A formula for the heat kernel coefficients of the Dirac Laplacians on spin manifolds

(スピン多様体上のディラックラプラシアンの熱核係数公式)

埼玉大学大学院理工学研究科
博士後期課程 理工学専攻
数理電子情報コース

指導教員：下川 航也

白川 匠

2021 年 9 月

目 次

0 Introduction

(M,g) をスピン構造 $\rho : \mathrm{Spin}(T^*M) \to SO(T^*M)$ が備わった m 次元 compact oriented Riemannian manifold とする．ここで $SO(T^*M)$ は T^*M の $SO(m)$-frames からなる主 $SO(m)$-bundle であり，$\mathrm{Spin}(T^*M)$ は 2-sheeted covering map ρ で引き上げられた主 $\mathrm{Spin}(m)$-bundle である. (e.g. [6], [2]). すると, spinor bundle $\not{S} = \mathrm{Spin}(T^*M) \times_{\mathrm{Spin}(m)} S_m$ $(S_{2n} = S_{2n+1} = \mathbb{C}^{2^n})$ と $\Gamma(\not{S})$ に作用する次式で定義される the Dirac operator D が定義される.

$$D = \sum e^j \circ \nabla^g_{e_j} := \sum e^j \circ \big\{ e_j + \frac{1}{4} \sum \omega(\nabla^g)^k_\ell (e_j)\, e^\ell \circ e^k \circ \big\}$$

ここで, $e^\bullet = (e^1, \ldots, e^m)$ は P^0 の周りの T^*M の local $SO(m)$-frame であり，$e^j\circ$ は $e^j \in (Cl(T^*M), \circ)$ on $\not{S}$ の the Clifford action を表し，$e_\bullet = (e_1, \ldots, e_m)$ は $e^\bullet$ の dual frame である．さらに，∇^g は g の Levi-Civita connection であり，$\omega(\nabla^g)^k_\ell$ は $\nabla^g_X e_\ell = \sum \omega(\nabla^g)^k_\ell(X)\, e_k$ で定義される Levi-Civita connection の connectin form である.

the Dirac Laplacian D^2 に付随する熱方程式の初期値問題

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + D^2\Big)\phi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \phi(t) = \phi_0 \quad (\phi_0 \in \Gamma(\not{S}))$$

は unique な解 or heat kernel $e^{-tD^2}(P, P')$ を持ち , $t \to 0$ のとき，熱核は漸近展開

$$e^{-tD^2}(P^0, P^0) \sim (4\pi t)^{-m/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell K_\ell(P^0), \quad K_\ell(P^0) \in \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M).$$

できる. ここで，$\mathrm{End}(\not{S}_{P^0})\,(\ni K_\ell(P^0))$ は自然に $\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M) := Cl(T^*_{P^0}M) \otimes \mathbb{C}$ の subalgebra とみなし, $\mathbb{C}l^{(p)}(T^*_{P^0}M)$ と $\wedge^p T^*_{P^0}M \otimes \mathbb{C}$ を次で同一視する.

$$e^{i_1}(P^0) \circ \cdots \circ e^{i_p}(P^0) \leftrightarrow e^{i_1}(P^0) \wedge \cdots \wedge e^{i_p}(P^0) \quad (i_1 < \cdots < i_p).$$

この同一視により, 漸近展開係数を次のようにかく.

$$\begin{aligned} K_\ell(P^0) &= \sum_{\alpha=(\alpha_1<\cdots<\alpha_{|\alpha|})} K_{\ell,\alpha}(P^0)\, e^{\alpha_1}(P^0) \circ \cdots \circ e^{\alpha_{|\alpha|}}(P^0) \\ &= \sum_p K_{\ell,[p]}(P^0) := \sum_p \sum_{|\alpha|=p} K_{\ell,\alpha}(P^0)\, e^{\alpha_1}(P^0) \circ \cdots \circ e^{\alpha_{|\alpha|}}(P^0). \end{aligned}$$

そして，*Getzler's transformation* とよばれる局所的な rescaling transformation により，Getzler 氏は自然に $\hat{A}$-genus form が現れる次の公式を得た．[3] (cf. Berline-Getzler-Vergne [2, Theorem 4.1], Getzler [4])

$$K_{\ell,[p]}(P^0) = 0 \quad (\ell < p/2), \tag{1}$$

$$K_{p/2,[p]}(P^0) = \det{}^{1/2}\Big(\frac{R(P^0)/2}{\sinh(R(P^0)/2)}\Big)_{[p]}, \tag{2}$$

ここで, $R(P^0)$ は P^0 における Riemannian curvature, つまり, antisymmetric な $m \times m$ 行列で (j,i)-成分が

$$R_{ji}(P^0) = \frac{1}{2} \sum g(F(\nabla^g)(e_\ell, e_k)e_i, e_j)(P^0)\, e^\ell(P^0) \wedge e^k(P^0)$$

で定義されるものであり, $F(\nabla^g)(X,Y) := [\nabla^g_X, \nabla^g_Y] - \nabla^g_{[X,Y]}$ である. また，(2) の右辺は $\hat{A}$-genus form $\in \wedge^{4\bullet} T^*_{P^0}M$ の $\mathbb{C}l^{(p)}(T^*_{P^0}M)$-component である．本論文の議論において, 多様体は偶数次元と仮定する.

[3] における Getzler 氏の目的は有名な D の local index theorem を簡潔に証明することであり (e.g. [1]), Getzler 氏の研究は index theorem に関わる熱核の漸近展開係数に限定された研究である．それに対し, 本

論文での主結果は, $\ell > p/2$ における熱核の漸近展開係数 $K_{\ell,[p]}(P^0)$ を計算する公式を見つけたことである. (Theorem 3.2.9). 特に, 本研究での独創的な点として, Atiyah-Bott-Patodi ([1, Appendix II]) により考察された, connection form と変換則のそれぞれのテイラー展開をより洗練し用いることで熱核の漸近展開係数に明確な表示を与えることができることに着目したことを強調したい. 実際に本研究で得られた公式を用いることで, 例えば次のような計算結果が得られた.

$$K_1(P^0) = K_{1,[0]}(P^0) = -\frac{s_M(P^0)}{12},$$

ここで, s_M は (M, g) の scalar curvature である (cf. Corollary 4.1.1). また, 最近では Nagase 氏により様々な Laplacian に対し同様な手段で熱核の漸近展開係数の明確表示を与える公式が研究されている.(e.g. [8])

§1 ではまず, スピン表現, スピン構造, スピノール bundle, Dirac oparatoer, Lichnerowicz formula など議論に必要なことを復習する. §2 では Getzler's rescaling transformation と (1) と (2) の証明を紹介する. §3 では Gezler 氏による手法を応用することで熱核の漸近展開係数をより考察し, さらに Atiyah-Bott-Patodi による考察を応用することで, 主結果である $K_{\ell,[p]}(P^0)$ $(\ell > p/2)$ の公式を与える. §4 では主結果である公式を用いて $K_0(P^0)$, $K_1(P^0)$, $K_2(P^0)$ を実際に計算した結果を紹介する. 本研究で得られた主結果を用いて計算を実際に実行してみると, 初等的な微分積分 (部分積分や Taylor 展開) のみで求めることができる. つまり, 本研究により Mathematica などの計算機を用いて, 熱核の漸近展開係数はどの項までも計算できることがわかった, ということを強調したい. ([5])

最後に, §5 では Index theorem の証明を紹介する. index theorem は私にとって「とてつもなく」魅力的な定理であり, 学部 3 回生のとき Index theorem を知り, Index theorem について勉強したいと思い真っ先に選んだ研究室が当時教授であった長瀬正義先生の研究室でした. ときに厳しく, ときに優しく, 数学の世界の厳しい部分も楽しい部分も学部 4 回生のときから現在に至るまで丁寧にご指導頂いたことは私にとってかけがえのない財産です. 心から感謝しています, 本当にありがとうございました. また, 博士後期課程 3 年次から指導教員として携わって頂いた下川航也先生には様々な面でサポートしてして頂きました. 今に至れるのも下川先生の尽力なしでは叶いませんでした. ご迷惑をおかけしたこともあったと思いますが, 心から感謝しています. 本当にありがとうございました.

1 Preliminary

1.1 Spin group and Clifford algebra

まず初めにこの節でスピン群, Clifford algebra とスピノール表現について解説する.

Definiton 1.1.1
スピン群 Spin(m) とは, Lie 群 $SO(m)$ の非自明な double covering :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Spin}(m) \\ \downarrow \\ SO(m) \end{array}$$

のことである.

Remark 1.1.2
(1) $m \geqq 3$ のとき $\pi_1(SO(m)) = \mathbb{Z}_2$ より Spin(m) は $SO(m)$ の universal covering である.
(2)universal covering の一般論から, Spin(m) は Lie 群としての同型を除いて一意に存在する.

スピン群は $SO(m)$ の universal covering として抽象的な対象である. そこでスピン群及びスピン群上の表現を考察するために Clifford algebra を導入し, スピン群に具体的な表示を与えて議論することにする.

Definiton 1.1.3 $\mathbb{R}^m$ に standard な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を付随させた $(\mathbb{R}^{\mathrm{m}},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を考える. そして

$$\mathcal{T}(m):=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{T}^k(m)$$

$$\mathcal{T}^k(m):=\bigotimes^{k}\mathbb{R}^m=\underbrace{\mathbb{R}^m\otimes\cdots\otimes\mathbb{R}^m}_{k}\,(k\geqq 1),\ \mathcal{T}^0:=\mathbb{R}\,(k=0)$$

とおく. $\mathcal{T}(m)$ には足し算とテンソルによる掛け算の 2 つの演算が入り, 代数構造が入る. さらに以下のイデアルを考える :

$\mathcal{I}(m):=$「$\{v\otimes w+w\otimes v+2\langle v,w\rangle\,|\,v,w\in\mathbb{R}^m\}$ により生成される $\mathcal{T}(m)$ の両側イデアル」

そして, $Cl(m):=\mathcal{T}(m)/\mathcal{I}(m)$ とおく. $Cl(m)$ には $\mathcal{T}(m)$ の演算から well-defined に代数構造が入る. この代数構造が入った $Cl(m)$ を Clifford algebra という.

Remark 1.1.4

(1) 積演算子を $\circ$ で書き, $[v],[w]\in Cl(m)$ に対して, $[v]\circ[w]=[v\otimes w]$ を $v\circ w$ と書くことにする.

(2)$v,w\in\mathbb{R}^m$ に対して

$$v\circ w+w\circ v=-2\langle v,w\rangle$$

を満たす. 特に $(\mathbb{R}^m,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の orthonormal frame $(e_1,\cdots,e_m)$ に対して次を満たす :

$$e_i\circ e_j+e_j\circ e_i=-2\delta_{ij}\quad(1\leqq i,j\leqq m)$$

(3)Clifford algebra $Cl(m)$ は外積代数 $\bigwedge^*\mathbb{R}^m$ と次の対応でベクトル空間として同型である :

(2) と同様に $(e_1,\cdots,e_m)$ を $(\mathbb{R}^m,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の standard orthonormal frame とする。すると次の線形写像 :

$$\sigma: Cl(m)\ni e_{i_1}\circ\cdots\circ e_{i_k}\mapsto e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\in\bigwedge^*\mathbb{R}^m$$

は frame の取り方に依らず決まり線形同型写像である. 特に $\dim_{\mathbb{R}}Cl(m)=\dim_{\mathbb{R}}\bigwedge^*\mathbb{R}^m=2^m$ である.

(4)$Cl^p(m):=\sigma^{-1}(\bigwedge^p\mathbb{R}^m),\ Cl_q(m):=\sum_{p=0}^{q}Cl^p(m)$ とする. すると自然に次のfiltration を得る :

$$\mathbb{R}=Cl_0(m)\subset Cl_1(m)\subset Cl_2(m)\subset\cdots\subset Cl_m(m)=Cl(m)$$

さらに直和分解 $\bigwedge^*\mathbb{R}^m=\bigwedge^{\mathrm{even}}\mathbb{R}^m\bigoplus\bigwedge^{\mathrm{odd}}\mathbb{R}^m$ に対応し, $Cl(m)=Cl^{\mathrm{even}}(m)\bigoplus Cl^{\mathrm{odd}}(m)$ を得る. これは代数の直和分解ではないが次の性質がある :

$Cl^0(m):=Cl^{\mathrm{even}}(m),\ Cl^1(m):=Cl^{\mathrm{odd}}(m)$ とすると

$$Cl^i(m)\circ Cl^j(m)\subset Cl^{i+j\bmod 2}(m)$$

つまり $\mathbb{Z}_2$-graded である.

(5)$\mathbb{C}^m$ に standard な hermitian metric が入った $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $(\mathbb{C}^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ を考えることにより上記と同様にして complex Clifford algebra を得ることが出来る. これを $\mathbb{C}l(m)$ と書くことにする. $\mathbb{C}l(m)$ に対しても (4) と同様のことが言える.

Clifford algebra を用意すると $m\geqq 3$ に対しスピン群を次のように具体的に表示することが出来る.

$$\mathrm{Spin}(m)=\exp Cl^2(m)$$

この表示が $m\geqq 3$ のときスピン群になっているかは次の命題によりわかる :

Proposition 1.1.5 $\rho:\mathrm{Spin}(m)\to SO(m)$ を次で定義する :

$$\rho(g)(v) := g \circ v \circ g^{-1}, \quad (g \in \mathrm{Spin}(m),\ v \in SO(m))$$

すると ρ は double cover である.

