社会科学論集　第165・166合併号　2022.3

《特集寄稿》

経済分析メジャーへの招待

丸　茂　幸　平

1　はじめに

この度，メジャー選択を控えた皆さんに経済分析メジャーをご紹介する機会を頂きました。経済分析メジャーは，経済学を中心に学ぶところ，とされています。しかしながら，経済学の正式な教育を受けたことのない僕にそれを紹介する資格があるのかは甚だ疑問でもあります。実は，経済学と経営学の境目にも自信がありません。とはいえ折角頂戴した機会ですので，僕なりに経済学（ひょっとすると経営学も多少混じっているのかもしれませんが）やその役割などについて外側から見聞きしたことや思ったことをご紹介したいと思います。僕が見ているのは，経済学を専門とされる方々が内側から見ているのとは全く違う景色だと思います。いうまでもありませんが，どちらが正しいというものではありません。皆さんがこれから見ることになるものは，どちらとも異なるかもしれません。

1.1　外側から見た経済学

「経済学の正式な教育を受けたことがない」と書きましたが，僕自身は工学系で学びました。当時通っていた大学では，経済系の学生は「猫並みに良く寝る」と揶揄されていました。経済系の友人や先輩は，経済学に興味がある，というよりも，受験勉強がよくできるので大学に入ったけれど大学に卒業証書以外の何かを期待しているわけではない，といった風に見えました。（念のためですが，今の皆さんがそう見えるというわけでは決してありません。）彼らは，部活や各種イベントなどに励んで青春を謳歌し，時期が来ると急にリクルートスーツに着替えて，華やかな業界に就職していきました。工学系の時間割は，絶望的に難解な必修科目と，終わるまで帰れない実験や演習で埋められており，また，カリキュラムも就職活動への配慮など一切ないものでした。

華やかに見える経済系のキャリアを少し覗いてみたくなったという動機もあったのですが，大学を出ると銀行に就職をしました。その職場には（当たり前ですが）経済学部出身者が多くいました。彼らは，僕が大学で出会った友人達と違い，大学で経済学をきちんと勉強していたように見えました。僕自身も経済学の教科書を眺めるなどして少し勉強をしました。そこで意外だったのは，経済学をそれなりに勉強した人たちは，経済学の理論をあまり信頼していないということです。たとえば経済学では，人々は常に合理的な選択を行うと仮定されることがあります。また，金利や失業率など，世の中の様々な量の間の関係を（理工系の人間でもうんざりするような複雑な）数式で表すことがあります。しかし常識的に考えると，私たちの周りに「常に合理的に選択を行う」ような人が一人でもいるでしょうか？　また，実際の世の中がそんな式で表されるとも思えません。「経済学の理論は現実を正確に描写するのでなく，現実を近似するのだ」という弁護も聞かれますが，いわゆる専門家の間でも経済について話すことがバラバラであることを考えると，近似の精度はあまり良くないように思えます。中には，こうした仮定や方程式を熱心に信じている人もいたようですが，経済学を勉強した人とこうした話をすると，彼らの多くはこれらをちっとも信頼しておらず，

「そういう見方もあるかもね」などと言います。僕自身はどちらかというと常識の方を信頼していたのですが，経済学を何年も勉強している人たちまで経済学の仮定や方程式をそれほど信頼していないというのは意外でした。たとえば，電磁気学の講義では**マックスウェルの方程式**は現実をとてもよく説明するものとして教えられ，教わる方も（どういう常識を持っていようと関係なく）概ね方程式の方を信頼して勉強をします。なぜなら，マックスウェルの方程式が現実を説明するなら，その上に積み上げた理屈もそうだろう，と思うからです。経済学部の学生は，現実に成り立っているとも思えないような仮定や，その上に積み上げられた理屈を何のために勉強しているのでしょうか？

この疑問に対するある人の答えはとても明快でした。やや乱暴に要約するとそれは「経済学は金融や政策・経営の分野の標準言語なのだから知っている必要がある。それが世の中を正確に表しているかどうかは問題ではない」というものです。この説明は腑に落ちます。組織の中で働くと，内外と意思の疎通をして，全体としての意思決定に貢献をする必要があります。このときに，経済学の言葉で意思疎通を行うことが多いというのです。

唯一最良の決定がいつでも理屈から分かるならば，経営者の仕事は退屈なものでしょう。しかし経営者は，経済学の理論にいつも正しい答えを与えてくれることなど期待していないようです。分からないことだらけの中で A か B かを決めなければならないときに，「分からないから決められない」というのは，個人としては正直な態度です。しかし意思決定ができないのは組織としては最悪な状態であるのかもしれません。後から見ると間違った決定であったとしても，決められないよりはマシなことの方が多いのでしょう。経済学の言葉は ── それが世の中をうまく表しているかどうかにかかわらず ── 人々の間の意思疎通を助け，ときにはよってすがるものであるのでしょう。そうして何かを決めるときの役に立っているのです。経済学で使われる方程式が，現実の何かをうまく表しているかどうかはともかく，詰まるところ経済学者や経済学のユーザーの頭の中を表していることは間違いなさそうです。

1.2　事実と物語

意思疎通を助ける他にも，言語としての経済学にはもう一つ重要な役割があるように思えます。それは物語を作ることです。私たちが世の中の何かについて「理解できた」と思えるのはどのようなときでしょうか。事実が観察できたからといって，理解できたことにはならないでしょう。たとえば，埼玉県の経済の状態について理解しようとしたとき，人口，県内総生産，就業者数，新車販売台数，などなど様々な数字はもちろん役に立つでしょう。こうした数字は間違いなく事実の断片ですが，では，これらの数字を暗記すれば経済の状態が理解できるのでしょうか？　ふつうそうではないでしょう。私たちが何かを「理解できた」と思えるのは，観察した事実が頭の中に入ってきたときではなく，観察した事実の背後にあるはずの物語が頭の中に出来上がったときではないでしょうか。数字を眺めて，「この数字が上がるということは，こういうことが起こっているはずだから，そうなって，ああなって，それであの数字が下がるのか」という物語が頭の中に出来上がると，「よし，理解できた！」と 思えるのではないでしょうか。経済学はこうした物語を作るときの登場人物やその性格を与えてくれます。たとえば，「家計」だとか「経済主体」は便利な主語でしょうし，ある経済主体が「合理的であると仮定する」と言ってしまえば，それ以上その性格について細かく考えずに済みます。

