

小学校教材で製作したサイクロイド振り子の周期精密測定

齋藤 彩 埼玉大学教育学部自然科学講座理科分野
並木俊樹 埼玉大学大学院教育学研究科
近藤一史 埼玉大学教育学部自然科学講座理科分野
大向隆三 埼玉大学教育学部自然科学講座理科分野

キーワード：単振り子、サイクロイド振り子、周期測定、コンピュータ計測

1. はじめに

小学校では振り子について第5学年の理科で学習する。小学校学習指導要領解説理科編の振り子の学習に関する項目では、「振れ幅が極端に大きくならないように適切な振れ幅で実験を行うようにする」と記述されている¹⁾。この記述に従い児童は振れ幅が小さいときだけを学習するので、振り子の周期は振れ幅によらず一定であると学ぶ。しかし、実際には振り子の周期は振れ幅によって変化をする。このことについて、我々は小学生が教材用の単振り子実験器とストップウォッチを用いて振れ幅を大きくしたときに周期がどのように変化するかについて授業実践した研究を報告した²⁾。この研究では、教科書を用いた授業で振り子の周期は振れ幅によらず一定であると学習した小学生が、実際の実験の結果振れ幅が大きくなるほど振り子の周期が長くなることに気づくことができた。また、この研究ではさらに比較的簡単に入手できる素材でサイクロイド振り子を組み立て、その振り子で振れ幅と周期の関係を確かめる実験も同様に行った。サイクロイド振り子では糸につながれたおもりがサイクロイドの軌道を描いて運動するため、その往復運動に要する時間は運動の範囲によらず一定であることが物理学的な運動理論により明らかになっている³⁾。その結果、サイクロイド振り子の周期は振れ幅によらず一定であるという実験的結論を小学生でも得ることができた。

また近年、赤外線センサーと Arduino というマイコンボードを用いたコンピュータでの振り子の周期計測システムが開発が報告された⁴⁾。このシステムでは物体がセンサーを遮った時間を Arduino で計測し、エクセルに計測結果を記録する。この計測システムは測定精度が高く、時間を1マイクロ秒まで計測することができる。

小学生による振り子の周期測定実験ではストップウォッチで周期を測定しており、0.01秒まで表示されるストップウォッチを使用していた。この研究では、サイクロイド振り子の周期が振れ幅によらず一定という結論が得られたが、測定精度をさらに向上させて測定しなおすと、異なる周期が得られる可能性がある。そこで、ストップウォッチよりもはるかに高精度に周期を測定できるコンピュータ計測システムを用いて、我々の作製したサイクロイド振り子の周期が一定なのか、あるいは振れ幅によってどれくらいの差が生じているのかを確かめる実験を行った。これにより、小学校教材用として作製した我々のサイクロイド振り子の物理的性能を明らかにし、改善点や実際の使用における制約条件などに関する知見を得ることを試みた。

2. 振り子の実験装置

実験には小学校の理科実験教材として市販されている単振り子実験器（島津理化 SIP-600）

を使用した。文献 [2] の結果と比較するために、振り子の支点からおもりの重心までの長さは文献 [2] で用いた条件と同じ 0.500 m にした。単振り子実験器をスタンドに固定し、振れ幅を分度器で測りながら変えていき、それぞれの振れ幅で Arduino によるコンピュータ計測システムによる周期の測定を行った。この計測では振り子のおもりの端が計測装置のセンサーを通過したときの時間が記録される。

3. 実験結果

まず、振り子のおもりである鉄球の直径をノギスで計測して鉄球の半径を求めたところ、 0.01510 ± 0.00001 m であった。振り子の支点からおもりの重心までの長さ l を文献 [2] の値 (0.500 m) と同じにするため、糸の長さはメジャーで計測して 0.4850 ± 0.0001 m になるようにした。つまり本研究での l は 0.5001 ± 0.0001 m となり、最後までこの条件で実験を行った。