Remark 1.1.6
(1) この表示によりスピン群が $m \geqq 3$ のとき連結であることがわかる.
(2) $\mathrm{Spin}(m)$ の Lie algebra $\mathfrak{spin}(m)$ について次がわかる：

$$\mathfrak{spin}(m) = Cl^2(m) = \bigwedge^2 \mathbb{R}^m = \mathfrak{so}(m)$$

(3) $\mathrm{Spin}(m) \subset Cl^0(m) \subset \mathbb{C}l^0(m)$ である.

1.2 Spinor representation

スピン群 $\mathrm{Spin}(m)$ 上の表現について述べる. まずは complex Clifford algebra $\mathbb{C}l(m)$ 上の表現についていくつか一般論を述べる.

Lemma 1.2.1 $\mathbb{C}$-algebra として $\mathbb{C}l(1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}l(2) \cong \mathbb{C}(2)$ である.

Proof.
$\mathbb{C}l(1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}l(1)$ から $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ への準同型写像として

$$1 \mapsto (1,1),\ e_1 \mapsto (\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$$

を考えれば直ちに同型写像であることがわかる. $\mathbb{C}l(2) \cong \mathbb{C}(2)$ については $\mathbb{C}l(2)$ から $\mathbb{C}(2)$ への準同型写像として

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_1 \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ e_1 \circ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

を考えればこれも同型写像であることが容易にわかる.

■

Remark 1.2.2

$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ は Pauri 行列と呼ばれている. Clifford algebra と行列環の対応の仕方は一意ではない.

Lemma 1.2.3 $\mathbb{C}$-algebra として

$$\mathbb{C}l(n+2) \cong \mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$$

である.

Proof. 実際に $\mathbb{C}l(n+2)$ から $\mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$ への同型写像を作る.
$(e_1, \cdots, e_{n+2}),\ (e'_1, \cdots, e'_n),\ (e''_1, e''_2)$ をそれぞれ $\mathbb{C}^{n+2},\ \mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^2$ の orthonormal frame とする. $\mathbb{C}$-準同型写像 $f : \mathbb{C}^{n+2} \to \mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$ を次で定義する：

$$f(e_i) := \begin{cases} \sqrt{-1} e'_i \otimes e''_1 \circ e''_2 & (1 \leqq i \leqq n) \\ 1 \otimes e''_{n-i} & (i = n+1, n+2) \end{cases}$$

すると f は次を満たす：
$1 \leqq i, j \leqq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(e_i) \circ f(e_j) + f(e_j) \circ f(e_i) &= -e'_i \circ e'_j \otimes e''_1 \circ e''_2 \circ e''_1 \circ e''_2 - e'_j \circ e'_i \otimes e''_1 \circ e''_2 \circ e''_1 \circ e''_2 \\
&= e'_i \circ e'_j \otimes 1 + e'_j \circ e'_i \otimes 1 = -2\delta_{ij} 1 \otimes 1 \\
f(e_i) \circ f(e_{n+1}) + f(e_{n+1}) \circ f(e_i) &= \sqrt{-1} e_i \otimes e''_1 \circ e''_2 \circ e''_1 + \sqrt{-1} e_i \otimes e''_1 \circ e''_1 \circ e''_2 = 0 \\
f(e_i) \circ f(e_{n+2}) + f(e_{n+2}) \circ f(e_i) &= \sqrt{-1} e_i \otimes e''_1 \circ e''_2 \circ e''_2 + \sqrt{-1} e_i \otimes e''_2 \circ e''_1 \circ e''_2 = 0
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&f(e_{n+1}) \circ f(e_{n+2}) + f(e_{n+2}) \circ f(e_{n+1}) = 1 \otimes e''_1 \circ e''_2 + 1 \otimes e''_2 \circ e''_1 = 0 \\
&f(e_{n+1}) \circ f(e_{n+1}) = 1 \otimes e''_1 \circ e''_1 = -1 \otimes 1, \quad f(e_{n+2}) \circ f(e_{n+2}) = 1 \otimes e''_2 \circ e''_2 = -1 \otimes 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって f は $f : \mathbb{C}l(n+2) \to \mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$ に一意に拡張される．この拡張された f は $\sqrt{-1} e'_i \otimes e''_1 \circ e''_2$ と $1 \otimes e''_{n-i}$ が $\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$ を生成することから全射であることがわかり，さらに $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l(n+2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2) = 2^{n+2}$ より f は単射であることも直ちにわかる．よって f は同型写像である．

■

Lemma 1.2.2 と Lemma 1.2.3 により帰納的に次が言える：

Proposition 1.2.4 $\mathbb{C}$-algebra として

$$
\mathbb{C}l(2n+1) \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n),\ \mathbb{C}l(2n) \cong \mathbb{C}(2^n)
$$

である．complex Clifford algebra $\mathbb{C}l(\mathrm{m})$ は周期 2 の周期性をもつ．

Remark 1.2.5
$(e_1, \cdots, e_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の positively oriented orthonormal frame とする．このとき

$$
\omega := e_1 \circ \cdots \circ e_m \in Cl(m)
$$

を volume element という．さらに $\omega_{\mathbb{C}} := \sqrt{-1}^{[\frac{m+1}{2}]} e_1 \circ \cdots \circ e_m \in \mathbb{C}l(m)$ を complex volume element という．$\omega_{\mathbb{C}}$ は次の性質を満たす：

$$
\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1,\ \omega_{\mathbb{C}} \circ v = (-1)^{m-1} v \circ \omega_{\mathbb{C}}\ (v \in \mathbb{R}^m)
$$

特に m が奇数ならば $\omega_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}l(m)$ の中心元である．Proposition 1.2.4 によると $m = 2n+1$ のとき，$\mathbb{C}l(m)$ は $\mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ と同型である．さらに $\mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ の中心は $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(I, I), (I, -I)\}$ である．実は $\omega_{\mathbb{C}}$ は $(I, -I)$ に対応しているのだ．

次の命題はスピン群上の表現を考えるうえで重要な主張である：

Proposition 1.2.6 $\mathbb{C}$-algebra として

$$
\mathbb{C}l(m-1) \cong \mathbb{C}l^0(m)
$$

である．

Proof. 準同型写像：

$$
\mathbb{C}l(m-1) \ni e_i \mapsto e_i \circ e_m \in \mathbb{C}l^0(m)
$$

を考えればこれは同型写像であることが容易にわかる．

■

以上で complex Clifford algebra 上の表現及びスピン群上の表現について述べる準備が整った．まずは complex Clifford algebra 上の表現について述べる．

Theorem 1.2.7
(1)m が奇数のとき，$\mathbb{C}l(m)$ 上の既約表現は同型を除いて 2 つ存在する．
(2)m が偶数のとき，$\mathbb{C}l(m)$ 上の既約表現は同型を除いて 1 つ存在する．

Proof.
(1)m が奇数のとき，$m = 2n+1$ とすると Proposition 1.2.4 より $\mathbb{C}l(2n+1) \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ である．よって次の 2 つの表現が考えられる：

$$\tau_1 : \mathbb{C}l(2n+1) = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n) \ni (A, B) \mapsto A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^n})$$
$$\tau_2 : \mathbb{C}l(2n+1) = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n) \ni (A, B) \mapsto B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^n})$$

τ_1とτ_2は互いに非同値な $\mathbb{C}l(2n+1)$ 上の既約表現である．そして行列環 $\mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ は $\mathbb{C}$-加群として半単純加群であることから主張が示された．
(2)m が偶数のとき，$m = 2n$ とすると，(*1*) と同様に Proposition 1.2.4 から次の表現が考えられる：

$$\tau : \mathbb{C}l(2n) = \mathbb{C}(2^n) \ni A \mapsto A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^n})$$

このτ は $\mathbb{C}l(2n)$ 上の既約表現であり，$\mathbb{C}(2^n)$ が $\mathbb{C}$-加群として半単純加群であることから主張が示された．

■

次に $\mathrm{Spin}(m)$ 上の表現について述べる．Theorem 1.2.7 で得られた表現τ_1, τ_2, τ をスピン群に制限することによりスピン群上の表現が得られる．

Theorem 1.2.8
(1)m が奇数のとき，$\tau_1|_{\mathrm{Spin}(m)}$と$\tau_2|_{\mathrm{Spin}(m)}$は互いに同値な $\mathrm{Spin}(m)$ 上の既約表現である．
(2)m が偶数のとき，$\tau|_{\mathrm{Spin}(m)}$は互いに非同値な $\mathrm{Spin}(m)$ 上の 2 つの既約表現に split する．

Proof.
(1)m が奇数のとき，$m = 2n+1$ とすると Proposition 1.2.6 より
$$\mathbb{C}l^0(2n+1) = \mathbb{C}l(2n)$$
である。Theorem 1.2.7 より $\mathbb{C}l(2n)$ 上の既約表現は同型を除いて一意なので$\tau_1|_{\mathbb{C}l^0(2n+1)}$と$\tau_2|_{\mathbb{C}l^0(2n+1)}$は互いに同値な $\mathbb{C}l^0(2n+1)$ 上の既約表現である。$\mathrm{Spin}(2n+1) \subset \mathbb{C}l^0(2n+1)$ であるから$\tau_1|_{\mathrm{Spin}(m)}$と$\tau_2|_{\mathrm{Spin}(m)}$は互いに同値な $\mathrm{Spin}(m)$ 上の既約表現である．
(2)m が偶数のとき，$m = 2n$ とすると同様に Proposition 1.2.6 から
$$\mathbb{C}l^0(2n) = \mathbb{C}l(2n-1)$$
である．Theorem 1.2.7 より $\mathbb{C}l(2n-1)$ 上の既約表現$\tau|_{\mathbb{C}l^0(2n-1)}$は 2 つの互いに非同値な既約表現：

$$\tau^+|_{\mathbb{C}l^0(2n-1)} : \mathbb{C}l^0(2n-1) = \mathbb{C}(2^{n-1}) \oplus \mathbb{C}(2^{n-1}) \ni (A, B) \mapsto A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^{n-1}})$$
$$\tau^-|_{\mathbb{C}l^0(2n-1)} : \mathbb{C}l^0(2n-1) = \mathbb{C}(2^{n-1}) \oplus \mathbb{C}(2^{n-1}) \ni (A, B) \mapsto B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^{n-1}})$$

に直和分解する．よって $\mathrm{Spin}(2n) \subset \mathbb{C}l^0(2n)$ であるから，$\tau|_{\mathrm{Spin}(2n)}$は 2 つの既約表現$\tau^+|_{\mathrm{Spin}(2n)}$と$\tau^-|_{\mathrm{Spin}(2n)}$に split する．

■

Definiton 1.2.9 $\tau|_{\mathrm{Spin}(m)}$をスピノール表現，その表現空間をスピノール空間という．特に，m が偶数のとき$\tau^+|_{\mathrm{Spin}(m)}$と$\tau^-|_{\mathrm{Spin}(m)}$を半スピノール表現，その表現空間を半スピノール空間という．

Remark 1.2.10

この節の最後に m が偶数のときのスピノール表現の具体的な構成を述べる. この構成により得られたスピノール表現はスピン接続, Dirac 作用素, スピン熱核を考察する上で非常に大きな役割を担う. 本論文ではスピノール表現については次のように構成されたものを扱うことにする. 勿論既約表現の一意性から具体的に構成した表現を議論に使うことで一般性は失われない.

$m = 2n$ とする. J を $\mathbb{R}^{2n}$の概複素構造とする. $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ と $(\mathbb{R}^{2n}, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ は次の対応で $\mathbb{R}$-ベクトル空間として同じものと見做す:

$(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ の standard orthonormal frame$(e'_1, \cdots, e'_n)$ に対し

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}) & \to & (\mathbb{R}^{2n}, \langle\cdot,\cdot\rangle, J) \\ e'_i & \mapsto & e_{2i-1} \\ \sqrt{-1}e'_i & \mapsto & e_{2i} := Je_{2i-1} \end{array}$$

この対応により得られた $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n-1}, e_{2n}) = (e_1, Je_1, \cdots, e_{2n-1}, Je_{2n-1})$ は $(\mathbb{R}^{2n}, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ の orthonormal frame になっていることに注意する. そして次の準同型写像を考える:

$$r_m : \mathbb{R}^m = \mathbb{C}^n \ni v \mapsto v\wedge -v\vee \in \mathrm{End}(\wedge^*\mathbb{C}^n)$$

ここで $v\vee$ は内部積:

$$v\vee : \wedge^*\mathbb{C}^n \ni w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k} \mapsto \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\langle w_{i_l}, v\rangle_{\mathbb{C}} w_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{w}_{i_l}\wedge\cdots\wedge w_{i_k} \in \wedge^*\mathbb{C}^n$$

を表す. この r_mを複素化し, $\mathbb{C}l(m)$ 上の表現へ一意に:拡張させる:

$$r_m : \mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m\otimes\mathbb{C} \to \mathrm{End}(\wedge^*\mathbb{C}^n)$$
$$r_m : \mathbb{C}l(m) \to \mathrm{End}(\wedge^*\mathbb{C}^n)$$

こうして得られた r_mは $\mathbb{C}l(m)$ 上の既約表現であり, Theorem 1.2.7 より一意である. そしてこの r_mを $\mathrm{Spin}(m)$ に制限したスピノール表現を考えると, その半スピノール表現は次のようになる:

$${r_m}^+|_{\mathrm{Spin}(m)} : \mathrm{Spin}(m) \to \mathrm{End}(\wedge^{\mathrm{even}}\mathbb{C}^n)$$
$${r_m}^-|_{\mathrm{Spin}(m)} : \mathrm{Spin}(m) \to \mathrm{End}(\wedge^{\mathrm{odd}}\mathbb{C}^n)$$

これで m が偶数のときのスピノール表現が具体的に記述出来た. この r_mを standard representation と呼ぶことにする. また断らない限り $r_m|_{\mathrm{Spin}(m)}$も r_mと書き, $S_m := \wedge^*\mathbb{C}^n$とおく.