私たちが，世の中全体の物語を，映画やゲームでも観るように観察できれば，世の中を理解することは簡単なのかもしれません。しかしほとんどの場合私たちが観察できるのは，事実やその断片である数字だけで，その背後にある物語が見えることは稀です。個別の事例に対して，詳細な物語を直接観察できることはあるかもしれません。しかし，世の中全体の物語はふつう観察できません。私たちは，世の中を理解しようとするとき，ときには経済学の助けを借りながら，観察された事実

を上手く説明できるような物語を作るわけです。

当たり前ですが，このようにして作った物語は，どこまでが正しいのかを確かめることができません。さらにいうならば，ふつう，観察された事実を説明できる物語は 1 つだけではありません。これはある大学院生に教えてもらった話なのですが，Lazarova et al.（2017）という論文では，世界的に展開するある企業グループの子会社を調査して，子会社の収益性と自由裁量権の間に正の相関 ── つまり片方が大きいと，もう片方も大きくなる傾向 ── が存在するという事実を見つけました。この事実は，たとえば「子会社の自由裁量権が大きいと，その場その場での柔軟で適切な意思決定が可能で，それが高い収益性につながる」という物語で説明できます。しかし，この事実を説明できる物語は他にいくらでも考えられます。たとえば「収益性が低い子会社に対しては，テコ入れのために本部が関与を強めるので，自由裁量権が小さくなる」という全く別の物語でも説明できます。もう少し詳しく調べれば，（少なくとも調べた範囲においては）これらのうちのどちらかが正しいことが分かるかもしれません。あるいは全く違う物語の方が観察された事実を上手く説明できるのかもしれません。そもそも，すべての事例を説明できるような物語など存在しないのかもしれません。

このように，世の中の広い範囲を説明しようとする物語は全幅の信頼を置けるようなものではありません。人間の集まりやその行動は，私たちの身の周りを考えただけでも恐ろしく多様で複雑でしょう。それを一括りに説明する物語を探す試み自体が無茶なのかもしれません。しかしそれでも，私たちが「理解できた」と思うためには何某かの物語が必要です。後で間違っていることが分かるかもしれないような物語でも，何も持たないよりは理解の助けになります。経済学は，このような意味で，私たちの助けになってくれるでしょう。（なお 事実と物語の関係については，『基礎から学ぶ実証分析』の第 1 章でも説明してあります。埼玉大学図書館や経済学部研究資料室にて貸出をしていると思いますので，ご興味があればご参照ください。そこでは，それぞれエビデンスと仮説という呼び方をしていますが同じことです。）

さて，ここまで経済学について僕が見聞きしたことや思ったことを書いてきました。慣例に従うと，ここから先では僕の専門に関係することを紹介することになっています。本当はその部分がこの文章のメインということになっているのですが，ほとんどの人が読み飛ばすでしょうから，その前に皆さんにお伝えしたいことを書いておきます。皆さんはこれから経済学かあるいは経済学部が提供する他の学問を勉強されると思いますが，上のような事情は程度の強弱こそあれどこでも同じであると思います。（突き詰めれば自然科学にもこのような事情はあります(1)。）何を学ぶにせよ，それが「唯一絶対の真理に至る道だ」などという信仰めいた気持ちは間違っても持たず，生きるうえでの方便(2) として身に着けるのが健全だと思います。また，いつか皆さんがある分野の専門家になったときには，自分では理解した気になったり，また周囲からも分かっているように振舞うことが求められるかもしれません。しかし，「本当は分からないことの方がはるかに多いのではないか？」という疑問を常に抱いていた方が世の中の変化に対応しやすいと思います(3)。

1.3　経済学の周辺

先ほどキャリアについて触れましたが，大学では数理統計学を中心に，数理工学と呼ばれる分野を勉強しました。しかし，最初に就職した銀行も，

（1）　たとえば，Becker（2018）には，20 世紀の物理学者が物語を必死に探す様子がよくあらわれています。
（2）　Parton（2015）の言う “the art of getting by” といったところでしょうか。
（3）　Weller (1984) から引用すれば，“It’s a frightening thing when it dawns upon you that I know as much as the day I was born” とありますが，それを認識することの重要性を説いているともいえます。また “out in the pastures we call society, you can’t see further than bottom of your glass” とも言っています（Weller, 1982）。

今勤めている埼玉大学経済学部も，経済学が主役の職場です。経済学を専門にする仕事は，銀行でも大学でも，概ね次の 3 種類に分類できるように思えます。i）経済学者に知られていなかった事実を観察・記録すること，ii）観察・記録された事実を説明する新しい物語を考えること（なお，この作業はしばしば「分析」と呼ばれます。我が経済分析メジャーも分析という名を冠していますので，物語づくりに重きを置いていると理解しています），iii）すでにある物語を使って予想や提言をすること。なお，順番は必ずしもこの通りでなく，ii）の物語が先にあって，それに合うような i）事実を探す，という場合もあります。

その中で僕は i）には興味がありましたが，ii），iii）の方向で経済学を専門としている人たちに通用するような物語を作れる自信も無く，経済学の内側に入り込むことは考えませんでした。僕は経済学の周辺で，経済学からはみ出してきた仕事をしてきました。大雑把に言えば，数理的な部分の比重が大きく，かつ経済学の理論に頼らなくてもできるような仕事です。こうした仕事の例として，次節からは，銀行に勤めていたときから関わってきた，投資における金融リスク管理の話をご紹介します。（ちなみに，今の主な関心ごとは，エルミート多項式系という関数系の極限での性質と，それが何かの役に立ちそうかを調べることです。しかし，ここでその話をしても，読み飛ばす人の数がますます多くなるだけだと思いますので，ここでは別の話題を紹介することにします。エルミート多項式系とその応用について興味のある方は，Marumo and Wolff（2016）などをご参照ください。）

2　投資における金融リスク管理

ここでご紹介するのは，金融機関などの組織が行う投資とそのリスク管理のお話です。皆さんの中には「高校生の頃から株式や FX への投資をやっていた」という方もいらっしゃるかもしれませが，ここでのお話は，個人が行う投資とは違うものです。ましてや，読んだからといってうまく儲けられるようになる話でもありません。金融機関などで投資やそのリスク管理を担当している人が日々の仕事として行っているような事柄を簡略化してご紹介します。前節で物語という言葉を持ち出したので，ここでも物語がどのように使われるのかも考えてみましょう。