3-1 単振り子の周期測定

最初に単振り子の周期測定を行い、コンピュータ計測で得られる周期がストップウォッチを用いた計測の周期および理論的な計算から得られる周期と比べてどのようになるかを考察した。振れ幅は 5° 、 10° 、 20° 、 30° 、 40° 、 50° 、 60° 、 70° 、 80° 、 90° の 10 種類で、100 周期の値の測定を 3 回行った後、1 周期の平均値および誤差を算出し周期の値とした。実際に測定を始めたところ 70° 以上の振れ幅ではおもりを振り始めてから 100 周期後には振れ幅が 40° まで減少してしまうことがわかった。そこで、振れ幅 70° 以上では 50 周期の値を 6 回測定した結果から周期の値を算出し直した。

Arduino によるコンピュータ計測システムを用いて、振れ幅を変えながら周期を測定した結果を表 1 にまとめた。この表の中の周期の理論値 (T) は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right\}} \quad (1)$$

から計算した値である。ここで θ_0 が振れ幅、 l は振り子の支点からおもりの重心までの距離、 g は重力加速度である。理論値の計算では g の値を前橋、東京、千葉の 3 つの g の値⁵⁾ の平均値 (9.797897 m/s²) とした。あわせて、実験データをグラフで表すと図1の通りとなった。

コンピュータ計測から得た値と理論値とを比較してみると、すべての振れ幅で両者は誤差の範囲内で一致せず、コンピュータ計測から得た値のほうが理論値よりも小さかった。振れ幅が大きくなるにつれてこの差が拡大し、振れ幅 90° のときでは 0.1 秒以上にも達した。この原因として、おもりの振動途中における振れ幅の減衰が考えられる。(1) 式の計算結果から振り子の周期は振れ幅が小さくなるほど短くなることがわかっている。実験での振れ幅が大きくなればおもりが往復運動するにつれて振れ幅の減衰が大きくなり、見かけ上周期が短くなって測定されてしまうからである。そこで周期の測定方法を変更し、1 周期測定を独立に 20 回を行い、その結果から 1 周期の値を決めた。このときの結果を表 2 中の「コンピュータ計測 (2 回目)」の欄に載せた。また、コンピュータ計測 (2 回目) のグラフも図 1 に描いた。

コンピュータ計測 (2 回目) の値を 1 回目の計測結果及び理論値と比較してみると、1 回目の測定結果よりも理論値に近づくことがわかった。振れ幅 90° でも理論値との差は 0.02 秒以下で

あった。これで振れ幅の減衰が周期の測定結果に大きく影響を与えることがわかった。しかし、やはり測定値は理論値と誤差の範囲内で一致せず、両者の差は振れ幅が大きくなるほど増大した。

表1 コンピュータ計測（1回目）による周期測定結果

振れ幅（度）	周期（秒）	
	コンピュータ計測	理論値
5	1.423918582 ± 0.000009632	1.4230341
10	1.424868741 ± 0.000005941	1.4250694
20	1.432546219 ± 0.000041666	1.4332627
30	1.439848315 ± 0.000080737	1.4470951
40	1.450564495 ± 0.000151766	1.4668106
50	1.465488013 ± 0.000277635	1.4927262
60	1.475826863 ± 0.000345382	1.5252409
70	1.504107870 ± 0.000211445	1.5648848
80	1.531261407 ± 0.000577247	1.6124032
90	1.549187887 ± 0.000761176	1.6688300

再度その原因を検討したところ、振り子実験器の構造によりおもりの往復運動中に振り子の支点の位置が変化し、実質的な糸の長さ（ l ）が変わっていることが考えられた。この実験器は本体をスタンドに固定して、実験では糸の長さを変えたり振れ幅を変えたりできるように、本体から糸をたらす孔の直径が糸のそれよりも十分に大きく作られている。そこで振り子の支点を一点に保つために、支点の位置で糸をダブルクリップで固定しておもりを振らせ、周期の測定を行った。振り子の振れ幅を 5° 、 10° 、 20° 、 30° 、 40° 、 50° 、 60° 、 70° 、 80° 、 90° と変えて、1周期測定を独立に20回行い1周期の値を決定した。この測定結果を表2にまとめた。またそのグラフも図1に示した。