1.3 Spin manifolds and the Dirac operator

Definiton 1.3.1 M を Riemann 多様体 (M, g) とする.

M 上のスピン構造とは M 上の $\mathrm{Spin}(m)$-bundle $\mathrm{Spin}(T^*M)$ と C^∞-map $\rho : \mathrm{Spin}(T^*M) \to SO(T^*M)$ の組 $(\mathrm{Spin}(T^*M), \rho)$ で以下の 2 つを満たすものを言う:

(1) 次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(T^*M, g) & \xrightarrow[2:1]{\rho} & SO(T^*M, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

(2) 任意の $a \in \mathrm{Spin}(T^*M)$, $b \in SO(T^*M)$ に対し

$$\rho(a\cdot b) = \rho(a)\cdot\rho(b)$$

Remark 1.3.2

(1) スピン構造を$\rho : \mathrm{Spin}(TM) \to SO(TM)$ で定義することもある. 本論文では上記の通り dual space で考

える.
(2) スピン構造はいつでも入る構造ではない. いつ spin structure が入るかは実は次の Proposition のように topological に決まる.

Proposition 1.3.3 oriented Riemann 多様体 (M,g) に対し,

$$(M,g) \text{ に spin structure が入る } \iff w_2(M) = 0$$

ここで $w_2(M) = w_2(T^*M) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ は多様体 M の second Stiefel-Whitney class を表す.

以下, Riemann 多様体 (M,g) は $m = 2n$ 次元でスピン構造が備わったスピン多様体 $(M, g, \mathrm{Spin}(T^*M), \rho)$ であり, M は compact かつ$\partial M = \phi$であるとする. スピン構造が備わっていることから次の spinor bundle $\not{S}$ を定義することができ, Clifford bundle $\mathbb{C}l(T^*M,g)$ を表示できる:

$$\not{S} := \mathrm{Spin}(T^*M,g) \times_{r_m} S_m, \quad \mathbb{C}l(T^*M,g) = \mathrm{Spin}(T^*M,g) \times_{inc.} \mathbb{C}l(m)$$

standard representation r_mから自然に次の bundle map:

$$r_m : \mathbb{C}l(T^*M) \to \mathrm{End}(\not{S}) = \mathrm{Spin}(T^*M) \times_{\mathrm{Ad}\circ r_m} \mathrm{End}(S_m)$$

を得る. 特に断らない限りこの bundle map も r_mと書くことにする. そして, Dirac operator とは次のように定義される 1 階の微分作用素のことである:

Definiton 1.3.4

$$D := \sum_j r_m(e^j) \circ \nabla^{\not{S}}_{e_j} : \Gamma(\not{S}) \to \Gamma(\not{S})$$

を Dirac operator という. ここで $\nabla^{\not{S}}$は Levi-Civita connection∇^gから自然に入る spinor bundle$\not{S}$の connection であり, connection form は$\omega(\nabla^{\not{S}}) = \frac{1}{4}\sum r_m(e_l) \circ r_m(e_k) \cdot \omega(\nabla^g)^k_l$である.

Remark 1.3.5
(1)D は 1 階の eliptic differential operator である.
(2)S_mには r_mをユニタリにする内積 $\langle \cdot,\cdot \rangle_{S_m}$が定数倍を除いて unique に存在する. $\mathbb{C}$ の standard metric から S_mに入る自然な metric がそうである.
(3)$\langle \cdot,\cdot \rangle_{S_m}$から bundle $\not{S}$ に (point wise に) metric $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\not{S}}$が入る. $\nabla^{\not{S}}$はこの $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\not{S}}$と compatible である.
(4) 任意の $X \in \Gamma(TM)$ と任意の$\eta \in \Gamma(T^*M)$ について次を満たす. (Clifford connection)

$$r_m(\eta) \circ \nabla^{\not{S}}_X = \nabla^{\not{S}}_X \circ r_m(\eta) + r_m(\nabla^g_X \eta)$$

(5)$\nabla^{\not{S}}$の曲率 $F(\nabla^{\not{S}})$ について次を満たす.

$$F(\nabla^{\not{S}})(e_j, e_i) = \frac{1}{4}\sum r_m(e_l) \circ r_m(e_k) \cdot R_{klji}$$

(6) この $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\not{S}}$から$\Gamma(\not{S})$ に次のようにして global な L^2-metric$(\cdot,\cdot)_{L^2}$が入る:

$$(\phi,\psi)_{L^2} := \int_M dV_g(x) \langle \phi(x), \psi(x) \rangle_{\not{S}_x} \qquad (\phi, \psi \in \Gamma(\not{S}))$$

この $(\cdot,\cdot)_{L^2}$に関して D は Green の定理より (formal)self-adjoint であることがわかる. 特に D^2も $(\cdot,\cdot)_{L^2}$に関して (formal)self-adjoint.

■

Dirac operator については次の公式が有名である.

Theorem 1.3.6 (Lichnerowicz formula)

$$D^2 = -\sum_{j=1}^{m} \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_j} \right) + \frac{s_M}{4}$$

ただし s_M は Riemann 多様体 (M, g) の scalar curvature である.

Proof.

$$\begin{aligned}
D^2 &= \left(\sum_j r_m(e^j) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \right) \circ \left(\sum_i r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \right) = \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \\
&= \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ \Big(r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} + r_m(\nabla^g_{e_j} e^i) \Big) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \\
&= \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} + \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(\sum_k e^k \omega(e_j)^k_i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \\
&= \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} - \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sum_k e_k \omega(e_j)^k_i} \\
&= \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} - \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_i} \\
&= \sum_{j=i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} + \sum_{j \neq i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \\
&\quad - \sum_{j=i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_i} - \sum_{j \neq i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_i} \\
&= -\sum_j \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} r_m(e^i) \circ r_m(e^j) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_i} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} r_m(e^i) \circ r_m(e^j) \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_i} e_j} \\
&= -\sum_j \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,i} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} - \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{[e_j, e_j]} \right) \\
&= -\sum_j \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_j} \right) + \frac{1}{8} \sum_{j,i,l,k} r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \circ r_m(e^l) \circ r_m(e^k) \cdot R_{klji} \\
&= -\sum_j \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_j} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_j} e_j} \right) - \frac{1}{8} \sum_{j,i,l,k} r_m(e^l) \circ r_m(e^k) \circ r_m(e^j) \circ r_m(e^i) \cdot R_{lkji}
\end{aligned}$$

である. ここで

$$e^j \circ e^i \circ e^k = -2\delta_{ik} e^j + 2\delta_{jk} e^i + e^k \circ e^j \circ e^i, \quad e^i \circ e^k \circ e^j = -2\delta_{ik} e^j + 2\delta_{ij} e^k + e^k \circ e^j \circ e^i$$

$$R_{lkji} + R_{ljik} + R_{likj} = 0 \quad \text{(Bianchi の恒等式)}$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^k)\circ r_m(e^j)\circ r_m(e^i)\cdot R_{lkji}\\
&=\frac{1}{3}\Biggl\{\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^k)\circ r_m(e^j)\circ r_m(e^i)\cdot R_{lkji}+\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^j)\circ r_m(e^i)\circ r_m(e^k)\cdot R_{ljik}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\circ r_m(e^k)\circ r_m(e^j)\cdot R_{likj}\Biggr\}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^k)\circ r_m(e^j)\circ r_m(e^i)\cdot (R_{lkji}+R_{ljik}+R_{likj})\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\left\{(-2\delta_{ik}r_m(e^j)+2\delta_{jk}r_m(e^i))\cdot R_{ljik}+(-2\delta_{ik}r_m(e^j)+2\delta_{ij}r_m(e^k))\cdot R_{likj}\right\}\\
&=\frac{2}{3}\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ljij}-\frac{2}{3}\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^j)R_{liij}+\frac{2}{3}\sum_{j,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^k)R_{ljkj}\\
&=2\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ljij}
\end{aligned}
$$

である. さらに、$e^l\circ e^i=-2\delta_{il}-e^i\circ e^l$であることから

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ljij}&=-2\sum_{j,i,l}\delta_{il}R_{ljij}-\sum_{j,i,l} r_m(e^i)\circ r_m(e^l)\cdot R_{ljij}\\
&=-2\sum_{j,l}R_{ljlj}-\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ijlj}\\
&=-2s_M-\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ljij}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\sum_{j,i,l} r_m(e^l)\circ r_m(e^i)\cdot R_{ljij}=-s_M
$$

である. 以上より

$$
\begin{aligned}
D^2&=-\sum_j\left(\nabla^{\not{S}}_{e_j}\nabla^{\not{S}}_{e_j}-\nabla^{\not{S}}_{\nabla^g_{e_j}e_j}\right)-\frac{1}{8}\sum_{j,i,l,k} r_m(e^l)\circ r_m(e^k)\circ r_m(e^j)\circ r_m(e^i)\cdot R_{lkji}\\
&=-\sum_j\left(\nabla^{\not{S}}_{e_j}\nabla^{\not{S}}_{e_j}-\nabla^{\not{S}}_{\nabla^g_{e_j}e_j}\right)-\frac{1}{8}(-2s_M)\\
&=-\sum_j\left(\nabla^{\not{S}}_{e_j}\nabla^{\not{S}}_{e_j}-\nabla^{\not{S}}_{\nabla^g_{e_j}e_j}\right)+\frac{s_M}{4}
\end{aligned}
$$

■

1.4 Heat equation associated with the Dirac Laplacian

前節で定義した Dirac 作用素を用いた heat equation の initial value problem :

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+D^2\right)\phi(t)=0,\qquad \lim_{t\to 0}\phi(t)=\phi_0\quad(\phi_0\in\Gamma(\not{S}))
$$

を考える. この heat equation は unique な解 $\phi(t,P)=\left(e^{-tD^2}\phi_0\right)(P)=\int_M dV_g(P')\mathbf{k}(t,P,P')\phi_0(P')$ を持つ. そして M 上の 1 点 P^0を固定し, P^0の周りで $\mathbf{k}(t,P,P^0)\in\Gamma(\mathbb{R}^+\times M,\not{S}\otimes\not{S}^*_{P^0})$ を後述の trivialization で localize する. その対応物を K と書くことにする. すると, 次のようなことが知られている.

Theorem 1.4.1 (Atiyah-Bott-Patodi [**1**])

(1)
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+D^2\right)K=0$$

(2)
$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M dV_g(x)r_m(K)(t,x)\phi(x)=\phi(0)\quad(\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)))$$

(3)K は次のように漸近展開できる：

$$\begin{aligned}
K(t,x) &\underset{t\downarrow 0}{\sim} q_t(x)\sum_{l=0}^{\infty}t^l K_l(x) \qquad \left(q_t(x):=\frac{1}{(4\pi t)^{m/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)\\
&=\frac{1}{(4\pi)^{m/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\sum_{l=0}^{\infty}t^{l-m/2}K_l(x)\\
K_l(x) &= \sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{|\alpha|})} e^{\alpha_1}\circ\cdots\circ e^{\alpha_{|\alpha|}}\cdot K_{l,\alpha}(x)\\
&=\sum_{p=0}^{m}K_{l,[p]}(x):=\sum_{p=0}^{m}\sum_{|\alpha|=p}e^{\alpha_1}\circ\cdots\circ e^{\alpha_{|\alpha|}}\cdot K_{l,\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Theorem 1.4.2 (Atiyah-Bott-Patodi [**1**], Getzler [**3**])

$$K_{l,[p]}(0)=0,\qquad (l<p/2)$$

$$\sum_{p=0}^{m}K_{p/2,[p]}(0)=\det{}^{1/2}\left(\frac{R(P^0)/2}{\sinh(R(P^0)/2)}\right)$$

である. ただし

$$\begin{cases}
R_{ji}(0):=F(\nabla^g)^j_i(0)\quad(\in\wedge^2T^*_{P^0}M=Cl(T^*_{P^0}M)\subset\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\\
\qquad\qquad =\frac{1}{2}\sum g(F(\nabla^g)(\partial/\partial x_l,\partial/\partial x_k)\partial/\partial x_i,\partial/\partial x_j)(0)dx_l\wedge dx_k\\
R(P^0):=(R_{ji}(0))\in\mathrm{Antisymmatrix}(m,\wedge^{\mathrm{even}}\mathbb{C}^m=\wedge^{\mathrm{even}}T^*_{P^0}M\otimes\mathbb{C})
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\mathbf{j}(tR):=\det\left(\frac{\sinh(tR(P^0)/2)}{tR(P^0)/2}\right)\ \text{とすると}\ \mathbf{j}(tR)\ \text{は analytic であり}\ \mathbf{j}(0)=1\ \text{である. よって}\\
\mathbf{j}(tR)^{-1/2}=\det{}^{1/2}\left(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\right)\ \text{は}\ t=0\ \text{の近傍で定義される関数であり}\\
\det{}^{1/2}\left(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}t^k f_k(R(P^0))\ \text{の様に}\ t=0\ \text{の周りで展開される.}
\end{cases}$$

である.