金融機関などが行う投資に対しては，大雑把に分けて 2 つの見方が考えられます。まずは，この 2 つの見方について考えて，それからリスク管理についてご紹介します。

2.1　投資に対する 2 つの見方

儲けに対する見方

投資に対する 1 つ目の見方はもちろん，儲けに目を向けるものです。多くの金融機関において，投資を行う主な動機は儲けを出すことでしょう。それではどのようにすれば儲けが出せるのでしょうか。残念ながら僕はこの方面には詳しくありませんし，経済学の理論も「どうすれば（人よりも）多く儲けられるのか」を教えてくれそうもありません。経済学の教科書に載っている**効率的市場仮説**から導かれるのは「他の市場参加者を出し抜いて自分だけ儲けることは無理そうだ」という感想でしょう。

誰でも思いつくのは，将来の予想を立てて，それが実現すれば儲かるだろう，ということです。しかし，市場で仕事をしている人から聞いたことがあるのは，これとは少し違う話です。将来の予想というのも 1 つの物語ですが，こうした物語を儲けにつなげるにはコツがあるそうです。それは，市場参加者の間に広まりつつある物語に，他の市場参加者よりも先に気が付くことと，広まった後は，その物語が通用しなくなる前に手を引くことだそうです。たとえば任天堂の株式への投資を検討しているとします。この原稿を書いている 2021 年 11 月の時点では，すでに Switch の有機 EL モデルが発売されており，先には『スプラトゥーン 3』など人気シリーズの新作の発売が控えています。こうした情報をもとに，「新作などは，世の中で今思われているよりもよく売れることになるだろう。だから株価は上がるだろう」とか，

「今思われているほど売れるわけがない。株価は下がるだろう」といった物語が考えられます。しかしこうした物語が儲けにつながるかどうかには，何か月かあとに本当に新作が売れているかどうかよりも，「売れるだろう」という物語が明日みんなの間で共有されるかどうかの方が重要だというのです。これは前節で触れた，経済学のユーザーと物語の間の関係と少し似たところがあります。企業や世の中の状態を正確に表す物語と儲けにつながる物語は別物なのです。市場で仕事をしている人たちは職人的な経験や勘によって，どの物語が儲けにつながるのかの判別をしているようです。

損失に対する見方

投資に対する２つ目の見方は，儲けではなく，損失に目を向けるものです。この視点は，どちらかというと投資をする主体の内部からというよりも外部から向けられることが多いでしょう。誰かが個人として投資をする場合，結果的にいくら損が出ようとも外側からはあまり口出しできません。しかし，銀行のような金融機関が業務の一環として行うような投資についてはそうはいきません。もし，私たちがお金を預けている銀行が無茶な投資をして大損をしてしまったら，私たちの預金が戻ってこないかもしれません。銀行が預金を集めるには，預金者に対して「うちは危ない投資はしていませんよ」ということを示す必要がありますし，国などの規制・監督当局もそれを求めます(4)。

金融業界では，保有している資産に将来損失が発生してしまう可能性を**リスク**といいます。投資にはある程度のリスクが常に伴います。投資に伴うリスクが，許容できる範囲に収まるように投資のやり方を管理することを**リスク管理**といいます。金融機関がリスク管理を行う目的には，それが適切に行われていることを広く公表することも含まれます。したがって，儲け方のノウハウと違って，ある程度やり方が標準化されています。

ここから先では，損失に目を向けて，このリスク管理のやり方の一つをご紹介します。そこでは，上の１つ目の見方で考えた儲けに関するような（面白そうな）物語は使われず，観察された数字を使って淡々と作業を進めていきます。

2.2　リスクとその計量化

2.1 節では，「保有している資産に将来損失が発生してしまう可能性をリスクといいます」と説明しました。この説明からも分かりますが，リスクには２つの側面があります。１つ　は，発生しうる損失の**規模**です。もう１つはそれが発生する可能性の高さ，つまり**確率**です。「いくら以上の損失が発生する確率は何パーセント」のように，生じ得る損失の規模と，それに対応する確率が分かれば，リスクについて知るべきことは概ね把握できたといえます。

このようにリスクというものは，規模と確率という２つの次元を持ちます。損失の規模を横軸，対応する確率を縦軸にすると，リスクは，平面上の１本の曲線として表すことができます。こうしたリスクの中で，金融機関のリスク管理が注目するのは，経営に悪い影響を与えるほどの大きな損失が発生するようなリスクです。金融機関の投資においては，ふつう，こうした大きな損失が発生する確率は低いものと考えます。なぜならば，経営に影響するほどの大きな損失が高い確率で見込まれるとしたら，その投資のやり方は，――少なくとも リスク管理の観点からは――まずいものであることがただちに分かるからです。

リスク管理では，このような「低い確率で発生するような大きな損失」を１つの数字に要約します。この作業をリスクの**計量化**といいます。本来曲線で表されるものを１つの数字に要約するわけですから，どのようなやり方を使っても情報の損失は避けられません。しかし それでも，異なる資産のリスクを比べたり，抱えているリスクが許容可能かどうかの判断をするには１つの数字に要約をした方が便利なのです。様々な要約の仕方が

（４） BCBS（2017, 2019）など。

ある中で，3節ではValue at Riskと呼ばれる指標をご紹介します[5]。

2.3　リスクの計量化とリスク管理

損失には，それを穴埋めできるだけの資金を備えておくことで対応するのが一般的です。リスク管理の基本的な考え方は，将来発生するかもしれない損失の大きさを，計量化したリスク量で把握し，それが損失に対する備えでカバーできる範囲に収まるように投資全体を管理することです。

3　Value at Riskとその利用

ここでは，Value at Risk（以下VaR）とそれを利用したリスク管理について考えてみましょう。

3.1　自己資本の割り当て

すでに述べたように，投資にはある程度のリスクが常に伴います。つまり，将来損をしてしまう可能性は常に考えておく必要があるのです。前節で確認したように，「この程度の損失までは許容する」という水準をあらかじめ決めておき，それに対して準備を行っておくことが必要です。

金融機関の内部では，**自己資本**を割り当てることでこうした準備をします。自己資本については，会計では「貸借対照表の純資産」などの説明があると思います。リスク管理においては，「誰にも返す必要のないお金」くらいの理解で概ね十分でしょう。金融機関全体として持っている自己資本のうちいくらかを市場での投資に割り当てとして取っておいて，そこで発生するかもしれない損失に備えるのです。自己資本の割当額は，金融機関全体でもっている自己資本額と，市場への投資にどれだけの余力を割くかという経営の判断によって決まるでしょう。

