氏　　　　　名	浜野　大
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第1200号
学位授与年月日	令和3年3月25日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当
学 位 論 文 題 目	Time behavior of solutions to nonlinear Schrödinger equations （非線形シュレディンガー方程式の解の時間挙動）
論 文 審 査 委 員	委員長　教　授　町原　秀二 委　員　教　授　長澤　壮之 委　員　准教授　佐藤　洋平 委　員　教　授　福井　敏純

論文の内容の要旨

本論文では次の非線形シュレディンガー方程式を取り扱う：

・連立系の非線形シュレディンガー方程式：

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = -2v(t,x)\overline{u(t,x)}, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ i\partial_t v(t,x) + \kappa\Delta v(t,x) = -u(t,x)^2, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$，$\partial_{\mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial t}$，$\Delta = \Sigma_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$，$\kappa > 0$，$(u,v) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}^2$、は未知関数で解、$(u_0, v_0) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は既知関数で初期値である。

・ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式：

$$(\mathrm{NLS_V}) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) - V(x)u(t,x) = -|u(t,x)|^{p-1}u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

ここで、$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ は未知関数で解、$u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ は既知関数で初期値、$V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ は既知関数でポテンシャルである。

特に、次の解の時間挙動について考察する。

・散乱：時間無限大で非線形効果が薄まり非線形解が線形解に漸近する、
・有限時間爆発：有限時間で解が集約する、
・無限時間爆発：無限時間で解が集約する、
・定在波：空間に関する形状が一定で、時間に関して周期的になっている。

・連立系の非線形シュレディンガー方程式について

連立系の非線形シュレディンガー方程式に関して、著者は（$d=5$（preprint, arXiv : 1805.12245）、著者、戍亥隆恭氏、西村蔵ノ輔氏は $d=5$（to appear in Funkcialaj Ekvacioj, preprint, arXiv : 1903.05880）、戍亥隆恭氏、岸本展氏、西村蔵ノ輔氏は $d=4$（Discrete Contin. Dyn. Syst. 39 : 6299-6353, 2019）で基底状態解

を用いることにより、シャープな散乱基準を与えた。これらの結果は基底状態が軌道不安定であることに依っている。軌道安定とは、初期値が基底状態に近ければ各時刻で解が定在波解と近くなっていることを意味する。

しかしながら、基底状態の軌道安定性の観点から $d = 3$ では状況が異なり、基底状態を用いたシャープな散乱基準を得ることは期待できない。そのような状況において、眞崎聡氏（Commun. Pure Appl. Anal. **14**：1481-1531, 2015）は、単独の非線形シュレディンガー方程式（$V = 0$ をもつ（NLS_V）に関して質量劣臨界で散乱のシャープな基準を与えた。単独の方程式では、容易に得られる散乱解は自明解 0 のみであり、散乱基準はそこから測られていた。

一方で、本論文で扱う連立系の非線形シュレディンガー方程式は非線形構造から自明な散乱解（0,0）以外にも非自明な散乱解（$0, e^{\kappa it\Delta}v_0$）（初期値（$0, v_0$））をもつ。この事実を用いて、本論文では先行結果とは異なる散乱基準の測り方を与える。この散乱基準上の初期値をもつ解の性質とこの散乱基準の最適化列を初期値にもつ解の性質を調べる。さらに、従来の測り方であった原点からの測り方についてもより一般的な枠組みで考察する。

・線形ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式について

線形ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式に関して、Y. Hong 氏（Commun. Pure Appl. Anal. **15**：1571-1601, 2016）によりポテンシャルをもたない基底状態下の初期値をもつ散乱の結果が与えられていた。

Y. Hong 氏の与えた結果では非線形項の冪に制限があったため、本論文ではより一般的な冪をもつ非線形項を取り扱う。また、証明に使用する不等式を変えることにより Y. Hong 氏の結果と比較してより弱い表現の結果を得る。さらに、有限時間爆発または無限時間爆発、有限時間爆発の結果も与える。

しかしながら、この結果はポテンシャルをもたない基底状態を用いているためビリアル汎関数を制御するための仮定を必要とし、そのためにポテンシャルをもたない基底状態下の初期値を完全に分類できていない。そこで、ポテンシャルを有する最小化問題を考察することにより、初期値を完全に分類することを試みる。そのための準備を次に行う。

まず、ネハリ汎関数を制約条件とし定常問題から定まる作用汎関数の最小化問題を考える。適切なポテンシャルの仮定の下、この最小化問題は最小元をもたないことを示す。さらに、球対称関数に制限することでこの最小化問題は達成され、その最小元は“球対称”基底状態であることを示す。ここで、得られた“球対称”基底状態を用いて、その作用より小さい作用をもつ初期値に対する解の時間大域適切も証明する。