2 Getzler's Rescaling Transformation

この章では Getzler 氏により得られた結果を紹介する. ここでは主に [3] と [8] に依っている. まず, 任意に $P^0\in M$ を固定し, 我々は P^0を含む以下の近傍 U で考える.

$e_\bullet(P^0) = (e_1(P^0), \cdots, e_m(P^0))$: positively oriented orthonormal frame of $(T_{P^0}M, g_{P^0})$
$e_\bullet = (e_1, \cdots, e_m)$: P^0からの geodesics に沿った ∇^g-parallel な positively oriented local orthonormal frame of (TM, g)
$e^\bullet = (e^1, \cdots, e^m)$: dual frame of $e_\bullet$
$(x_1, \cdots, x_m)$: normal coordinates at P^0 with $(\partial/\partial_\bullet)_0 = e_\bullet(P^0)$
i.e. $$T_{P^0}M \cong \mathbb{R}^m \underset{open}{\supset} (U, x) \xrightarrow[\exp^{\nabla^g}_{P^0}]{\cong} (\tilde{U}, P) \underset{open}{\subset} M$$
そして *the bundles* に *trivialization* を入れる：

$$
\begin{aligned}
&SO(T^*M)|(U,x) \cong (U,x) \times SO(T^*_{P^0}M),\ e^\bullet(x) \cdot A \leftrightarrow e^\bullet(0) \cdot A \\
&\mathrm{Spin}(T^*M)|(U,x) \cong (U,x) \times \mathrm{Spin}(T^*_{P^0}M),\ \tilde{e}^\bullet(x) \cdot a \leftrightarrow \tilde{e}^\bullet(0) \cdot a \\
&\qquad \text{ここで } \rho(\tilde{e}^\bullet) = e^\bullet \text{ (2 個あるうち 1 個を固定する．)} \\
&\$|(U,x) \cong (U,x) \times \$_{P^0},\ [(\tilde{e}^\bullet(x), v)] \leftrightarrow [(\tilde{e}^\bullet(0), v)] \\
&\mathbb{C}l(T^*M)|(U,x) \cong (U,x) \times \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M),\ [(\tilde{e}^\bullet(x), w)] \leftrightarrow [(\tilde{e}^\bullet(0), w)]
\end{aligned}
$$

この設定を *thesynchronoussetting* と呼ぶことにする．そして次の同型:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\$|(U,x) \boxtimes \$^*_{P^0} & \xleftarrow[\text{parallel transportation}]{\cong} & (U,x) \times \$_{P^0} \otimes \$^*_{P^0} & \xleftarrow{\cong} & (U,x) \times \mathrm{End}(\$_{P^0}) & \xleftarrow[r_m]{\cong} & (U,x) \times \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(U,x) \times \{P^0\} & \xleftarrow{\cong} & (U,x) & = & (U,x) & = & (U,x)
\end{array}
$$

により $\mathbf{k}(t, P, P^0)$ に対応する
$$K(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$$
に興味がある．そして$\Gamma(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \$|U)$ に作用する作用素 $(\partial/\partial t,\ \partial/\partial x_j,\ \nabla^{\$|U},$ Clifford action, $r_m(e^\alpha)$, 関数倍 $f(x)\times$, D, D^2をこの同型を通して $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に作用するものと見る．
また K を $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathrm{End}(\$_{P^0}))$ の元と見たいときは $r_m(K)$ と書くことにする．この $K_{(\varepsilon)}$に興味がある．$K_{(\varepsilon)}$は $(0,1) \times U$ 上漸近展開：

$$
\begin{aligned}
K_{(\varepsilon)}(t,x) &\underset{\varepsilon^{1/2}\downarrow 0}{\sim} q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2}(t,x) \\
&= q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{|\alpha|})} dx_{\alpha_1} \circ \cdots \circ dx_{\alpha_{|\alpha|}} \cdot \gamma_{i/2,\alpha}(t,x) \\
&= q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \gamma_{i/2}(t,x)_{[p]} := q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=p} \gamma_{i/2,\alpha}(t,x)
\end{aligned}
$$

を持つ．(Theorem 2.3.2, Proposition 2.3.8) そして$\varepsilon^{1/2}$の order に関して pole を持たない．さらに$\gamma_{i/2}$は t に関して $\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)$ valued-*polynomial* である．$\gamma_{i/2,[p]}$達は $K_{l,\alpha}$は使って定義され，実は$\gamma_{i/2,[p]}$達がわかれば $K_{l,[p]}$達がわかる．よって$\gamma_{i/2}$達を調べることは熱核の漸近展開の係数を求めることに帰着される．この章の目標は後述で定義される$\gamma_{i/2}$を調べる事である．

2.1 Review of Getzler's Rescaling Transformation

Getzler's rescaling transformation を定義しよう．

Definiton 2.1.1 $\varepsilon > 0$ に対して，次で定義される写像 $T_\varepsilon : C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ を考える：

$\omega(t,x) = \sum e^I \cdot \omega_I(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に対して

$$(T_\varepsilon \omega)(t,x) := \sum dx_I \cdot \varepsilon^{-|I|/2} \cdot \omega_I(\varepsilon t, \varepsilon^{1/2}x)$$

この T_εを使って Getzler 変換G_ε : $\{C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\} \to \{C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}$ を次で定義する：
$A \in \{C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}$ に対し

$$G_\varepsilon(A) := T_\varepsilon \circ A \circ T_\varepsilon^{-1}$$

i.e.

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) & \xrightarrow{A} & C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \\ {\scriptstyle T_\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_\varepsilon} \\ C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) & \xrightarrow[G_\varepsilon A]{} & C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \end{array}$$

Remark 2.1.2
(1) $T_\varepsilon^{-1} = T_{\varepsilon^{-1}}$である. 特に T_εは bijective.
(2) 変換した熱方程式 $(*)$ の $\varepsilon \to 0$ の極限を考えるが, Getzler 変換しただけでは収束しないことがある. そこで作用素 $A : C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に対して $\varepsilon^{k/2} G_\varepsilon A$ が $\varepsilon \to 0$ で収束するような最小の $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$を考え, 特に $\varepsilon^{k/2} G_\varepsilon A$ を使って議論したい. この k を作用素 A の Getzler 次数という.
(3) この G_εが Getzler 氏の main idea である. この Getzler 変換 G_εを使って熱方程式を変換する. G_εの基本事項をいくつか述べる.

Proposition 2.1.3 任意の $\omega = dx_I \cdot \omega_I \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に対して以下が言える：
(1) $f \times$ (関数倍) : $dx_I \cdot \omega_I \mapsto dx_I \cdot f \cdot \omega_I$について

$$「G_\varepsilon f \times \text{ at } (t,x)」 : dx_I \cdot \omega_I(t,x) \mapsto dx_I \cdot f(\varepsilon^{1/2}x)\omega_I(t,x)$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x_j} : dx_I \cdot \omega_I \mapsto dx_I \cdot \dfrac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(t,x)$ について

$$「G_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ at } (t,x)」 : dx_I \cdot \omega_I(t,x) \mapsto dx_I \cdot \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(t,x)$$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial t} : dx_I \cdot \omega_I \mapsto dx_I \cdot \dfrac{\partial \omega_I}{\partial t}$ について

$$「G_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{ at } (t,x)」 : dx_I \cdot \omega_I(t,x) \mapsto dx_I \cdot \varepsilon^{1/2} \frac{\partial \omega_I}{\partial t}(t,x)$$

(4) $dx_j \circ = dx_j \wedge - dx_j \vee : dx_I \cdot \omega_I \mapsto dx_j \circ dx_I \cdot \omega_I$について

$$「G_\varepsilon dx_j \circ \text{ at } (t,x)」 = \varepsilon^{-1/2} dx_j \wedge - \varepsilon^{1/2} dx_j \vee = \varepsilon^{-1/2}(dx_j \wedge - \varepsilon dx_j \vee)$$

Proof. 定義通り計算すればよい.

■

Definiton 2.1.4
上の Proposition から次の operators : $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ を定義する.
(1) $e_j = \sum V_{ij} \cdot \partial / \partial x_i$に対し

$$「e_j^{(\varepsilon)}\,\mathrm{at}\,x」:=e_j^{(\varepsilon)}(x):=\varepsilon^{1/2}「G_\varepsilon e_j\,\mathrm{at}\,x」=\sum V_{ij}(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\partial/\partial x_i$$

(2) $$dx_j\circ_\varepsilon:=\varepsilon^{1/2}G_\varepsilon dx_j\circ=dx_j\wedge-\varepsilon dx_j\vee$$

Remark 2.1.5
(1)$e^j=e^j(0)=dx_j$であり, *the synchronous setting* の下で $e^j\circ_\varepsilon=dx_j\circ_\varepsilon=dx_j\wedge-\varepsilon dx_j\vee$である. 必要に応じて e と dx は書き分ける. そして $e^j\circ_\varepsilon$ は Clifford action になっていない. $\varepsilon^{-1/2}e^j\circ_\varepsilon$ がそうなのだ.
(2)e_j, $e^j\circ$ の Getzler 次数は1である。この記号を使って, $C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$, $C^\infty((U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に作用する cnnection $\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}$ に関する Getzler 変換を定式化する.

Proposition 2.1.6
$\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}=e_j+\frac{1}{4}\sum\omega(\nabla^g)(e_j)^k_l\cdot dx_l\circ dx_k\circ$ について

$$「G_\varepsilon\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}\,\mathrm{at}\,x」=\varepsilon^{-1/2}dx_j^{(\varepsilon)}(x)+\frac{\varepsilon^{-2/2}}{4}\sum\omega(\nabla^g)(e_j)^k_l(\varepsilon^{1/2}x)\cdot dx_l\circ_\varepsilon dx_k\circ_\varepsilon$$

である. そして

$$\begin{aligned}「\nabla^{(\varepsilon)}_{e^{(\varepsilon)}}\,\mathrm{at}\,x」:=\nabla^{(\varepsilon)}_{e^{(\varepsilon)}(x)}&:=\varepsilon^{1/2}「G_\varepsilon\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}\,\mathrm{at}\,x」\\&=e_j^{(\varepsilon)}(x)+\frac{\varepsilon^{-1/2}}{4}\sum\omega(\nabla^g)(e_j)^k_l(\varepsilon^{1/2}x)\cdot dx_l\circ_\varepsilon dx_k\circ_\varepsilon\end{aligned}$$

とおく.

Proof. Proposition 2.1.3 と Definition 2.1.4 に従って計算すればよい.

■

Remark 2.1.7 $\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}$ の Getzler 次数は 1 である.

2.2 Rescaling of the Dirac Laplacian

$C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ or $C^\infty((U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に作用する Dirac operator $D=\sum e^j\circ\nabla^{\$_{P^0}}_{e_j}$ の Getzler 変換について述べる. $D^{(\varepsilon)}$を

$$「D^{(\varepsilon)}\,\mathrm{at}\,x」:=「\varepsilon^{1/2}G_\varepsilon D\,\mathrm{at}\,x」=\sum\varepsilon^{-1/2}\cdot e_j\circ_\varepsilon\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}$$

とおく. すると $\left(D^{(\varepsilon)}\right)^2$ について次の rescaled Lichnerowicz formula を得る：

Proposition 2.2.1 (Rescaled Lichnerowicz formula)

$$「G_\varepsilon\left(D^{(\varepsilon)}\right)^2\,\mathrm{at}\,x」=-\varepsilon^{-2/2}\sum_{j=1}^m\left(\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}-\nabla^{(\varepsilon)}_{\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}e_j^{(\varepsilon)}}\right)+\frac{1}{4}s_M(\varepsilon^{1/2}x)$$

ここで $\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}e_j^{(\varepsilon)}:=\varepsilon^{2/2}「G_\varepsilon\nabla^g_{e_j}e_j\,\mathrm{at}\,x」=\sum_i\omega(\nabla^g)(e_j)^i_j(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\varepsilon^{1/2}\cdot e_i^{(\varepsilon)}(x)$ である.
そして $\mathbb{D}_\varepsilon:=\varepsilon^{2/2}G_\varepsilon(D)^2$とおく.

i.e. $$「\mathbb{D}_\varepsilon\,\mathrm{at}\,x」=-\sum_{j=1}^m\left(\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}-\nabla^{(\varepsilon)}_{\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)}e_j^{(\varepsilon)}}\right)+\frac{\varepsilon^{2/2}}{4}s_M(\varepsilon^{1/2}x)$$

Proof. Theorem 1.4.6, Proposition 2.1.3, Proposition 2.1.6 より主張は明らか.

■

Remark 2.2.2
(1) $G_\varepsilon D^2 = G_\varepsilon D \circ G_\varepsilon D$ と Proposition 2.1.3 と Proposition 2.1.6 により計算することでも得られる. essential な部分は Lichnerowicz formula を導く計算過程及び結果である.
(2)D, D^2 の Getzler 次数は 2 である.
(3)$\mathbb{D}_\varepsilon = \mathbb{D}_{0/2} + O(\varepsilon^{1/2})$ であり,

$$\mathbb{D}_{0/2} = -\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{4} \sum_i x_i R_{ji} \wedge \right)^2 = -\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{16} \left\langle x \middle| R^2 \middle| x \right\rangle$$

である. ここで $R = R(P^0)$, $R_{ji} := \dfrac{1}{2} \sum_{l,k} R_{jilk} dx_l \wedge dx_k$ とおいている. これは 3 章で導く.