万が一，金融機関全体で自己資本を超えるような損失を被ると，預金などの返済ができなくなり，金融機関としては破綻してしまいます。

3.2　リスク・ホライズン

ここまでの説明では，「将来」という曖昧な未来における損失の可能性をリスクとしてきました。しかし，リスクを計量化するには，どの時点のリスクを考えるのかを特定する必要があります。リスクを考える将来時点を，**リスク・ホライズン**といいます。

リスク・ホライズンは，投資から手を引くのにかかる時間をもとに決めることができます。個人が行っている投資ならば，「やめよう」と思った瞬間にスマホからでも持っている資産を売却することができるかもしれません。しかし，金融機関の行っている投資の場合，保有している資産の規模が大きいことなどから，売却や反対取引などによって投資から手を引くのにある程度の時間を要するのが普通です。持っている資産の規模や種類にもよりますが，最低でも1営業日，ふつうは10営業日（つまり2週間程度）やそれ以上の期間をリスク・ホライズンとして設定することが多いといえます。

3.3　資産の将来の価値と損益

上のようにリスク・ホライズンを定めると，次に考えるべきは，持っている資産の価値がリスク・ホライズンの時点でいくらになっているかです。これを知るには，当たり前なことですが，将来時点での市場での取引価格が必要です。たとえば，リスク・ホライズンを1日として，任天堂の株式を保有していた場合，明日の資産価値を知るには，任天堂の株式が明日いくらで売れることになるのかが分かる必要があります。

リスク管理が前提とする考え方では，将来の市場取引価格をピッタリ言い当てることは無理であるとされています。（そもそもそれができるならばリスクは存在しないことになります。）その代わり，「明日どのくらいの確率でいくら以下になるのか」という**確率分布**は，過去の株価の推移か

（5）　Value at Riskは日本語に訳すと「危険にさらされている価値」といった意味です。その目指すところは，持っている資産のうちどれだけの価値が棄損される危険にあるのかを把握することです。

らそれなりの精度で推定できることを仮定します。

推定の方法は次節で確認することにして，ここでは，リスク・ホライズンにおける株価の分布が推定できて，そこから持っている資産の価値の確率分布が求められるものとしましょう。つまり，リスク・ホライズン T における資産の価値を，**確率変数** V_T で表すことができるものとします。そして，V_T がある実数 x 以下になる確率 $P(V_T \leq x)$ が推定できるも のとします（確率変数や確率分布などについては，Marumo（2021）など確率や統計の教科書を参照してください）。

さて，保有している資産の今日の価値を v_0 とします。この値は今日の市場価格から計算できますので，値の分かっている実数です。持っている資産の，今日からリスク・ホライズンまでに生じる損益は形式的には

$$V_T - v_0,$$

によって計算できます。この値が正であれば儲けが出たことになり，負であれば損が出たことになります。

3.4 信頼水準と VaR

さて，以上のように定式化をすると，損失がある値よりも大きくなる確率を計算することができます。VaR の計算では，まず**信頼水準**と呼ばれる値を定めます。たとえば，信頼水準を 99%に定めたとしましょう。言葉で表すとややこしいのですが，このとき VaR は「損失がその値以下に収まる確率が 99%であるような値」として定められます。数式では $P(v_0 - V_T \leq x) = 0.99$ を満たすような実数 x の値として定められます。同じ意味ですが，「損失がその値を超えてしまう確率が 1%であるような値」，つまり $P(V_T \leq v_0 - x) = 0.01$ を満たすような実数 x の値として定めることもできます（このような値は，「損益の下側 1%点（lower 1% tile of profit or loss）から求めることができます。図 1)。

直感的には，信頼水準は「安心できる」といえる確率を指します。実務では，99%のほか，99.5%などの値が一般的といえます。図 1 のように，信頼水準 99%の VaR が自己資本の割り当て（Capital Allocation）よりも小さければ，リスク・ホライズンにおいて破綻してしまう確率は 1%よりも小さいといえます。感覚的な言い方をすれば，このような状態が保たれていればリスク・ホライズンまでの期間「99%安心できる」といえます。

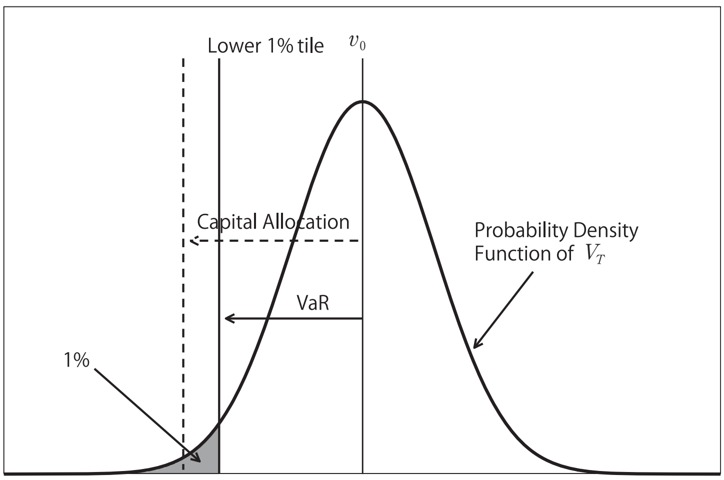

図 1　リスク・ホライズン T における資産価値 V_T の確率密度関数（Probability Density Function）と信頼水準 99%の VaR。Capital Allocation は資本の割り当て量。Lower 1% tile は下側 1%点を表します。

3.5　投資と VaR の利用

2.1 節では，投資には 2 つの見方があり得ることを示しました。1 つ目の，儲けに対する見方は，そもそも投資を行う動機に関係します。2 つ目の，損失に対する見方は，どちらかというと投資を制御したり，ブレーキをかけるようなものです。実際の金融機関では，投資の企画・立案をしたり，実際の取引を行う ── つまり 1 番目の視点を持つ ── 部署と，リスク管理を行う ── つまり 2 番目の視点を持つ ── 部署は別々に設置されるのがふつうです。取引を行う部署（フロント・オフィスなどと呼ばれます）に対して，リスク管理を行う部署（ミドル・オフィスなどと呼ばれます）は連携や牽制をしながら VaR の値が基準内に収まるよう管理をしているのです。

4　価格分布の推定と VaR の計算

3.3 節では，将来の市場取引価格の確率分布がそれなりの精度で推定できると説明しました。ここでは，分布を推定する方法と，そこから VaR を計算する方法を確認します。

