体の速度の変化を $dv(t)$、微小時間を dt で表せば、次式を得る：

$$dv(t) = \frac{W}{m}dt$$

[2] 河辺訳では、「速度の変化」ではなく「速度」である。しかし運動の第二法則は、力は運動量（速度と質量の積）の変化を生じさせるものであるから、ここでは「速度の変化」とした

2.St　さて、いまいくつかの振子が同じ長さであるとすると、鉛直から等しい距離における各起動力はそれぞれの重量に比例する。それゆえ二つの物体が相等しい弧を描き、それらの弧を相等しい部分に分けたとすると、両物体が弧の対応する部分を描く時間は全振動を行う時間に比例するから、振動の対応する部分における速度はそれぞれの起動力と全振動を行う時間とに比例し、物質量に逆比例するであろう。

2.St の現代的記述



図において振子 P が最上点 A にあるときの時間を $t=0$、最下点 B に至るまでの時間を T、その経路の長さを L とする。同じ長さをもつ二つの異なる物体の振子が同一の最上点から同一の振幅をもって振動するとき、各振子の質量 m、重量 W、速度 $v(t)$ の各要素にそれぞれ 1,2 の番号をつけて、上の 1.St の結果を時刻 t において各振子に適用すれば、力の平行四辺形の法則を考慮するとき次式が得られる：

$$dv_1(t)=\frac{W_1 sin\theta}{m_1}dt, \quad dv_2(t)=\frac{W_2 sin\theta}{m_2}dt$$

これより、比ををとれば、次式が得られる：

$$\frac{dv_1(t)}{dv_2(t)}=\frac{\frac{W_1}{m_1}dt}{\frac{W_2}{m_2}dt}$$

この結果、次が得られる。

$$dv_1(t)=k\frac{W_1}{m_1}dt, \quad dv_2(t)=k\frac{W_2}{m_2}dt$$

両辺を t に関して積分すれば、次式が得られる：ただし k は定数。

$$v_1(t)=k\frac{W_1}{m_1}t, \quad v_2(t)=\frac{W_2}{m_2}t$$

3.St したがって物質量は力と振動時間に比例し、速度に逆比例する。

3.St の現代的記述

上の二式より次の二式が得られる。

$$\frac{m_1}{W_1}=kt\frac{1}{v_1(t)}, \quad \frac{m_2}{W_2}=kt\frac{1}{v_2(t)}$$

4.St ところが速度は時間に比例する。

4.St の現代的記述

時刻 t における振子の弧の接線方向の微小な運動距離を Δx、微小な時間を Δt、とすれば一般に、

$$v(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

が成立する。すなわち、速度は時間に比例する。これより、次式を得る：

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{dt}{dx}$$

5.St 以上から、時間そのものと速度の逆数との積 [の積分][3] は時間の二乗に比例する。

5.St の現代的記述

なぜなら、積分変数の変換公式および微分積分学の基本定理により

$$\int_0^L \frac{m}{W} dx = \int_0^L t \frac{1}{v(t)} dx = \int_0^L t \frac{dt}{dx} dx$$

$$\frac{m}{W} L = \int_0^T t dt = \frac{T^2}{2}$$

6.St したがって、物質量は起動力と時間（周期）の二乗に比例する：

$$m = \frac{W}{2L} T^2$$

7.St 以上の 5.St, 6.St を 3.St の二つの振子に適用すれば、k を比例定数として

$$m_1 = k\frac{W_1}{2L}T_1^2, \quad m_2 = k\frac{W_2}{2L}T_2^2$$

これより、長さが等しい二つの振子について振動時間（周期）が一致すれば

$$\frac{W_1}{m_1} = \frac{W_2}{m_2} = g$$

が成立し、地上にあっては物質量は重量に比例することがわかる。

結局、この定理の証明のカギは落下速度の相違を周期の相違に転換させたことにあろう。そのためには積分という演算が不可欠である。

追記

ガリレオの発見による**等速落下の法則**の実証実験は一般には簡単ではない。ガリレオはピサの斜塔から大小二つの鉄球を落下させて確かめたという伝説があるが、アリストテレスであれば、それは落下距離が短いから同時に落ちたようにみえるにすぎないという反論をなすだろう。長い距離を落下させれば重い方が早く落ちるかもしれないのである。このような難点を克服するために振子と言う簡便な道具を用いて、その法則を実証できることを理論的に明らかに

[3] 河野訳には［の積分］のことばはない。しかし積分を実行しないかぎり、時間の二乗に比例する結果は得られないだろう。あるいはニュートンは「積分」の演算を実行しながら、それに該当することばをまだ使っていなかったのであろうか。このあたりのことは数学史をひもとかないとわからない。現在の筆者にはその時間がない。

したのが、本稿の定理である。その意味で定理の価値は極めて高いといえよう。ここにおいて、たとえ振子の実験が成功のうちに行われたとしても、この理論があればこそ地球表面において同一の地点では重いものも軽いものも同じ速度で落下することが確証されたことになる。だから理論（ことば）が事実を運んでくるのである。

参考文献

河辺六男訳編 (1979)『ニュートン』（世界の名著）中央公論社
都築正信 (2018)「振子の実験におけるガリレオとニュートン」埼玉大学紀要第 54 巻第 1 号