2.3 Rescaling of the Heat Kernel

前節では Dirac 作用素の Getzler 変換を考えた. 見方としては $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に作用する熱作用素の変換として

$$\frac{\partial}{\partial t} + D^2 \overset{\text{Getzler}}{\underset{\varepsilon > 0}{\Longrightarrow}} \varepsilon^{2/2} G_\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + D^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^{2/2} G_\varepsilon D^2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_\varepsilon$$

を考えたい. この変換した熱作用素において heat equation の initial value problem を考えたとき, 解は unique に存在し, heat kernel も unique に存在する.

Definiton 2.3.1 今まで通り $K(t,x) = e^{-tD^2}(x,0) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ とする. そして$\varepsilon > 0$ に対して

$$K_{(\varepsilon)}(t,x) := \varepsilon^{m/2} (T_\varepsilon K)(t,x)$$

とおく.

この $K_{(\varepsilon)} \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ について次が言える：

Theorem 2.3.2
(1)
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_\varepsilon \right) K_{(\varepsilon)} = 0$$

(2)
$$\lim_{t \downarrow 0} \int dV_g(x) r_m(K_{(\varepsilon)})(t,x) \phi(x) = \phi(0), \qquad (\phi \in C^\infty((U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)))$$

(3)($(0,\varepsilon_0]$ 上 point wise な $t \downarrow 0$ のときの漸近展開)
任意の $\varepsilon^{1/2} \in (0,\varepsilon_0]$ に対して

$$K_{(\varepsilon)}(t,x) \underset{t \downarrow 0}{\sim} q_t(x) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{|\alpha|})} t^l \varepsilon^{(2l - |\alpha|)/2} K_{l,\alpha}(\varepsilon^{1/2} x)$$

(4)($[0,1] \times U$ 上の uniforrmal な $\varepsilon^{1/2} \downarrow 0$ のときの漸近展開)
$[0,1] \times U$ 上 uniformal に次の漸近展開を得る：

$$K_\varepsilon(t,x) \underset{\varepsilon^{1/2} \downarrow 0}{\sim} q_t(x) \sum_{i=-m}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2}(t,x)$$

ここで

$$(1^\circ)\gamma_{i/2}(t,x)=\sum_{p=0}^{m}\gamma_{i/2}(t,x)_{[p]}:=\sum_{|\alpha|=p}^{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{|\alpha|})}\gamma_{i/2,\alpha}(t,x)\text{ について}$$

$$\gamma_{i/2}(t,x)_{[p]}=\sum_{-p\leq k\leq i}t^{(p+k)/2}K^{(i-k)}_{(p+k)/2,[p]}(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\quad(\gamma_{i/2}\text{は }t\text{ に関して }polynomial)$$

$$K_{l,\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{N}K^{(k)}_{l,\alpha}(x)+R_{l,N,\alpha}\quad(Taylor\,expansion)$$

$$K^{(k)}_{l,\alpha}(x):=\sum_{|\nu|=k}x^\nu\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu K_{l,\alpha}(x)\Big|_{x=0}\qquad(\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_m)\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0},\,|\nu|:=\sum\nu_i)$$

$$(2^\circ)\gamma_{0/2}(0,0)=1,\quad\gamma_{i/2}(0,0)=0\,(i\neq 0),\quad(\text{実は}\gamma_{i/2}=0\,(i<0)\,(\text{Proposition 2.3.8}))$$

である. さらに任意の (N,j,ν) with $N>j+|\nu|/2$ についてある $C(N,j,\nu)>0$ が存在して
$[0,1]\times U\ni(t,x)$ 上において

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu\left\{K_\varepsilon(t,x)-q_t(x)\sum_{i=-m}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x)\right\}\right|\leq C(N,j,\nu)\varepsilon^N$$

である. ここで $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu:=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\nu_m}$ とおいている. この主張は, K_εを微分したものの漸近展開は漸近展開したものの微分であることを言っている.

Proof. (1) と (4) を証明する. (その他は [2], [3] 参照)
(1) 定義通り計算する

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_\varepsilon\right)K_{(\varepsilon)}=\varepsilon^{2/2}G_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+D^2\right)\varepsilon^{m/2}T_\varepsilon K=\left(\varepsilon^{2/2}T_\varepsilon\circ\left(\frac{\partial}{\partial t}+D^2\right)\circ T_\varepsilon^{-1}\right)\varepsilon^{m/2}T_\varepsilon K$$
$$=\varepsilon^{(m+2)/2}T_\varepsilon\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+D^2\right)K\right)=0$$

(4) $N>m/2$ をとる.

$$K_{l,\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{2(N-l)}K^{(k)}_{l,\alpha}(x)+R_{l,2(N-l),\alpha}=K^{\leqq 2(N-l)}_{l,\alpha}(x)+R_{l,2(N-l),\alpha}$$

$$K_l(x)=\sum_{k=0}^{2(N-l)}K^{(k)}_l(x)+R_{l,2(N-l)}=K^{\leqq 2(N-l)}_l(x)+R_{l,2(N-l)}$$

$$K^{\leqq 2(N-l)}_{l,[p]}(x)=\sum_{|\alpha|=p}K^{\leqq 2(N-l)}_{l,\alpha}(x)e^{\alpha_1}\circ\cdots\circ e^{\alpha_{|\alpha|}},\quad K^{\leqq 2(N-l)}_l(x)=\sum_{p=0}^{m}K^{\leqq 2(N-l)}_{l,[p]}(x)$$

$$\left|K(t,x)_{[p]}-q_t(x)\sum_{l=0}^{N}t^lK^{\leqq 2(N-l)}_{l,[p]}(x)\right|\leqq Ct^{N-m/2}$$

である. よって次が言える :

$$\left|K_{(\varepsilon)}(t,x)_{[p]}-q_t(x)\varepsilon^{-p/2}\sum_{l=0}^{N}(\varepsilon t)^lK^{\leqq 2(N-l)}_{l,[p]}(\varepsilon^{1/2}x)\right|\leqq C(\varepsilon t)^{N-m/2}\varepsilon^{(m-p)/2}=Ct^{N-m/2}\varepsilon^{N-p/2}$$

そして $0\leqq p\leqq m$ に対して $j\geqq m-p\geqq 0$ を取って

$$\left| K_{(\varepsilon)}(t,x)_{[p]} - q_t(x)\varepsilon^{-p/2} \sum_{0 \leqq l \leqq (j+p)/2} (\varepsilon t)^l K_{l,[p]}^{\leqq j+p-2l}(\varepsilon^{1/2}x) \right| \leqq C t^{(j+p-m)/2} \varepsilon^{j/2}$$

を得る. そして$\varepsilon^{1/2}$の order で整理する.

$$\varepsilon^{-p/2} \sum_{0 \leqq l \leqq (j+p)/2} (\varepsilon t)^l K_{l,[p]}^{\leqq j+p-2l}(\varepsilon^{1/2}x) = \sum_{-p \leqq 2l-p \leqq j} \varepsilon^{(2l-p)/2} t^l K_{l,[p]}^{\leqq j+p-2l}(\varepsilon^{1/2}x)$$

$$= \sum_{-p \leqq i \leqq j} \varepsilon^{i/2} t^{(p+i)/2} K_{(p+i)/2,[p]}^{\leqq j-i}(\varepsilon^{1/2}x)$$

さらに次のようにおく：

$$\sum_{-p \leqq i \leqq j} \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2}(t,x)_{[p]} := \sum_{-p \leqq i \leqq j} \varepsilon^{i/2} t^{(p+i)/2} K_{(p+i)/2,[p]}^{\leqq j-i}(\varepsilon^{1/2}x)$$

つまり

$$\gamma_{i/2}(t,x)_{[p]} = \sum_{-p \leqq k \leqq j} \varepsilon^{(k-i)/2} t^{(p+k)/2} K_{(p+k)/2,[p]}^{(i-k)}(\varepsilon^{1/2}x)$$

$$= \sum_{-p \leqq k \leqq j} \varepsilon^{(k-i)/2} t^{(p+k)/2} \sum_{|\nu|=i-k} (\varepsilon^{2/1}x)^{\nu} \frac{1}{\nu_1! \cdots \nu_m!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} K_{(p+k)/2,[p]}(x)\Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{-p \leqq k \leqq j} t^{(p+k)/2} \sum_{|\nu|=i-k} x^{\nu} \frac{1}{\nu_1! \cdots \nu_m!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} K_{(p+k)/2,[p]}(x)\Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{-p \leqq k \leqq j} t^{(p+k)/2} K_{(p+k)/2,[p]}^{(i-k)}(x)$$

である. これより $0 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$\left| K_{(\varepsilon)}(t,x)_{[p]} - q_t(x) \sum_{-p \leqq i \leqq j} \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2}(t,x)_{[p]} \right| \leqq C \varepsilon^{j/2}$$

がわかる. よって一様収束性が言える. 微分したものの漸近展開についてもについてもこれよりわかる.

■

Corollary 2.3.3 次が成り立つ

$$K_{l,[p]}(0) = \begin{cases} 0 & (l < (p-m)/2) \\ \gamma_{l-p/2,[p]}(1,0) & (l \geqq (p-m)/2) \end{cases}$$

Proof.

$$K_{(\varepsilon)}(1,0) = \varepsilon^{m/2}(T_\varepsilon K)(1,0) = \sum_{p=0}^{m} \varepsilon^{m/2}(T_\varepsilon K_{[p]})(\varepsilon, 0) = \sum_{p=0}^{m} \varepsilon^{(m-p)/2} K_{[p]}(1,0)$$

$$K(\varepsilon,0)\sim\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{m/2}}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l K_l(0)=\frac{1}{(4\pi)^{m/2}}\sum_{p=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-m/2}K_{l,[p]}(0)\qquad(\text{Theorem 1.5.1})$$

である. よって

$$K_{(\varepsilon)}(1,0)=\sum_{p=0}^{m}\varepsilon^{(m-p)/2}K(\varepsilon,0)_{[p]}\sim\frac{1}{(4\pi)^{m/2}}\sum_{p=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l-m/2}K_{l,[p]}(0)$$

である. また Theorem 2.3.2 より

$$K_{(\varepsilon)}(1,0)\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\sim}\frac{1}{(4\pi)^{m/2}}\sum_{i=-m}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(1,0)$$

である. よって

$$K_{l,[p]}(0)=\begin{cases}0 & (l<(p-m)/2)\\ \gamma_{l-p/2,[p]}(1,0) & (l\geqq(p-m)/2)\end{cases}$$

■

Theorem 2.3.2 及び Corollary 2.3.4 より $K(t,0)$ の $t\to 0$ の漸近展開の係数達 $K_{l,\alpha}$ を調べることは $K_{(\varepsilon)}(1,0)$ の $\varepsilon\to 0$ の係数達 $\gamma_{i/2,\alpha}$ を調べることに帰着されることが分かった. もう少し $\gamma_{i/2,\alpha}$ について調べよう.

Lemma 2.3.4 $\mathcal{R}:=\sum x_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ とおく. 次が言える :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)q_t\phi_t=q_t\left(\frac{\partial}{\partial t}+t^{-1}\mathcal{R}+\mathbb{D}_{0/2}\right)\phi_t,\qquad(\phi_t(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$$

Proof. $\mathbb{D}_{0/2}=-\sum_j\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}+\dfrac{1}{4}\sum_i x_iR_{ji}(0)\wedge\right)^2$ である. そこで $\nabla_j:=\dfrac{\partial}{\partial x_j}+\dfrac{1}{4}\sum_i x_iR_{ji}(0)\wedge$ とおくと

$$\nabla_j(q_t\phi_t)=\frac{\partial q_t}{\partial x_j}+q_t\nabla_j\phi_t,\quad(\nabla_j)^2(q_t\phi_t)=\frac{\partial^2 q_t}{(\partial x_j)^2}+2\frac{\partial q_t}{\partial x_j}\nabla_j\phi_t+q_t(\nabla_j)^2\phi_t$$

である. また

$$\frac{\partial q_t}{\partial x_j}=-\frac{x_j}{2t}q_t,\quad\frac{\partial^2 q_t}{(\partial x_j)^2}=\left(\frac{x_j^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)q_t,\quad\frac{\partial q_t}{\partial t}=\left(\frac{|x|^2}{4t^2}-\frac{m}{2t}\right)q_t$$

$$\sum_{j,i}x_jx_iR_{ji}(0)=-\sum_{j,i}x_jx_iR_{ij}(0)=-\sum_{i,j}x_ix_jR_{ji}(0)\text{ より }\sum_{i,j}x_jx_iR_{ji}(0)=0$$

であることに注意すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)q_t\phi_t=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_j(\nabla_j)^2\right)q_t\phi_t=\frac{\partial}{\partial t}(q_t\phi_t)-\sum_j(\nabla_j)^2(q_t\phi_t)$$

$$=\frac{\partial q_t}{\partial t}\phi_t+q_t\frac{\partial\phi_t}{\partial t}-\sum_j\left(\frac{\partial^2 q_t}{(\partial x_j)^2}+2\frac{\partial q_t}{\partial x_j}\nabla_j\phi_t+q_t(\nabla_j)^2\phi_t\right)$$

$$= \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{m}{2t}\right) q_t\phi_t + q_t\frac{\partial \phi_t}{\partial t} - \sum_j \left(\left(\frac{x_j^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) q_t\phi_t - \frac{x_j}{t} q_t \nabla_j \phi_t + q_t(\nabla_j)^2\phi_t\right)$$

$$= q_t\left(\frac{\partial}{\partial t} + t^{-1}\sum_j x_j\nabla_j + \mathbb{D}_{0/2}\right)\phi_t = q_t\left(\frac{\partial}{\partial t} + t^{-1}\sum_j x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathbb{D}_{0/2}\right)\phi_t$$

$$= q_t\left(\frac{\partial}{\partial t} + t^{-1}\mathcal{R} + \mathbb{D}_{0/2}\right)\phi_t$$

■

Remark 2.3.5 $\mathcal{R}$ は radical vector field と呼ばれるベルトル場である.