これらは，実務で使われる方法の 1 つですが，完璧とは言い難いところもあります。そもそもリスク指標として VaR を利用することに対しても様々な批判があります。こうした課題については 4.4 節で紹介することにします。

4.1　価格分布の推定

まずは実際の株価を観てみましょう。図 2 は 2019 年 11 月はじめから 2021 年 10 月末までの 2 年間の任天堂の株価の推移を示したものです。急に落ち込んでいるところ，急に上がっているところ，わずかに平らに見えるところなどが見られますが，これを眺めることで先行きの様子が分かるという人はほとんどいないのではないでしょうか。

リスク管理の目的で株価（や他の資産の価格）を見るときには，株価そのものでなく**収益率**を考えることがあります。収益率とは，前日からどれだけの割合で価格が上下したかを表す値です。たとえば，昨日から今日にかけての収益率は

$$\text{昨日から今日にかけての収益率} = \frac{\text{今日の株価終値} - \text{前営業日の株価終値}}{\text{前営業日の株価終値}},$$

で計算されます。同じようにして図 2 の各営業日から 1 日あたりの収益率を順次計算していくと，

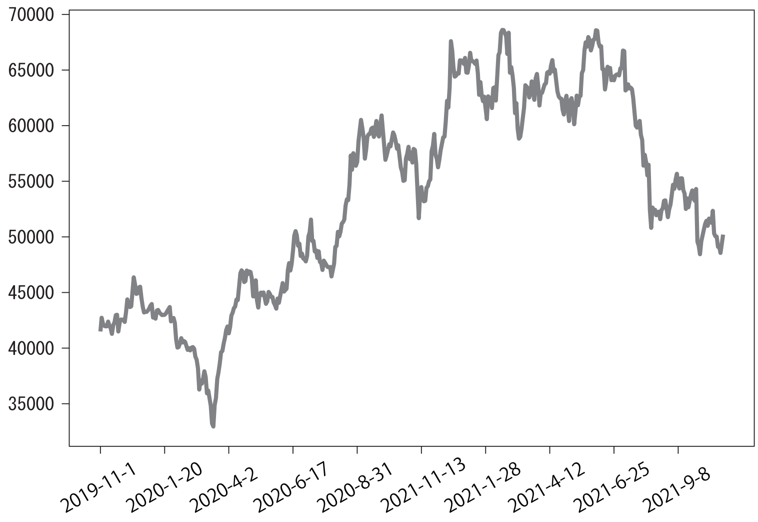

図 2　任天堂の株式の東京証券取引所終値。2019 年 11 月 1 日から 2021 年 10 月 29 日までの 486 営業日。

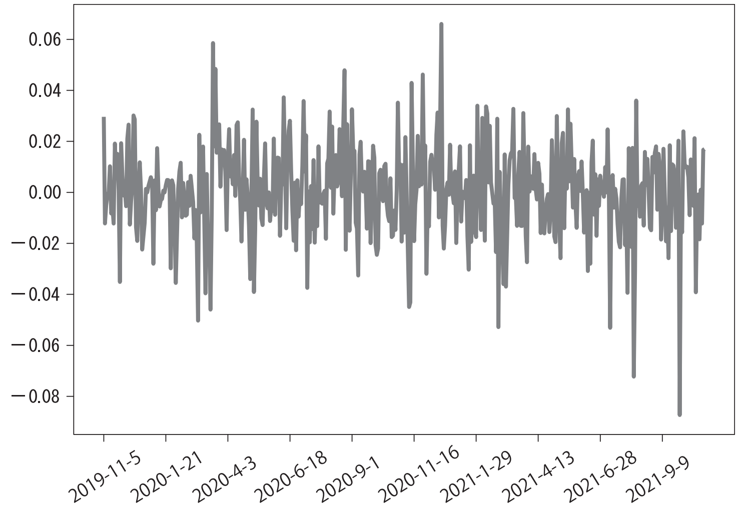

図 3　任天堂の株価の 1 日あたり収益率。2019 年 11 月 5 日から 2021 年 10 月 29 日までの 485 営業日。

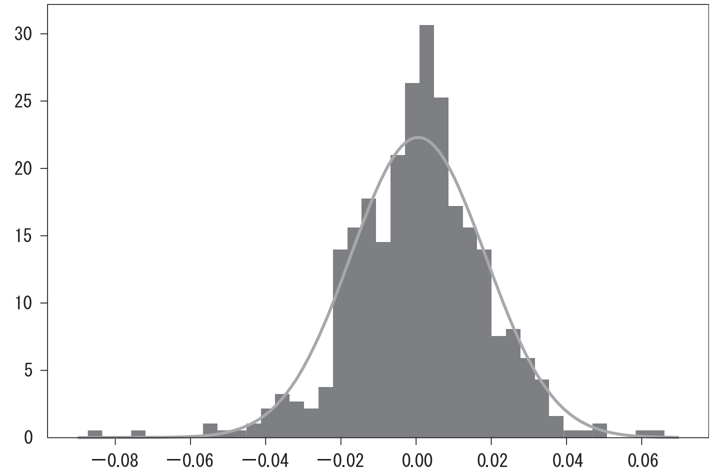

図 4　図 3 の収益率のヒストグラム。横軸は収益率，縦軸は相対頻度。縦軸は，棒グラフの棒の面積が合計で 1 になるように基準化されています。曲線は，それに合わせた正規分布の確率密度関数。

485 営業日分の収益率が得られます（図 3）。これを見ると，株価が 1 日で「でたらめに」上がったり下がったりする様子が強調されているのがわかるのではないでしょうか。より重要なこととして，でたらめ具合がどこを取っても概ね同じように見えます。ほとんどの日において，1 日あたり収益率は概ね −0.04 から 0.04 あたりの間に収まっており，時折 ±0.06 を超えるような増減を見せています。もし，この傾向が明日も続くと仮定できれば，たとえば，「今日から明日にかけての収益率はおそらく −0.04 から 0.04 あたりの範囲に収まるだろう」などの目安を得ることができます。

もう少し詳しく見るために，1 日あたり収益率の**ヒストグラム**を見てみましょう。図 4 は，図 3 の 1 日あたり収益率が（時期に関係なく）どのあたりにどのくらいの頻度で観測されたかを棒グラ