表2 コンピュータ計測結果（2回目）と支点固定での周期測定結果

振れ幅（度）	周期（秒）		
	コンピュータ計測（2回目）	ダブルクリップで支点固定	理論値
5	1.4216788 ± 0.0000371	1.4170160 ± 0.0000588	1.4230341
10	1.4250400 ± 0.0000495	1.4192986 ± 0.0001067	1.4250694
20	1.4325192 ± 0.0001192	1.4302700 ± 0.0001497	1.4332627
30	1.4457966 ± 0.0001762	1.4410450 ± 0.0002839	1.4470951
40	1.4702136 ± 0.0003309	1.4651184 ± 0.0002294	1.4668106
50	1.4975750 ± 0.0002606	1.4921380 ± 0.0004617	1.4927262
60	1.5326104 ± 0.0008108	1.5281016 ± 0.0005279	1.5252409
70	1.5805920 ± 0.0003782	1.5679118 ± 0.0006897	1.5648848

80	1.6313216 ± 0.0004982	1.6160882 ± 0.0006897	1.6124032
90	1.6842094 ± 0.0016650	1.6760316 ± 0.0011371	1.6688300

表 2 からダブルクリップで支点を固定しても、各振れ幅の測定値と理論値は誤差の範囲内で一致しなかったが、40° から 90° の比較的大きい振れ幅の条件下で比較すると、ダブルクリップで支点を固定するほうが理論値に近い周期を得ることができた。この範囲では支点を一点に固定することが正しい周期測定に効果的であることがわかった。

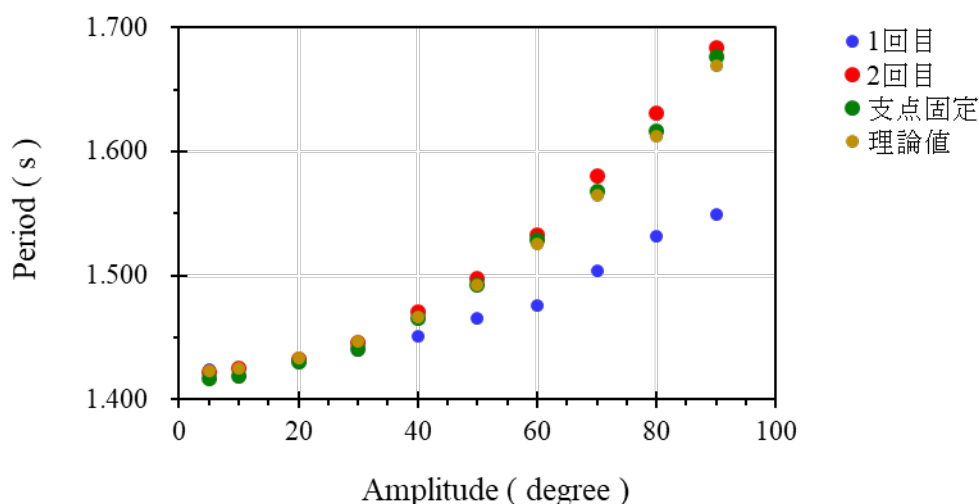


図 1 単振り子の周期測定結果

3-2 サイクロイド振り子の周期測定

Arduino を用いたコンピュータ計測システムを用いて単振り子の周期を精密に測定し、それが振れ幅とともにどのように変化するかを確認することができたので、次にサイクロイド振り子の周期の測定を行うこととした。サイクロイド振り子も文献 [2] で用いた振り子を使用した。この振り子はスタンド、断熱材、金属パイプを使って組み立てたもので、学校現場でも製作できる授業実践に適した実験教材である。実験では文献 [2] の結果と比較するために、振り子の支点からおもりの重心までの長さは文献 [2] での条件と同じ 0.500 m を目安にした。サイクロイド振り子の振れ幅の最大値はサイクロイドの形状をした壁のために 55° までに限られるので、振れ幅を 5°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 55° と変えていき、周期の値を求めた。サイクロイド振り子の振れ幅は、文献 [2] のときと同じように振り子の支点とおもりの位置を結ぶ直線が鉛直軸となす角とした。

サイクロイド振り子での周期測定方法は文献 [2] と同じにし、10 周期測定を 10 回行ったあと 1 周期の平均値と誤差の値を求めた。この結果を表 3 に示す。また、文献 [2] でのストップウォッチによる測定結果も比較のために示した。