Lemma 2.3.6 $a_0 \in \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)$ に対して, $\{\Phi_{l/2} \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}_{l=0}^\infty$が次を満たすとする：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t(x)\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2}(x) = 0, \quad \Phi_{0/2}(0) = a_0$$

ただし $q_t(x)\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2}(x) = 0$ は形式的無限和であり, $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t(x)\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2}(x) = 0$ も形式的に計算する. すると, これを満たすものは一意である.

Proof. まず$\Phi_{0/2}(x)$が定数関数であることを示す. Lemma 2.3.4 より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2} = q_t\left(\frac{\partial}{\partial t} + t^{-1}\mathcal{R} + \mathbb{D}_{0/2}\right)\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2}$$

$$= q_t\left\{t^{-1}\mathcal{R}\Phi_{0/2} + \sum_{l=1}^\infty t^{(l-2)/2}\left((\mathcal{R} + \frac{l}{2})\Phi_{l/2} + \mathbb{D}_{0/2}\Phi_{(l-2)/2}\right)\right\}$$

である. よって

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t\sum_{l=0}^\infty t^{l/2}\Phi_{l/2}(x) = 0 \iff \begin{cases} \mathcal{R}\Phi_{0/2} = 0 \\ (\mathcal{R} + \frac{l}{2})\Phi_{l/2} = -\mathbb{D}_{0/2}\Phi_{(l-2)/2} \quad (l \geqq 1) \end{cases}$$

である. ただし$\Phi_{-1/2} = 0$と見做す. 特に$\Phi_{0/2}(0) = a_0$ ならば $\Phi_{0/2}(x)$ は定数関数であり $\Phi_{0/2}(x) = a_0$ である. 次に一意性を示そう. $a_0 = 0$ の場合を考えればよい.
$a_0 = 0$ のとき, $\Phi_{0/2}(x)$ は定数関数であるから$\Phi_{0/2}(x) = 0$ である. すると$\Phi_{2/2}(x)$ は

$$\left(\mathcal{R} + \frac{2}{2}\right)\Phi_{2/2} = 0$$

を満たす. そして任意に $x^0 \in U$ を取り, この微分方程式を直線 $\{ux^0 \mid u \in \mathbb{R}\}$ 上で考えると次のように書ける：

$$\left(u\frac{d}{du} + \frac{2}{2}\right)\Phi_{2/2} = 0$$

そして直線上で $\Phi_{2/2}(ux^0) = \frac{1}{u}\Phi_{2/2}(x^0)$ と解ける. ここで $\Phi_{2/2}(ux^0)$ は $u = 0$ でも smooth であることから

$$\Phi_{2/2}(ux^0)=0 \qquad (u\in\mathbb{R})$$

である. x^0は任意であるので故に$\Phi_{2/2}=0$が言えた. これより帰納的に$\Phi_{2k/2}=0$が言える. $\Phi_{(2k+1)/2}$についても同様に考える. $(\mathcal{R}+\frac{1}{2})\Phi_{1/2}=0$であるから, 直線$\{ux^0\,|\,u\in\mathbb{R}\}$上で考えると

$$\Big(u\frac{d}{du}+\frac{2}{2}\Big)\Phi_{2/2}=0$$

である. この微分方程式は直線$\{ux^0\,|\,u\in\mathbb{R}\}$上で$\Phi_{1/2}(ux^0)=\frac{1}{u^{1/2}}\Phi_{1/2}(x^0)$と解ける. $\Phi_{1/2}(ux^0)$は$u=0$でもsmoothであることから$\Phi_{1/2}=0$が言える. そして帰納的に$\Phi_{(2k+1)/2}=0$である.

■

Remark 2.3.7 Lemma 2.3.6において, $\Phi_{(2k+1)/2}$は初期条件に無関係に消える. 故に$t^{(2k+1)/2}$の項は消えてしまう.

Lemma 2.3.6より, Thoerem 2.3.2で得られた$\gamma_{i/2}$に対し次が言える：

Proposition 2.3.8 $\{\gamma_{i/2}(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}_{i=-m}^\infty$に対し, 各$\gamma_{i/2}$は$t$に関して多項式であり

(1) $\gamma_{i/2}=0 \quad (i/2<0)$

(2)$\{\gamma_{i/2}(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}_{i=0}^\infty$は

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)q_t(x)\displaystyle\sum_{i=0}^\infty\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x)=0 \quad (\text{形式的})\\ \gamma_{0/2}(0,0)=1,\quad \gamma_{i/2}(0,0)=0\,(i>0)\end{cases}$$

を満たす.

Proof. Theorem 2.3.2より

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right)q_t(x)\displaystyle\sum_{i=0}^\infty\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x)=0\\ \gamma_{0/2}(0,0)=1,\quad \gamma_{i/2}(0,0)=0\,(i\neq0)\end{cases}$$

である. そして$\varepsilon^{1/2}$のorderで整理すると

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right)q_t(x)\sum_{i=-m}^\infty\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}+O(\varepsilon^{1/2})\right)q_t(x)\sum_{i=-m}^\infty\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x)$$

$$=\varepsilon^{-m/2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\gamma_{-m/2})+O(\varepsilon^{(-m+1)/2})$$

である. 特に$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\gamma_{-m/2})=0$である. $\gamma_{-m/2}(0,0)=0$よりLemma 2.3.6から

$$\gamma_{-m/2}=0$$

が言える. すると$\gamma_{-m/2+1/2}$は$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\gamma_{-m/2+1/2})=0,\quad \gamma_{-m/2+1/2}(0,0)=0$を満たすから同様にLemma 2.3.6より$\gamma_{-m/2+1/2}=0$が言える. よって帰納的に(1)が示され, (2)も示された.

■

そして Corollary 2.3.3 と Proposition 2.3.8 より次が言える：

Theorem 2.3.9

$$K_{l,[p]}(0)=\begin{cases}0 & (l<p/2)\\ \gamma_{l-p/2,[p]}(1,0) & (l\geqq p/2)\end{cases}$$

よって$\gamma_{i/2,l}(1,0)$ 達を調べれば $K_{l,\alpha}(0)$ 達が明らかになることがわかった.

2.4 Mehler's formula

Proposition 2.4.1 (Mehler's formula) $\mathbb{R}$ 上で考える. 関数 $p_t(x,y)$ で

$$\begin{cases}\mathcal{S}(\mathbb{R})\ni\phi \overset{bounded}{\mapsto} \phi_t(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x,y)\phi(y)dy\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\\ \\ \displaystyle\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2+x^2\Big)\phi_t(x)=0,\quad \lim_{t\downarrow 0}\phi_t(x)=\phi(x)\end{cases}$$

を満たすものとして

$$p_t(x,y)=\frac{1}{2\pi\sinh 2t}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big\{(\coth 2t)(x^2+y^2)-2(\operatorname{cosech}2t)xy\big\}\Big)$$

が取れる. そして

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{16}\Big\langle x\Big|r^2\Big|x\Big\rangle+f\Big)\phi_t(x)=0,\quad (r,\ f\in\mathbb{R})$$

の解として

$$p_t(x,y)=\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\Big(\frac{tr/2}{\sinh(tr/2)}\Big)^2\exp\Big(-\frac{1}{4t}\Big\langle x\Big|\frac{tr}{2}\coth(\frac{tr}{2})\Big|x\Big\rangle-tf\Big)$$

が取れる.

Remark 2.4.2

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2}\Big)(q_t\gamma_{0/2})=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2+\frac{1}{16}\Big\langle x\Big|R^2\Big|x\Big\rangle\Big)(q_t\gamma_{0/2})=0$$

であるから, Mehler's formula と比較することで次が得られる：

Theorem 2.4.3 (Getzler[3])

$$q_t(x)\gamma_{0/2}(t,x)=\frac{1}{(4\pi t)^{m/2}}\det{}^{1/2}\Big(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{4t}\Big\langle x\Big|\frac{tR(P^0)}{2}\coth(\frac{tR(P^0)}{2})\Big|x\Big\rangle\Big)$$

Remark 2.4.4

$\dfrac{tR(P^0)}{2}\coth(\dfrac{tR(P^0)}{2})$ は analytic であり次のように展開できる：

$$\frac{tR(P^0)}{2}\coth(\frac{tR(P^0)}{2}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k} c_{2k} R^{2k}$$
$$\left\langle x \middle| \frac{tR}{2}\coth(\frac{tR}{2}) \middle| x \right\rangle = |x|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k} c_{2k} \left\langle x \middle| R^{2k} \middle| x \right\rangle$$

特に Theorem 3.1.5 で与えられた $\gamma_{0/2}$ は t に関して *polynomial* であり

$$\gamma_{0/2}(t,x) = \det{}^{1/2}\left(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} t^{2k-1} c_{2k} \left\langle x \middle| R^{2k} \middle| x \right\rangle\right)$$

である. これより

$$\gamma_{0/2}(t,-x) = \gamma_{0/2}(t,x)$$

が言える. よって$\gamma_{0/2}$は x に関して週関数である. 故に

$$\gamma_{0/2}(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l/2} \gamma_{0/2,2l/2}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=even} t^{2l/2} x^{\alpha} \gamma_{0/2,2l/2,\alpha}$$

と展開できる. そして Theorem 2.4.3 より次を満たす

$$\gamma_{0/2}(1,0) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{0/2,2l/2,0} = \det{}^{1/2}\left(\frac{R(P^0)/2}{\sinh(R(P^0)/2)}\right), \quad \gamma_{0/2}(0,0) = \gamma_{0/2,0/2,0} = 1$$

である.

3 On the coefficients $K_{\ell,[p]}(P^0)$ for $\ell > p/2$

第 1 章, 第 2 章で熱核の漸近展開 $K(t,0)(t \to 0)$ の係数を調べるには $K_{(\varepsilon)}(1,0)(\varepsilon \to 0)$ 漸近展開の係数を調べればよいことを明示した. 具体的には $K_{l,\alpha}(0)$ 達を調べるには$\gamma_{i/2,\alpha}(1,0)$ 達を調べればよいのである. この章では具体的に$\gamma_{i/2,\alpha}(1,0)$ $(i > 0)$ 達の計算方法を提示する. メインアイデアは $\mathbb{D}_{(\varepsilon)}$を形式的に

$$\mathbb{D}_{(\varepsilon)} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \mathbb{D}_{i/2}$$

と展開し, 各 $\mathbb{D}_{i/2}$を計算することである.

3.1 Taylor expansion of $\mathbb{D}_{(\varepsilon)}$

まず具体的に$\gamma_{i/2,\alpha}(1,0)$ 達の計算をするうえで重要な主張を述べる.

Theorem 3.1.1 形式和 $\Psi_{i/2}(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} t^{l/2}\Psi_{i/2,l/2}(x) \quad (\Psi_{i/2,l/2}(x) \in C^{\infty}((U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)))$ の列 $\{\Psi_{i/2}(t,x)\}_{i=0}^{\infty}$で

$$(\star)\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right) q_t(x)\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\Psi_{i/2}(t,x) = 0 \\ \\ \Psi_{0/2,0/0}(0,0) = 1, \quad \Psi_{i/2,0/0}(0,0) = 0\,(i > 0) \end{cases}$$

を満たすものはuniqueに存在し，Theorem 2.3.2で得られた列$\{\gamma_{i/2}(t,x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+\times(U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}_{i=0}^{\infty}$のみである．

Proof. $\{\gamma_{i/2}(t,x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+ \times (U,x)\}_{i=0}^{\infty}$は条件 $(\star)$ をみたすので存在性は言えている．
一意性を示す．Theorem 2.3.8の証明と同様に$\varepsilon^{1/2}$の order で整えると

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right) q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\Psi_{i/2}(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\mathbb{D}_{k/2}\right) q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Psi_{i/2}(t,x)$$

$$= \varepsilon^{0/2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\Psi_{0/2}) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\Psi_{i/2}) + \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2})\right\}$$

である．よって

$$(\star) \iff \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t(x)\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} t^{l/2}\Psi_{0/2,l/2} = 0, \quad \Psi_{0/2,0/2}(0) = 1 \\ \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\Psi_{i/2}) + \displaystyle\sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2}) = 0, \quad \Psi_{i/2,0/2}(0) = 0\,(i>0) \end{cases}$$

である．この同値な言い換えにより帰納的に一意性を示す．
$i=0$ のとき，$\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t(x)\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} t^{l/2}\Psi_{0/2,l/2} = 0, \quad \Psi_{0/2,0/2}(0) = 1$ と Lemma 2.3.6 より$\Psi_{0/2}$の一意性は言える．
$i < i_0$なる任意の i に対して$\Psi_{i/2}$の一意性が言えたとする．Ψ_{i_0}, Ψ'_{i_0}が

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\Psi_{i_0/2}) + \sum_{i_1+i_2=i_0}^{i_2<i_0}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2}) = 0, \quad \Psi_{i_0/2,0/2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t\Psi'_{i_0/2}) + \sum_{i_1+i_2=i_0}^{i_2<i_0}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi'_{i_2}) = 0, \quad \Psi'_{i_0/2,0/2} = 0$$

を満たしているとする．すると帰納法の仮定から$\Psi_{i/2} = \Psi'_{i/2}\,(i < i_0)$ であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right)(q_t(\Psi_{i_0/2} - \Psi'_{i_0/2})) = 0, \quad (\Psi_{i_0/2,0/2} - \Psi'_{i_0/2,0/2}) = 0$$

を満たす．よって Lemma 2.3.6 より$\Psi_{i_0/2} = \Psi'_{i_0/2}$である．以上より一意性が言えた．

■

Remark 3.1.2 条件 $(\star)$ を満たす$\Psi_{i/2}$達は t に関して *polynomial*であり，$t^{(2k+1)/2}$の項は必然的に消えてしまう．

一意性は保証されたので条件 $(\star)$ を満たすような $\{\Psi_{i/2}\}_{i=0}^{\infty}$ を構成できればよい. 特に $\Psi_{i/2}\,(i>0)$ のときは各 $\mathbb{D}_{k/2}\,(k>0)$ を具体的に表示する必要がある, なので次に着目した.