その後ビリアル汎関数を制御するために、ビリアル汎関数を制約条件とする作用汎関数の最小化問題を考える。このとき、ビリアル汎関数に含まれる項で作用汎関数に含まれないものが存在するため、ビリアル汎関数と作用汎関数を結びつけるための条件が必要となる。本論文では , ポテンシャルに依存する制限を周波数に課すことにより関連付ける。この制限の下、この最小化問題は最小元をもたないことを示す。さらに、球対称関数に制限することによりこの最小化問題は達成され、この最小元は“球対称”基底状態であることを証明する。これらの下限の値より小さい作用をもつ初期値に対する解の時間大域的適切も証明する。これらの最小化問題の特徴付けは基底状態下の初期値を完全に分類するための基盤が整えられたことを意味する。

しかしながら、その後の時間挙動の議論においても困難を含んでおり一般のポテンシャルに対して基底状態下の初期値の分類はいまだに完成していない。これは今後の課題である。比較的良い性質をもつ逆冪乗ポテンシャルに制限することにより、基底状態を用いて有限時間爆発、無限時間爆発の結果を得る。先程の時間大域適切の結果と無限時間爆発の結果を合わせることによりポテンシャルをもたない基底状態下の初期値のいくつかの条件に関する同値性も導かれる。

論文の審査結果の要旨

多くの非線形偏微分方程式の研究は、自然科学や工学などの数学の体系の外からの要請に始まり、その後その研究自体が成熟すると、数学的興味が独り歩きをし、やがて体系外の要請を忘れ、数学研究の一分野として自立するという経過を辿る。また非線形問題に一般論はなく、個々の現象に一つの方程式があり、そこに非線形解析の展開がある。浜野氏の研究対象である非線形シュレディンガー方程式は1970年代からの研究論文を見つけることができる。1980年代を黎明期として活発に研究されるようになり、1994年にBourgain氏が空間1次元非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を周期境界条件付きで適切性を与えフィールズ賞を受賞した。現在でも多くの若手研究者に読まれている非線形シュレディンガー方程式の業績を纏めたCazenave氏の書籍は1996年に出版されたが、Bourgain氏の受賞対象の研究結果を載せていない。これは研究発展の進度の速さと成熟期に起こる研究難度の急激な上昇を反映している。現在非線形シュレディンガー方程式の研究は偏微分方程式、ひいては解析学の一大分野として世界的に注目されている。日本人研究者の参入も多い。

線形シュレディンガー方程式は量子力学の基礎方程式である。しかし非線形シュレディンガー方程式は数理物理学と数学的トイモデルの間の領域に属しているといってよく、その出自も幾つかある。その一つは非相対論的多体問題の中の平均場近似である時間依存のHartree-Fock方程式の近似として現れる。第二の出生地は波数が振動数に非線形に依存する分散性媒質（連続体）中の非線形波動の世界であり、いわゆる準単色波の非線形変調を記述する方程式として現れる。分散性の効果と非線形性の効果との釣り合いによってその波束の時間発展が決定されるような物理現象において共通にあらわれる一般的な方程式である。幾つか例を挙げると、プラズマ中のLangmuir波、誘電率がKerr規則に従う電場依存性を持つ光ファイバー中のレーザー（光ソリトン）、非調和結晶中の熱パルス、水面波など。いずれにしても、非線形シュレディンガー方程式は空間3次元以下の場合に、その物理的意味をもち、したがって一般次元で取り扱う事は、Navier-Stokes方程式の場合と同様、純粋に数学的興味である。さらに、初期値問題の大域的適切性や漸近挙動・散乱理論を扱うとき、非線形項の増大度（無限大の位数）や無限小の位数に空間次元と関連した臨界指数が現れるのであるが、この臨界指数は物理的に意味のある数であることはなく、これを求めることも数学的世界の完全さを指向する純粋に数学的興味である。

では実際に、非線形偏微分方程式の数学的研究の内容を見てみる。浜野氏の研究の中心的対象は非線形シュレディンガー方程式の初期値問題である。

① 時間局所適切性と時間大域適切性：
偏微分方程式初期値問題の研究の基礎をなす、解の一意的存在定理、そして解の初期値への連続依存性を保証する。ここで時空間依存の方程式に対して時間に対して連続、空間に対してソボレフ空間を使用することが定石となっている。有限時間における保障を時間局所適切性と呼び、時刻無限までの保証を時間大域適切性と呼ぶ。証明はDuhamelの原理により積分方程式に書き直し、縮小写像の原理に訴え、解を捕まえる。このとき線形方程式からの情報を巧みに利用することになる。線形シュレディンガー方程式の減衰効果、平滑化効果、そしてそれらを利用したStrichartz評価を駆使することになる。そこではフーリエ変換を基礎とした調和解析による技術援用が必須となっている。また非線