ストップウォッチでの測定では 0.01 秒という誤算範囲を考慮してサイクロイド振り子の周期はほぼ一定であるという結果を得ていたが、今回の Arduino を用いたコンピュータの計測でも最

も長い周期と最も短い周期との差は0.01 秒程度であり、この差の値は単振り子に比べて 1/7 にまで抑制できている。振り子のおもりがサイクロイドの軌道上を運動することで、その周期が一定に近づいたことを確認できた。しかし、これは逆に 0.01 秒以下の短い時間スケールでサイクロイド振り子の周期が振れ幅とともに長くなることを示している。本来、サイクロイド振り子の周期は振れ幅によらず一定であるはずなので、理論どおりの結果が得られるサイクロイド振り子の実現を目指して、何が原因でこのような結果になったのかを明らかにすることを試みた。

最初に、周期を 10 周期の測定値から求めていることに問題があるのではと考え、単振り子のときと同様に 1 周期の値を 20 回独立に測定し、その結果から周期を求めた。その結果が下の表 4 の「1 周期測定」の欄に記した値である。これを見ると、やはり振れ幅を変えたときの周期の値は最大値と最小値のとの間に 0.01 秒の差が生じている。また振れ幅が大きくなるほど周期は長くなるという傾向も 10 周期測定から得た実験結果と同じであった。つまり、周期の測定方法（10 周期の値から求めるか、1 周期の値から求めるか）は、この課題解決のための有効なファクターではないと言える。

表 3 サイクロイド振り子の周期測定結果 (1)

振れ幅 (度)	周期 (秒)	
	ストップウォッチ計測	コンピュータ計測
5	1.42 ± 0.01	1.4182492 ± 0.0000033
10	1.42 ± 0.01	1.4190155 ± 0.0000072
20	1.41 ± 0.01	1.4192784 ± 0.0000060
30	1.42 ± 0.01	1.4217858 ± 0.0000050
40	1.42 ± 0.01	1.4240625 ± 0.0000105
50	1.42 ± 0.01	1.4270578 ± 0.0000107
55	1.42 ± 0.01	1.4283906 ± 0.0000243

次に、おもりが受ける空気抵抗がその原因のひとつではないかと考え、直径 1.58 cm (半径 0.79 cm) のガラス玉をおもりとして使用し周期の測定を行った。従来用いていたおもり (鉄球) のほぼ半分の半径である。このガラス玉をおもりとして使用しようとするれば、小学校教材用の振り子実験器はおもりと糸がつながっているので使用することができず、糸にはタコ糸及び水糸 (建築などに使われる伸縮しにくい糸) を使用した。支点からおもりの重心までの長さは今まで通り 0.500 m となるように糸の長さを 49.21 cm になるよう調節し、糸とガラス玉をテープで固定した。これらの機器を用いて周期を測定した結果を表 4 にまとめた。周期測定は1周期を20回独立に測定し、その結果から求めた。

表 4 サイクロイド振り子の周期測定結果 (2)

振れ幅 (度)	周期 (秒)		
	1 周期測定	ガラス玉・水糸	鉄球 (重) ・水糸

5	1.4142008 ± 0.0000337	1.404225 ± 0.000237	1.418651 ± 0.000336	1.4231230 ± 0.0004151
10	1.4154002 ± 0.0000290	1.407096 ± 0.000138	1.420646 ± 0.000169	1.4245706 ± 0.0002248
20	1.4160868 ± 0.0000411	1.408354 ± 0.000107	1.420479 ± 0.000178	1.4258884 ± 0.0004677
30	1.4181786 ± 0.0000820	1.409301 ± 0.000103	1.421815 ± 0.000112	1.4269344 ± 0.0002354
40	1.4191682 ± 0.0000956	1.411329 ± 0.000101	1.423374 ± 0.000160	1.4301618 ± 0.0001920
50	1.4210850 ± 0.0000805	1.412364 ± 0.000124	1.424217 ± 0.000163	1.4325330 ± 0.0001647
55	1.4230628 ± 0.0000688	1.412627 ± 0.000073	1.425296 ± 0.000129	1.4320756 ± 0.0001694