フで表したものです。このようなグラフをヒストグラムといいます。これを見ると，過去にどのくらいの頻度でどの程度の収益率が観察されたのかが分かります。この頻度が今後の確率を表すと仮定すると，将来の収益率の分布を推定することができます。

推定のやり方も色々と提案されていますが，ここでは，**正規分布**を当てはめるものを使いましょう。これは，図 4 の棒グラフで表される山を，それに重ねてある曲線で近似する方法です。図 4 を見る限り，近似の精度は微妙なところです。実際，このように正規分布を当てはめる方法は，実務では近年あまり使われなくなってきているようです。しかしながら，このやり方はリスク計量化の考え方が分かりやすく現れるので，分かりやすさの観点からここではご紹介することにします。今日から**明日**にかけての収益率が確率変数 $R^{[1]}$ で表されるとしましょう。これが正規分布に従うと仮定することは，収益率 $R^{[1]}$ が実数 x よりも小さくなる確率が

$$P\left(R^{[1]} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{[1]2}}} \mathrm{e}^{\frac{\left(u-\mu^{[1]}\right)^2}{2\sigma^{[1]2}}} \mathrm{d}u, \quad (1)$$

で表されることを仮定していることになります。右辺の積分の中の関数は，図 4 に示してある曲線に対応するものです。この関数の中で，π と e はそれぞれ**円周率**と**自然対数の底**と呼ばれる定数で，おおよその値はそれぞれ 3.14 と 2.72 です。$\mu^{[1]}$ と $\sigma^{[1]}$ は未知の**パラメータ**で，これらの値はデータから推定してやる必要があります。これらのパラメータはそれぞれ収益率 $R^{[1]}$ の**期待値**と**標準偏差**に対応します。これらは，実際に観測された（つまり図 3 で示されている）1 日あたりの収益率の**標本平均** 0.0006 と**標本標準偏差** 0.0179 で推定することができます。

4.2　資産価値の分布と VaR

ここでは，リスク・ホライズンを $T = 1$ 日として，1 日後，つまり明日の資産価値 V_1 を考えることにしましょう。4.1 節のように今日から明日にかけての株価収益率を確率変数として表すと，明日の資産価値 V_1 もそれを使って確率変数として表すことができます。

今日の任天堂の株価を $s_0^{[1]}$ と置きます。これは既知の実数です。私たちが今日，任天堂の株式を $v_0 = 100$ 万円分だけ保有しているとしましょう。（この先，単位の「万円」は省略することにします。なお，100 万円という規模は金融機関の投資額としては現実的でないくらい小さいといえます。）

明日の株価を確率変数 $S_1^{[1]}$ で表すことにします。このとき，保有している株式の明日の価値 V_1 はどのように表されるでしょうか。比例関係から

$$V_1 : S_1^{[1]} = 100 : s_0^{[1]},$$

が成り立ち，ここから

$$V_1 = \frac{100}{s_0^{[1]}} S_1^{[1]}, \qquad (2)$$

が得られます。今日から明日にかけての株価収益率の計算の仕方から，

$$R^{[1]} = \frac{S_1^{[1]} - s_0^{[1]}}{s_0^{[1]}},$$

ですが，ここから

$$S_1^{[1]} = \left(1 + R^{[1]}\right) s_0^{[1]},$$

が得られます。これを式（2）に代入すると，

$$V_1 = 100\left(1 + R^{[1]}\right) = 100 + 100\,R^{[1]},$$

となります。これが，明日の資産価値 V_1 と，今日から明日にかけての株価収益率 $R^{[1]}$ の関係です。つまり，明日の資産価値 V_1 は，株価収益率 $R^{[1]}$ を $v_0 = 100$ 倍して，それに $v_0 = 100$ を足すことで計算されます。この式から株価 $s_0^{[1]}$ や $S_1^{[1]}$ が消えていることは注目に値します。

4.1 節では今日から明日にかけての株価収益率 $R^{[1]}$ が正規分布に従うと仮定しました。正規分布に従う確率変数には，定数倍したり定数を足したものもやはり正規分布に従う，という（ありがたい）性質があります。つまり，収益率 $R^{[1]}$ が正規分布に従うという仮定のもとでは，明日の資産

価格 V_1 も正規分布に従いますので，その期待値と分散を求めれば，分布は完全に特定されます。収益率 $R^{[1]}$ の期待値と標準偏差の推定値 $\hat{\mu}^{[1]} = 0.0006$ と $\hat{\sigma}^{[1]} = 0.0179$ を使うと，資産価値 V_1 の期待値と分散はそれぞれ

$$\hat{\mu} = v_0 + v_0\hat{\mu}^{[1]} = 100 + 100 \times 0.0006 = 100.06,$$
$$\hat{\sigma} = v_0\hat{\sigma}^{[1]} = 100 \times 0.0179 = 1.79,$$

のように推定されます。つまり，明日の資産価値 V_0 の従う分布は，期待値 100.06，標準偏差 1.79 の正規分布である，と推定することができるのです。

さて，このように明日の資産価値の分布が推定できると，リスク・ホライズン 1 日の VaR を計算することができます。図 1 のように考えると，有意水準 99%の VaR を計算するには資産価値分布の下側 1%点を求める必要があります。正規分布に関しては

$$\text{正規分布の下側 1\%点} \simeq \text{期待値} - 2.33 \times \text{標準偏差},$$

によって計算されることが知られています。図 1 より VaR $= v_0 -$ 下側 1%点なので，任天堂の株式を 100 だけ保有しているときの VaR は

$$\mathrm{VaR} = v_0 - \hat{\mu} + 2.33\hat{\sigma} = 100 - 100.06 + 2.33 \times 1.79 = 4.1107, \tag{3}$$

のように計算できます。つまり，この投資においては，損失に対する備えが 4.1107 程度よりも大きければ 99%の信頼水準で安心できることになります。いうまでもありませんが，この安心は，これまでに置いてきたすべての仮定を信用した場合にのみに得られるものです。

4.3　複数銘柄への投資

ここまででは任天堂の株式にのみ投資をしている場合について考えてきましたが，実際には 1 つの銘柄のみに投資をすることはまずないといえます。理由は様々ですが，大きなものとしては，複数の銘柄へ投資したときに得られる**分散効果**が考えられます。同じ額を投資するにしても，多くの銘柄に分散して投資した方がリスクが削減されることが知られています。これを分散効果といいます。ここでは，投資先を 2 銘柄にした場合の VaR の計算と，分散効果について考えてみます。ここでは，任天堂の株式を $v_0^{[1]} = 50$，カプコンの株式を $v_0^{[2]} = 50$ だけ保有しているとしましょう。投資額全体は $v_0 = v_0^{[1]} + v_0^{[2]} = 50 + 50 = 100$ で，前節と変わらないとします。