Proposition 3.1.3 (Atiyah-Bott-Patodi, Nagase)
$\omega(\nabla^g) \in \Gamma(\mathfrak{so}(n) \otimes TU)$ を ∇^g の connection form, $F(\nabla^g)$ を ∇^g の curvature とする. つまり

$$\nabla^g_X e_l = \sum \omega(\nabla^g)(X)^k_l e_k,\ F(\nabla^g)(X,Y) = [\nabla^g_X, \nabla^g_Y] - \nabla^g_{[X,Y]}$$

である. さらに

$$R_{jilk} := g(F(\nabla^g)(\partial/\partial x_l, \partial/\partial x_k)e_i, e_j)$$

とおく. すると, the synchronous settingの下で次の展開式を得る.

(1)
$$\omega(\nabla^g)^{i_1}_{i_2}(\partial/\partial x_j)(x) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{(l+1)!} \sum x_{j_1}\cdots x_{j_l} \cdot \frac{\partial^{l-1} R_{i_1 i_2 j j_1}}{\partial x_{j_2}\cdots x_{j_l}}(0)$$

(2) $e_\bullet = (\partial/\partial_\bullet)\cdot V_\bullet(x)$, $e^\bullet = (dx_\bullet)\cdot V^\bullet(x)$ $(e_i = \sum V_{ji}(x)\partial/\partial x_j,\ e^i = \sum V^{ji}(x)dx_j)$ に対して

$$V^{ji}(x) = \delta_{ji} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{l-1}{(l+1)!} \sum x_{j_1}\cdots x_{j_l} \cdot \frac{\partial^{l-2} R_{j j_1 i j_2}}{\partial x_{j_3}\cdots x_{j_l}}(0)$$

$$V_{ji}(x) = \delta_{ji} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{l-1}{(l+1)!} \sum x_{j_1}\cdots x_{j_l} \cdot \frac{\partial^{l-2} R_{j j_1 i j_2}}{\partial x_{j_3}\cdots x_{j_l}}(0)$$

である.

証明は省略する. ここで次の記号

$$R_{j_1 j_2 j_3 j_4 \cdots j_l} := \frac{\partial^{l-4} R_{j_1 j_2 j_3 j_4}}{\partial x_{j_5}\cdots \partial x_{j_l}}$$

を導入する. $R_{j_1 j_2 j_3 j_4 \cdots j_l}(0)$ は必要に応じて $R_{j_1 j_2 j_3 j_4 \cdots j_l}$ と書くことにすると上の形式的展開式は次のように表される：

$$\omega(\nabla^g)^{i_1}_{i_2}(\partial/\partial x_j)(x) = -x_{j_1}\frac{1}{2}R_{i_1 i_2 j j_1} - x_{j_1}x_{j_2}\frac{1}{3}R_{i_1 i_2 j j_1 j_2} + O(x^3)$$

$$V^{ji}(x) = \delta_{ji} - x_{j_1}x_{j_2}\frac{1}{6}R_{j j_1 i j_2} - x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\frac{1}{12}R_{j j_1 i j_2 j_3} + O(x^4)$$

$$V_{ji}(x) = \delta_{ji} + x_{j_1}x_{j_2}\frac{1}{6}R_{j j_1 i j_2} + x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\frac{1}{12}R_{j j_1 i j_2 j_3} + O(x^4)$$

$\omega^j_i(\nabla^g)$ と $V_{ji}(x)$ の形式的展開式を使うと $\mathbb{D}_{(\varepsilon)} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\mathbb{D}_{i/2}$ を具体的にどこまでも書き下すことができる. この展開式を使うと高次でも $\mathbb{D}_\varepsilon$ が具体的に書けることに着目したことが本研究の独創的な点の 1 つである. 具体的に $\mathbb{D}_{0/2}, \mathbb{D}_{1/2}, \mathbb{D}_{2/2}$ を Theorem 2.2.1 を参考に以下書き下す.
まず,

$$\begin{aligned}
e_j(x) = \ & V_{ij}(x)\cdot \partial/\partial x_i = \partial/\partial x_j + \frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{i j_1 j j_2}\partial/\partial x_i + \frac{1}{12}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}R_{i j_1 j j_2 j_3}\partial/\partial x_i + O(x^4) \\
\omega(\nabla^g)^k_l(e_j)(x) &= \omega(\nabla^g)^k_l(V_{ij}\cdot \partial/\partial x_i)(x) = V_{ij}(x)\cdot \omega(\nabla^g)^k_l(\partial/\partial x_i)(x) \\
&= \frac{-1}{2}x_{j'_1}R_{klj j'_1} + \frac{-1}{3}x_{j'_1}x_{j'_2}R_{klj j'_1 j'_2} + \frac{-1}{12}x_{j'_1}x_{j_1}x_{j_2}R_{kli j'_1}R_{i j_1 j j_2} + O(x^4)
\end{aligned}$$

である. よって

$$\omega(\nabla^g)^k_l(e_j)(\varepsilon^{1/2}x)=\varepsilon^{1/2}\frac{-1}{2}x_{j_1'}R_{kljj_1'}+\varepsilon^{2/2}\frac{-1}{3}x_{j_1'}x_{j_2'}R_{kljj_1'j_2'}+\varepsilon^{3/2}\frac{-1}{12}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}+O(\varepsilon^{4/2})$$

$$\begin{aligned}e^{(\varepsilon)}_j(x)&=e_j(\varepsilon^{1/2}x)=V_{ij}(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\partial/\partial x_i\\&=\partial/\partial x_j+\varepsilon^{2/2}\frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\partial/\partial x_i+\varepsilon^{3/2}\frac{1}{12}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}R_{ij_1jj_2j_3}\partial/\partial x_i+O(\varepsilon^{4/2})\end{aligned}$$

である. これより

$$\begin{aligned}\nabla^{(\varepsilon)}_{e^{(\varepsilon)}_j(x)}&=e^{(\varepsilon)}_j(x)+\frac{\varepsilon^{-1/2}}{4}\omega(\nabla^g)(e_j)^k_l(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\Big(dx_l\wedge dx_k\wedge-\varepsilon^{2/2}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)+\varepsilon^{4/2}dx_l\vee dx_k\vee\Big)\\&=\varepsilon^{0/2}\Big\{\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}+\varepsilon^{1/2}\Big\{\frac{-1}{12}x_{j_1'}x_{j_2'}R_{kljj_1'j_2'}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}\\&\qquad+\varepsilon^{2/2}\Big\{\frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\partial/\partial x_i+\frac{1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)\\&\qquad\qquad+\frac{-1}{48}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}+O(\varepsilon^{3/2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nabla^{(\varepsilon)}_{e^{(\varepsilon)}_j(x)}\nabla^{(\varepsilon)}_{e^{(\varepsilon)}_j(x)}\\&=\Big\{e^{(\varepsilon)}_j(x)+\frac{\varepsilon^{-1/2}}{4}\omega(\nabla^g)(e_j)^k_l(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\Big(dx_l\wedge dx_k\wedge-\varepsilon^{2/2}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)+\varepsilon^{4/2}dx_l\vee dx_k\vee\Big)\Big\}\circ\\&\quad\Big\{e^{(\varepsilon)}_j(x)+\frac{\varepsilon^{-1/2}}{4}\omega(\nabla^g)(e_j)^{k'}_{l'}(\varepsilon^{1/2}x)\cdot\Big(dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge-\varepsilon^{2/2}(dx_{l'}\wedge dx_{k'}\vee+dx_{l'}\vee dx_{k'}\wedge)+\varepsilon^{4/2}dx_{l'}\vee dx_{k'}\vee\Big)\Big\}\\&=\Big\{\varepsilon^{0/2}\Big\{\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}+\varepsilon^{1/2}\Big\{\frac{-1}{12}x_{j_1'}x_{j_2'}R_{kljj_1'j_2'}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}\\&+\varepsilon^{2/2}\Big\{\frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\partial/\partial x_i+\frac{1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)\\&+\frac{-1}{48}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big\}+O(\varepsilon^{3/2})\Big\}\circ\\&\quad\Big\{\varepsilon^{0/2}\Big\{\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'''}R_{k'l'jj_1'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big\}+\varepsilon^{1/2}\Big\{\frac{-1}{12}x_{j_1'''}x_{j_2'''}R_{k'l'jj_1'''j_2'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big\}\\&+\varepsilon^{2/2}\Big\{\frac{1}{6}x_{j_1''}x_{j_2''}R_{i'j_1''jj_2''}\partial/\partial x_{i'}+\frac{1}{8}x_{j_1'''}R_{k'l'jj_1'''}(dx_{l'}\wedge dx_{k'}\vee+dx_{l'}\vee dx_{k'}\wedge)\\&+\frac{-1}{48}x_{j_1'''}x_{j_1''}x_{j_2''}R_{k'l'i'j_1'''}R_{i'j_1''jj_2''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big\}+O(\varepsilon^{3/2})\Big\}\\&=\varepsilon^{0/2}\Big(\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}dx_l\wedge dx_k\wedge\Big)^2\\&+\varepsilon^{1/2}\Big\{\big(\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}dx_l\wedge dx_k\wedge\big)\circ\big(\frac{-1}{12}x_{j_1'''}x_{j_2'''}R_{k'l'jj_1'''j_2'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\big)\\&+\big(\frac{-1}{12}x_{j_1'}x_{j_2'}R_{kljj_1'j_2'}dx_l\wedge dx_k\wedge\big)\circ\big(\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'''}R_{k'l'jj_1'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\big)\Big\}\\&+\varepsilon^{2/2}\Big\{\big(\frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\partial/\partial x_i+\frac{1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)\\&+\frac{-1}{48}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge\big)\circ\big(\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'''}R_{k'l'jj_1'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\big)\\&+\big(\frac{-1}{12}x_{j_1'}x_{j_2'}R_{kljj_1'j_2'}dx_l\wedge dx_k\wedge\big)\circ\big(\frac{-1}{12}x_{j_1'''}x_{j_2'''}R_{k'l'jj_1'''j_2'''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\big)\\&+\big(\partial/\partial x_j+\frac{-1}{8}x_{j_1'}R_{kljj_1'}dx_l\wedge dx_k\wedge\big)\circ\big(\frac{1}{6}x_{j_1''}x_{j_2''}R_{i'j_1''jj_2''}\partial/\partial x_{i'}+\frac{1}{8}x_{j_1'''}R_{k'l'jj_1'''}(dx_{l'}\wedge dx_{k'}\vee+dx_{l'}\vee dx_{k'}\wedge)\\&+\frac{-1}{48}x_{j_1'''}x_{j_1''}x_{j_2''}R_{k'l'i'j_1'''}R_{i'j_1''jj_2''}dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\big)\Big\}+O(\varepsilon^{3/2})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^{0/2}\Big(\partial/\partial x_j + \frac{-1}{8} x_{j_1'} R_{kljj_1'} dx_l \wedge dx_k \wedge\Big)^2 \\
&+ \varepsilon^{1/2}\Big(\frac{-1}{6} x_{j_1'} x_{j_2'} R_{kljj_1'j_2'} dx_l \wedge dx_k \wedge \partial/\partial x_j + \frac{-1}{12} x_{j_1'} R_{kljj_1'j} dx_l \wedge dx_k \wedge \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{48} x_{j_1'} x_{j_2'} x_{j_1'''} R_{kljj_1'j_2'} R_{k'l'jj_1'''} dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{l'} \wedge dx_{k'} \wedge\Big) \\
&+ \varepsilon^{2/2}\Big(\frac{1}{6} x_{j_2} R_{ijjj_2}\, \partial/\partial x_i + \frac{1}{6} x_{j_1} x_{j_2} R_{ij_1jj_2} (\partial/\partial x_i \partial/\partial x_j + \partial/\partial x_j \partial/\partial x_i) \\
&\quad + \frac{1}{4} x_{j_1'} R_{kljj_1'} (dx_l \wedge dx_k \vee + dx_l \vee dx_k \wedge)\, \partial/\partial x_j + \frac{-1}{48} x_{j_1'} x_{j_2} R_{klij_1'} R_{ijjj_2} dx_l \wedge dx_k \wedge \\
&\quad + \frac{-1}{24} x_{j_1'} x_{j_1} x_{j_2} R_{klij_1'} R_{ij_1jj_2} dx_l \wedge dx_k \wedge \partial/\partial x_j + \frac{1}{16} x_{j_1'} x_{j_1'''} R_{kljj_1'} R_{kl'jj_1'''} dx_l \wedge dx_{l'} \wedge \\
&\quad + \frac{-1}{24} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_1'''} R_{kljj_1'''} R_{ij_1jj_2} dx_l \wedge dx_k \wedge \partial/\partial x_i \\
&\quad + \frac{-1}{16} x_{j_1'} x_{j_1'''} R_{kljj_1'} R_{k'l'jj_1'''} dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{l'} \wedge dx_{k'} \vee \\
&\quad + \frac{1}{192} x_{j_1'} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_1'''} R_{klij_1'} R_{ij_1jj_2} R_{k'l'jj_1'''} dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{l'} \wedge dx_{k'} \wedge \\
&\quad + \frac{1}{144} x_{j_1'} x_{j_2'} x_{j_1'''} x_{j_2'''} R_{kljj_1'j_2'} R_{k'l'jj_1'''j_2'''} dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{l'} \wedge dx_{k'} \wedge\Big) + O(\varepsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} e_j^{(\varepsilon)} &= \varepsilon^{1/2} \omega(\nabla^g)^i_j(e_j)(\varepsilon^{1/2}x) \cdot e_i^{(\varepsilon)}(x) \\
&= \big\{\varepsilon^{2/2} \frac{-1}{2} x_{j_1'} R_{ijjj_1'} + \varepsilon^{3/2} \frac{-1}{3} x_{j_1'} x_{j_2'} R_{ijjj_1'j_2'} + O(\varepsilon^{4/2})\big\} \cdot \\
&\qquad \big\{\partial/\partial x_i + \varepsilon^{2/2} x_{j_1} x_{j_2} \frac{1}{6} R_{ij_1i_1j_2} \partial/\partial x_{i_1} + \varepsilon^{3/2} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \frac{1}{8} R_{i_1j_1ij_2j_3} \partial/\partial x_{i_1} + O(\varepsilon^{4/2})\big\} \\
&= \varepsilon^{2/2} \frac{-1}{2} x_{j_1'} R_{ijjj_1'} \partial/\partial x_i + \varepsilon^{3/2} \frac{-1}{3} x_{j_1'} x_{j_2'} R_{ijjj_1'j_2'} \partial/\partial x_i + O(\varepsilon^{4/2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{(\varepsilon)}_{\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} e_j^{(\varepsilon)}} = \nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} e_j^{(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{4} \omega(\nabla^g)(\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} e_j^{(\varepsilon)})^k_l(\varepsilon^{1/2}x) \cdot dx_l \circ_\varepsilon dx_k \circ_\varepsilon \\
&= \varepsilon^{2/2} \frac{-1}{2} x_{j_1'} R_{ijjj_1'} \partial/\partial x_i + \varepsilon^{3/2} \frac{-1}{3} x_{j_1'} x_{j_2'} R_{ijjj_1'j_2'} \partial/\partial x_i + O(\varepsilon^{4/2}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \omega(\nabla^g)(e_j)^i_j(\varepsilon^{1/2}x) \omega(\nabla^g)(e_i)^k_l(\varepsilon^{1/2}x) \Big(dx_l \wedge dx_k \wedge - \varepsilon^{2/2}(dx_l \wedge dx_k \vee + dx_l \vee dx_k \wedge) + \varepsilon^{4/2} dx_l \vee dx_k \vee\Big) \\
&= \varepsilon^{2/2}\big\{\frac{-1}{2} x_{j_1'} R_{ijjj_1'} \partial/\partial x_i + \frac{1}{16} x_{j_1'} x_{j_1'''} R_{ijjj_1'} R_{klij_1'''} dx_l \wedge dx_k \wedge\big\} + O(\varepsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