形項の評価に関しては実関数論で深く進行している関数空間論、そこにはベソフ空間など技術的に特化した空間を含む。そして双線形評価や一般のべき乗型非線形項に対する評価式。これらは以下の研究にも重要な役割を担う。

② 散乱理論：
非線形シュレディンガー方程式の解が時刻無限大で線形シュレディンガー方程式の解に漸近することを観察する。これは線形のポテンシャル散乱理論の類似の構築とも言えるが、浜野氏の扱う非線形方程式初期値問題の観点からは時間大域適切性が要請され、そして解の時刻無限大での時間挙動を扱うことになるため独自の意義深さをもつ。定理証明においては Duhamel 項における Strichartz 評価のためのノルムの有限性を示すことになる。ここで時間大域的適切性を得ること、および散乱現象の定理を得ることにおいて解が小さいと解きやすいということを注意しておく。

③ 解の爆発：
解が爆発するとは、英語で a solution blows up と書き、解の関数の所属する関数空間のノルムが解の最大存在時刻 T_{max} において発散することをいう。ここで T_{max} が有限時刻のときもあれば無限時刻のときもある。現象の数学的再現には時間局所適切性の証明議論から得られる二者択一性の事実と、位置の分散に関する恒等式から得られる背理法による証明が用いられることが多い。

④ 孤立波の安定性：
物理的には波動現象において初期状態にかかわらず同じような波のパターンが観察でき、それが定在波解のうち安定なものによって記述されているのではないかという認識に基づく。数学的に言い直すと、解の漸近挙動が、安定なこれらの特解によって記述されるという予想である。定在波解の形状は非線形シュレディンガー方程式に対応する非線形楕円型方程式の解を用いれば、複素数の偏角部分に時間を含む関数と積をとったものが非線形シュレディンガー方程式に解（孤立波）になる。孤立波を持つ系は非線形相互作用が有限時間に留まらないので、漸近的に自由場と考えている上述の散乱理論の枠組みとは異なることに注意する。また対応する非線形楕円型方程式の解の存在のための証明には変分法が用いられるなど技術的取り扱いが大きく異なる。

以上①、②、③、④、いずれも質・量ともに深い研究が既に進展中であり、それぞれ独自の数学の理論が確立されつつあると言ってよい。①の理論は方程式の基礎事項なので多くの研究者が一様に学ぶが、②、③、④は各研究者がいずれか一つを選び、その一つを生涯をかけて研究していくケースが一般的である。３つの研究は互いに独立した形で解法が得られてきた経緯がある。その中で浜野氏は博士論文において何を研究したか？それを以下に説明する。

浜野氏は非線形シュレディンガー方程式の解の時間大域挙動を決定付けるための条件を、対応する楕円型方程式の解で表現される仮定の下で求めた。つまり①の基礎理論をおさえて、②と③という異なる時間挙動が起こる初期値をクラス分けし、そのときの条件として④の解を用いる。そのことの要請から、自ら④の解の存在定理を証明したということになる。具体的には

(1) ある関数空間に属する線形ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式に対して、ある汎関数の値が定在波解のものより小さい初期値関数に対して、さらなる条件の劣臨界のときに解が散乱することを示し、超臨界のときに解が爆発することを示した。
(2) (1) で用いられた定在波解の存在定理を証明した。

(3) (1) における超臨界条件下で、球対称性を仮定、もしくは重み付き関数空間の条件を付加することにより、爆発が必ず有限時間内で起こることを示した。つまり無限時間爆発は起きない。
(4) 分母に位置変数のべき乗型関数で構成されたポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式に対して、対応する定在波解によって表現される条件の下、解の散乱現象と爆発現象のクラス分けを与えた。ポテンシャルのべきに関して短距離散乱の理論の完成となる。また長距離散乱理論の基礎を築いた。
(5) 二次の非線形項をもつシュレディンガー方程式のシステムの初期値問題を調査した。このとき空間次元数が 4 のときに初期値問題適切性における臨界状況となるため、扱いが非常に難解となるが、その場合においても散乱現象の証明に成功した。
(6) (5) の方程式のシステムを空間 3 次元で調査した。この場合もはや普通のソボレフ空間では散乱理論が期待できないが、重み付き空間における散乱理論を示した。このとき爆発現象とのクラス分けは定在波解ではないため、その基準選びにおいても新たな基準を得て議論している。

以上のように浜野氏の博士論文は非線形偏微分方程式論において重大な意義をもつ結果と、そのための新しい証明技術を収めてある。十分に学術的価値の高い論文であることに疑いの余地はない。学位論文の審査結果は合格とする。