このとき，カプコンの株価の今日から明日にかけての収益率を確率変数 $R^{[2]}$ で表すと，明日の資産価値 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= v_0^{[1]}\left(1 + R^{[1]}\right) + v_0^{[2]}\left(1 + R^{[2]}\right) \\ &= v_0 + v_0^{[1]}R^{[1]} + v_0^{[2]}R^{[2]} \\ &= 100 + 50R^{[1]} + 50R^{[2]}, \end{aligned}$$

のように表されます。カプコンの収益率について，任天堂と同じように期待値と標準偏差を推定すると，

$$\hat{\mu}^{[2]} = 0.0021,$$
$$\hat{\sigma}^{[2]} = 0.0246,$$

が得られます。任天堂のものと比べると，期待値，標準偏差ともに大きく，任天堂との比較でいえば「ハイリスク・ハイリターン」の銘柄といえそうです。実際，前節と同じやり方でカプコンのみに 100 だけ投資した場合の VaR を計算すると 5.5127 で，任天堂の場合よりも 2 割ほど高くなっています。これを投資対象に組み入れるのですから，任天堂単独のときよりもリスク量は大きくなってもおかしくはないように思えます。

さて，収益率の組 $\left(R^{[1]}, R^{[2]}\right)$ が *2* **変数の正規分布**に従うと仮定します。すると，正規分布に従う確率変数の和はやはり正規分布に従うという（とてもありがたい）性質から，明日の資産価値 V_1 はここでも正規分布に従うものと扱うことができます。したがって，ここでも V_1 の期待値と分散を計算すれば良いことになります。これらは，

$$\hat{\mu} = v_0 + v_0^{[1]}\hat{\mu}^{[1]} + v_0^{[2]}\hat{\mu}^{[2]},$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{v_0^{[1]2}\hat{\sigma}^{[1]2} + v_0^{[2]2}\hat{\sigma}^{[2]2} + 2v_0^{[1]}\hat{\sigma}^{[1]}v_0^{[2]}\hat{\sigma}^{[2]}\hat{\rho}^{[1,2]}}, \tag{4}$$

によって推定できます(6)。これらのうち任天堂の株価収益率の期待値と標準偏差は前節で推定した通り $\hat{\mu}^{[1]} = 0.0006, \hat{\sigma}^{[1]} = 0.0179$ を使いましょう。カプコンのものもすでに計算した通り $\hat{\mu}^{[2]} = 0.0021, \hat{\sigma}^{[2]} = 0.246$ です。式の中の $\hat{\rho}^{[1,2]}$ は**相関係数**と呼ばれる量の推定値を表します。相関係数は，2つの確率変数が大小をともにする傾向を−1から1までの数字で表したものです。任天堂の過去の収益率と，同じ日のカプコンの収益率を**散布図**にすると，両者は全くばらばらに動くのではなく，任天堂の収益率が高かった日はカプコンの収益率も高い傾向があることが分かります（図5)。相関係数はこうした傾向の強さを数値化したものです。過去の株価収益率から推定すると，$\hat{\rho}^{[1,2]} = 0.4302$ が得られます。これらを代入すると，$\hat{\mu} = 100.13, \hat{\sigma} = 1.80$ が得られます。

このように資産価値 V_1 の期待値 $\hat{\mu}$ と標準偏差 $\hat{\sigma}$ が推定できれば，あとは式(3)と同じようにVaRが求められれます。実際に計算をすると，

$$\mathrm{VaR} = 100 - 100.13 + 2.33 \times 1.80 = 4.0703,$$

となります。上で考えたように，任天堂よりもリスクの高い銘柄を組み入れたのですが，リスク量はむしろ若干減少しています。このように，投資先を増やすことでリスク量を減らすことができることを，分散効果といいます。

分散効果には，式(4)の中の相関係数 $\hat{\rho}^{[1,2]}$ が影響します。この値が大きいほど分散効果は小さいといえます。今回考えた，任天堂とカプコンという組合せでは，相関係数の推定値は0.4302とそれなりに高い値をもっていました。両方ともゲーム業界ということを考えると自然ともいえます。より大きな分散効果を得るには全く関係のない組合せを考えることが有効な場合があります。たとえば任天堂と組み合わせるとしたら，鉄鋼業界の銘柄や，米国の石油産業の銘柄などだと，より大きな分散効果が得られることが期待できます。

4.4　積み残した話題とVaR利用の問題点

ここまで，VaRとその計算についてご紹介してきましたが，これで全部というわけではありません。ここまでのお話には，実は，様々な注意点や問題点があることが知られています。実際，“Value at Risk” という600ページもある本もあります（Jorion (2006))。ここでは，これらの積み残した話題の幾つかに簡単に触れておきます。

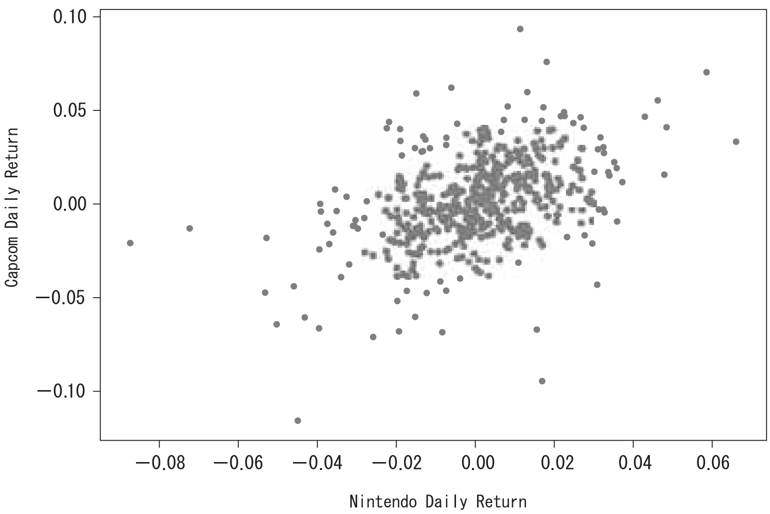

図5　任天堂の株価収益率とカプコンの株価収益率の散布図。2019年11月5日から2021年10月29日までの485営業日。

（6）　式の導出などは，たとえばMarumo (2021) など統計の教科書を参照。

正規分布の当てはめ

4.1 節では，収益率分布を推定する方法の 1 つをご紹介しました。この手順の中で，正規分布を当てはめましたが，そこでも述べた通りこの近似の精度は微妙なところです。リスク管理の観点からは，正規分布を当てはめると，実際よりもリスクを過小評価する傾向があることが知られています。たとえば，正規分布のもとでは，100 回に 1 回程度と思われていたような損失が，実はもっと頻繁におこる傾向が報告されています。