それぞれの実験条件で、5°のときの周期と55°のときの周期の差を求めてみると表5の通りとなった。この値から、サイクロイド振り子の周期は振幅が大きくなるにつれ、ストップウォッチでの測定の最小表示である 0.01 秒よりも小さい範囲で周期が変化しているとわかった。この表 5 の値で比較すると「ビー玉・水糸」が周期の差が最も小さいため、周期が一定に近いように見えるが、それぞれの条件での周期の値自体が違うため、変化の割合でも比較することを試みた。

表5 実験条件を変えたときの周期の差

周期の差 (秒)		
振り子実験器	ビー玉・タコ糸	ビー玉・水糸
0.008862 ± 0.000077	0.008402 ± 0.000025	0.006645 ± 0.000360

なお、ビー玉の直径は 15.030 ± 0.0025 mm、質量は 5.068 ± 0.005 g であった。実験では (a) 鉄球 (大) ・ 1 周期、(b) ビー玉 ・ 1 周期 ・ タコ糸、(c) ビー玉 ・ 1 周期 ・ 水糸について周囲測定を行った。振幅 5°、10°、20°、30°、40°、50°、55° での周期を測定し、振幅 5° の時の周期 (T_5) を基準として他の振幅の周期 (T) との比の値 (T/T_5) を求めた。この値はもしサイクロイド振り子の周期が振幅によらず一定であれば 1 になる。

図 2 はこの実験結果をグラフ化したものである。グラフを見るとすべての実験条件で振幅が大きくなるにつれて周期は大きくなった。この変化は単調増加であったので、単純に振幅と周期比の値の間に 1 次関数の関係式が成り立つとみなし、その近似直線 (傾き) を求めた。この傾きの値が小さいほど、振幅に対する周期の変化が小さいと考えられ、サイクロイド振り子が本来持つ性質に近いと考えられる。得られた傾きとともに相関係数の 2 乗 (R^2) の値も求め、それらを (a) ~ (c) の 3 つの条件ごとに示したのが表 6 である。

3 つの相関係数の値のうち最も小さい値が 0.876 であったので、周期比の増加を 1 次関数でフィッティングすることは妥当であると確認できた。条件 (b) では、振幅が 10° から 40° までの比較的小さい領域でも周期の増大の割合が大きくなっていて、そのために相関係数が他の 2 条件と比べて悪くなった。傾きの値は (c) の時が一番小さくなり、振幅の角度の全ての領域で他の 2 条件よりも周期の増加率は小さくなった。このことから、我々が使用したサイクロイド振り子において、おもりをビー玉、糸を水糸に使用したケースが理想的なサイクロイド振り子の動作にもっとも近づくことがわかった。