現在実務では，正規分布を当てはめるよりも，観察された収益率の**経験分布**をそのまま使う，**ヒストリカル・シミュレーション**という方法が採られることの方が多いと言われています。

ボラティリティ・クラスタリング

4.1 節では図 3 について「でたらめ具合がどこを取っても概ね同じように見えます」と説明しました。確かに，収益率が正になるのか負になるのか（つまり，株価が上がるのか下がるのか）はどこを取ってもでたらめに見えます。しかし注意深く観察すると，収益率の**絶対値**が大きかった翌日はやはり収益率の絶対値が大きい傾向が見られることがあります。つまり，上下のどちらでも，株価が大きく動くと，その翌日も大きく動き，それがしばらく続く傾向が見られることがあります。こうした傾向を**ボラティリティ・クラスタリング**といいます。こうした傾向を表現するためのモデルも提案されています[7]。

タイム・アグリゲーション

4.2 節ではリスク・ホライズンを 1 日としました。1 日当たりの収益率の分布を推定する ために，過去 2 年分の株価から 500 個弱の収益率の実現値を観察しました。3.2 節で説明したように，10 営業日など 1 日よりも長いリスク・ホライズンを考えることがあります。リスク・ホライズン 10 営業日の VaR を計算するために，1 日の場合と同じように 500 個弱の値を（重複を避けて）観察しようと思うと，20 年分の株価が必要になります。

銘柄によっては，20 年前の株価も利用可能です。しかし，20 年前の株価を使って推定した分布はあまり信頼の置けるものとはいえません。その代わりに，リスク・ホライズン 1 日の VaR を $\sqrt{10}$ 倍したものを便宜的に使うことがあります。これは，ある仮定のもとで，10 日当たりの損益の標準偏差が 1 日当たりのものの $\sqrt{10}$ 倍であることによります。

このように短いリスク・ホライズンの VaR から長いリスク・ホライズンの VaR を計算することをタイム・アグリゲーションといいます。

VaR の利用に対する批判

VaR の利用に対する有名な批判には Artzner et al.（1999）によるものがあります。彼らは，リスク指標が満たすべき性質を VaR は満たしておらず，ミスリーディングな場合があることを指摘しています。ただし，収益率の分布が正規分布に近いような場合にはこうした問題が起こるおそれはありません。

このほかにも，VaR が，信頼水準を超えるようなリスクを捉えられないことも批判されることがあります。つまり，信頼水準 99％の VaR は，99％までの確率で発生する損失を教えてくれるかもしれませんが，残りの 1％以下で発生するような大きな損失に関する情報を何も与えてくれない，という批判です。市場では，10 年おきぐらいの頻度で大きな危機が発生しますが，それが明日起こる確率は 1％よりも小さいと見積もることができるでしょう。しかし，VaR はそれにどのように対処すべきかを教えてくれません。

この批判にはもっともなところもあります。危機を乗り越えて生き残るために備えることは，リスク管理の重要な役目でしょう。しかし，どのように備えるべきなのかを知るには，来たるべき次

（7） たとえば autoregressive conditional heteroscedasticity（ARCH）モデル，generalised ARCH（GARCH）モデルやそのバリエーションなどが利用されることがあります。Tsay（2010）など参照。

の危機がどのようなものなのかが分かっている必要があります。精々過去数年分の価格データから算出したVaRにそれを求めるのはやや荷が重すぎるように思えます。VaR以外のどのようなリスク指標を使おうと同じことがいえます。逆にもし，次の危機がどのようなものかが分かるのならば，それを組み入れたリスク指標を考えることもできます(8)。

5　おわりに

ここでご紹介したリスク管理の考え方に対して，経済学の物語をくっつけることは可能でしょう。その意味で，リスク管理は経済学の応用といえます。その一方で，経済学の物語を全く使わなくても，リスク管理の考え方を理解したり，実務で使うことはできます。実務での利用においては，リスク管理が経済学に基づいているのかどうかはあまり重要ではないかもしれません。それよりもたとえば，リスク量がどのような情報や仮定に基づいて算出されたのか，また，その情報の使い方や仮定の置かれ方が妥当かどうか，といったことの方が重要でしょう。経済学の言葉は，組織の内外に対してリスク管理を説明するときに方便として使う必要が生じるのかもしれません。

参考文献

Mila Lazarova, Hilla Peretz, and Yitzhak Fried. Locals know best? subsidiary HR autonomy and subsidiary performance. *Journal of World Business,* 52(1): 83–96, 2017.

Adam Becker. *What is Real?: The Unfinished Quest for the Meaning of Quantum Physics.* John Murray Publishers Ltd, 2018.（『実在とは何か』，吉田三知世訳，筑摩書房，2021）。

Ian Parton. *The art of getting by* (*Song for Heaven's Gate*) (*from the scene between*). The Go! Team, 2015.

Paul Weller. *Shout to the Top!* The Style Council, 1984.

Paul Weller. *Running on the Spot* (*from The Gift*). The Jam, 1982.

Kohei Marumo and Rodney C. Wolff. On optimal smoothing of density estimators obtained from orthogonal polynomial expansion methods. *Journal of Risk,* 18(3): 47–76, 2016.

BCBS. *Basel III: Finalising post-crisis reforms.* Basel Committee on Banking Supervision, 2017.

BCBS. *Minimum capital requirements for market risk.* Basel Committee on Banking Supervision, 2019.

Kohei Marumo. **基礎から学ぶ実証分析**. 新世社，2021.

Phillipe Jorion. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* McGraw-Hill, 2006.

Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series.* John Wiley & Sons, 2010.

Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance,* 9(3): 203–228, 1999.

（8）　こうした批判に応えるものとして，**期待ショートフォール**（expected shortfall）などのVaRに代わるリスク指標が提案されています。ただし，これらも結局算出するために使った情報がVaRと同じであれば，次の危機に対処するという意味では不十分である可能性は否めません。