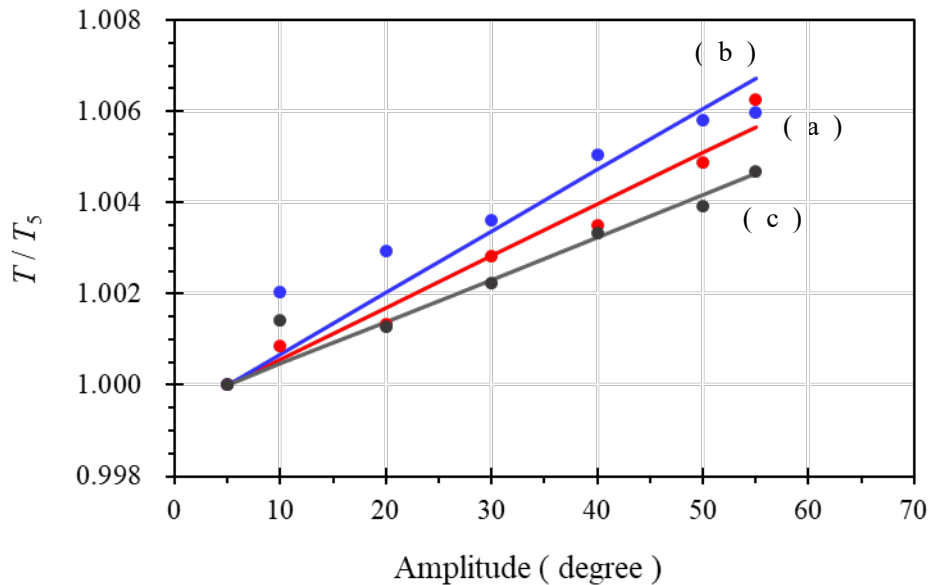


図 2 サイクロイド振り子における周期の比の値
 (a) 鉄球 1周期、(b) ビー玉 タコ糸、(c) ビー玉 水糸

表 6 周期の比の振れ幅に対する変化

	(a) 鉄球 1 周期	(b) ビー玉 タコ糸	(c) ビー玉 水糸
傾き (1 / degree)	0.0001130	0.0001343	0.0000924
相関係数 (R ²)	0.973	0.876	0.941

4. まとめ

Arduino を用いた振り子の周期の精密測定の結果、単振り子では糸の長さの数ミリの違いよりも、おもりが振動を繰り返す際の振れ幅の減衰の方が周期に与える影響が大きいということがわかった。我々が製作したサイクロイド振り子の場合には、振れ幅が大きくなるほど周期が長くなっていることもわかった。しかし、振れ幅による周期の差は 0.01 秒よりも小さかったので、学校現場でよく使われている 0.01 秒まで表示できるストップウォッチではこの差を測定することができない。ストップウォッチを計測に使う限り、我々が製作したサイクロイド振り子は周期が一定であるとも言える。また、我々のサイクロイドで振れ幅とともに周期が変化した原因は明らかにできなかったが、振り子で使用する糸の材料とおもりの種類を適切に選べば振れ幅の増加に伴う周期の増大を抑制することができることも確かめた。具体的にはおもりをビー玉、糸を水糸で、1 周期測定を繰り返すことによって振り子の周期を決定したとき、もっとも周期の変化が小さかった。今後、サイクロイド振り子の周期を一定に近づけるための工夫

として振り子につける壁の形状を本来のサイクロイドの形状に合わせるためにNC旋盤などの機械で正確に削り出して作り直す予定で、それを用いて再測定を試みる。

参考文献

- (1) 文部科学省：「小学校学習指導要領解説理科編」2008, p46
- (2) 大向隆三、宮澤良順、下妻淳志、近藤一史：「小学生が利用できるサイクロイド振り子の試作」応用物理教育 第37巻2号 (2013) pp.73-78
- (3) 伊東敏雄：「な～るほど！の力学」（学術図書出版 2005）pp. 33-35
- (4) 並木俊樹：「マイコンボードによる計測システムの開発」埼玉大学教育学研究科2017年度修士論文
- (4) 吉田卯三郎、武居文助、橘芳實、武居文雄：「六訂物理学実験」（三省堂 2014） p. 330

(2020年3月31日提出)

(2020年4月10日受理)

Precise Measurements of Periods of Cycloid Pendulum Using a Single-Board Microcomputer

SAITO, Aya

Faculty of Education, Saitama University

NAMIKI, Toshiki

Graduate School of Education, Saitama University

KONDO, Hitoshi

Faculty of Education, Saitama University

OHMUKAI, Ryuzo

Faculty of Education, Saitama University

Abstract

The periods of a cycloid pendulum were precisely measured using a photodetector and a single-board microcomputer. Our cycloid pendulum is composed of a commercial teaching material of a simple pendulum and a pair of cycloid shaped walls. Theoretically the period of the cycloid pendulum is constant, which is determined simply using the distance between the fulcrum of the pendulum and the center of gravity of the weight. However, our measured period, which has an accuracy of $1 \mu\text{s}$, increased as the angular amplitude increased. The reasons for this discrepancy were mainly the air resistance of the weight and the deflection of the thread of the pendulum. Then, we changed the kind of weight and the materials of the thread and again measured the dependence of the angular amplitude on the periods of the cycloid pendulum. As a result, the periods were almost constant when we used the glass marble as a weight and the leveling string as a thread even if we increased the angular amplitude.

Keywords : simple pendulum, cycloid pendulum, precise period, computer measurement