である. また

$$
\frac{\varepsilon^{2/2}}{4} s_M(\varepsilon^{1/2}x) = \varepsilon^{2/2} \frac{1}{4} s_M(0) + O(\varepsilon^{3/2}) = \varepsilon^{2/2} \frac{1}{4} R_{ijij} + O(\varepsilon^{3/2})
$$

に注意すると, j についても和をとることにより

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_\varepsilon &= -\sum_j \Big(\nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} \nabla^{(\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} - \nabla^{(\varepsilon)}_{\nabla^{(g,\varepsilon)}_{e_j^{(\varepsilon)}(x)} e_j^{(\varepsilon)}}\Big) + \frac{\varepsilon^{2/2}}{4} s_M(\varepsilon^{1/2}x) \\
&= \varepsilon^{0/2}\Big\{-\Big(\partial/\partial x_j + \frac{-1}{8} x_{j_1'} R_{kljj_1'} dx_l \wedge dx_k \wedge\Big)^2\Big\} \\
&\quad + \varepsilon^{1/2}\Big\{\frac{1}{6} x_{j_1'} x_{j_2'} R_{kljj_1'j_2'} dx_l \wedge dx_k \wedge \partial/\partial x_j + \frac{1}{12} x_{j_1'} R_{kljj_1'j} dx_l \wedge dx_k \wedge \\
&\qquad\qquad + \frac{-1}{48} x_{j_1'} x_{j_2'} x_{j_1'''} R_{kljj_1'j_2'} R_{k'l'jj_1'''} dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{l'} \wedge dx_{k'} \wedge\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon^{2/2}\Big\{\frac{-1}{3}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\partial/\partial x_i\partial/\partial x_j+\frac{-2}{3}x_{j_2}R_{ijjj_2}\,\partial/\partial x_i\\
&\quad+\frac{-1}{4}x_{j_1'}R_{kljj_1'}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)\,\partial/\partial x_j+\frac{1}{12}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge\partial/\partial x_j\\
&\quad+\frac{1}{12}x_{j_1'}x_{j_2}R_{klij_1'}R_{ijjj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge+\frac{-1}{16}x_{j_1'}x_{j_1'''}R_{kljj_1'}R_{kl'jj_1'''}dx_l\wedge dx_{l'}\wedge\\
&\quad+\frac{1}{16}x_{j_1'}x_{j_1'''}R_{kljj_1'}R_{k'l'jj_1'''}dx_l\wedge dx_k\wedge dx_{l'}\wedge dx_{k'}\vee\\
&\quad+\frac{-1}{192}x_{j_1'}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_1'''}R_{klij_1'}R_{ij_1jj_2}R_{k'l'jj_1'''}dx_l\wedge dx_k\wedge dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge\\
&\quad+\frac{-1}{144}x_{j_1'}x_{j_2'}x_{j_1'''}x_{j_2'''}R_{kljj_1'j_2'}R_{k'l'jj_1'''j_2'''}dx_l\wedge dx_k\wedge dx_{l'}\wedge dx_{k'}\wedge+\frac{1}{4}R_{ijij}\Big\}+O(\varepsilon^{3/2})
\end{aligned}
$$

である. 以上より

$$
\mathbb{D}_{0/2}=-\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{4}\sum_i x_iR_{ji}\wedge\right)^2=-\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2+\frac{1}{16}\left\langle x\middle|R^2\middle|x\right\rangle
$$

ここで $R_{ji}:=\frac{1}{2}\sum_{l,k}R_{jilk}dx_l\wedge dx_k$ とおいている. (Theorem 1.5.2 と同様)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{1/2}&=\frac{1}{6}x_{j_1}x_{j_2}R_{kljj_1j_2}dx_l\wedge dx_k\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{12}x_{j_1}R_{kljj_1j}dx_l\wedge dx_k\wedge\\
&\qquad+\frac{-1}{48}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}R_{k_1l_1jj_1j_2}R_{k_2l_2jj_3}dx_{l_1}\wedge dx_{k_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{k_2}\wedge\\
\mathbb{D}_{2/2}&=\frac{-1}{3}x_{j_1}x_{j_2}R_{ij_1jj_2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{-2}{3}x_{j_1}R_{ijjj_1}\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&\quad+\frac{-1}{4}x_{j_1}R_{kljj_1}(dx_l\wedge dx_k\vee+dx_l\vee dx_k\wedge)\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{12}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}R_{klij_1}R_{ij_2jj_3}dx_l\wedge dx_k\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&\quad+\frac{1}{12}x_{j_1}x_{j_2}R_{klij_1}R_{ijjj_2}dx_l\wedge dx_k\wedge+\frac{-1}{16}x_{j_1}x_{j_2}R_{kl_1jj_1}R_{kl_2jj_2}dx_{l_1}\wedge dx_{l_2}\wedge\\
&\quad+\frac{1}{16}x_{j_1}x_{j_2}R_{k_1l_1jj_1}R_{k_2l_1jj_2}dx_{l_1}\wedge dx_{k_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{k_2}\vee\\
&\quad+\frac{-1}{192}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}R_{k_1l_1ij_1}R_{ij_2jj_3}R_{k_2l_2jj_4}dx_{l_1}\wedge dx_{k_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{k_2}\wedge\\
&\quad+\frac{-1}{144}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}R_{k_1l_1jj_1j_2}R_{k_2l_2jj_3j_4}dx_{l_1}\wedge dx_{k_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{k_2}\wedge+\frac{1}{4}R_{ijij}
\end{aligned}
$$

である. $i\geqq 1$ については有限和表示

$$
\mathbb{D}_{i/2}=\sum_{|\mathbb{C}|\geqq|\mathbb{B}|}^{|\mathbb{B}|\leqq 2}\mathbb{D}_{i/2}(\mathbb{C},\mathbb{B})x^{\mathbb{C}}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}
$$

がある. ただし, $\mathbb{D}_{i/2}(\mathbb{C},\mathbb{B})$ は作用素 $dx\wedge,\ dx\vee$ 達の多項式 (係数は P^0に依存する定数) である.

また, 偶数奇数に分けて考えると次の有限和表示がある.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{2i/2}=\Big\{\sum_{|\mathbb{C}|=even}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{2i/2,\mathbb{C},i_1,i_2}(R(P^0))\partial/\partial x_{i_1}\partial/\partial x_{i_2}+\sum_{|\mathbb{C}|=odd}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{2i/2,\mathbb{C},i_1}(R(P^0))\partial/\partial x_{i_1}\\
+\sum_{|\mathbb{C}|=even}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{2i/2,\mathbb{C}}(R(P^0))\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{(2i+1)/2}=\Big\{\sum_{|\mathbb{C}|=odd}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{(2i+1)/2,\mathbb{C},i_1,i_2}(R(P^0))\partial/\partial x_{i_1}\partial/\partial x_{i_2}+\sum_{|\mathbb{C}|=even}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{(2i+1)/2,\mathbb{C},i_1}(R(P^0))\partial/\partial x_{i_1}\\
+\sum_{|\mathbb{C}|=odd}x^{\mathbb{C}}\cdot f_{(2i+1)/2,\mathbb{C}}(R(P^0))\Big\}
\end{aligned}
$$

ここで $f_{i/2,\mathbb{C},i_1,i_2}(R(P^0))$ は同様に作用素 $dx\wedge,\ dx\vee$ 達の多項式 (係数は P^0に依存する定数) である.

3.2 Main Theorem

さて, $i \geqq 1$ に対して具体的に$\Psi_{i/2} = \gamma_{i/2}$はどのように計算したら求まるかを考える. 一意性は言えているので条件 $(\star)$ を満たすような$\Psi_{i/2}$を構成したい. そのためにまず$\Psi_{i/2}$を $E^m = \mathbb{R}^m$with standard metric g^E にまで原点を含むコンパクト集合上以外では 0 になるよう拡張させる. さらに $(q_\bullet \gamma_{0/2})(t,x,y) := q_t(x-y)\gamma_{0/2}(t, x-y)$ とおき, convolution を考える.

Definiton 3.2.1

$\mathbf{k}_i(t,x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}\times E^m \times E^m, \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)))$, $k_i(t,x,y) := q_t(x-y)\mathbf{k}_i(t,x,y) \quad (i = 1,\ 2)$ に対し

$$(k_1 \# k_2)(t,x,y) := \int_0^t ds \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\, k_1(t-s,x,x')k_2(s,x',y)$$

と定義する.

すると次が言える

Lemma 3.2.2 $\mathbf{k}(t,x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}\times E^m \times E^m, \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)))$, $k(t,x,y) = q_t(x-y)\mathbf{k}(t,x,y)$ に対し

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2,x}\Big)(q_t\gamma_{0/2}\# k)(t,x,y) = k(t,x,y)$$

である.

Proof. 定義通り計算する.

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2,x}\Big)(q_t\gamma_{0/2}\# k)(t,x,y)\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2,x}\Big)\int_0^t ds \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\, q_{t-s}(x-x')\gamma_{0/2}(t-s,x,x')k(s,x',y)\\
&= \lim_{s\to t}\int_{E^m} dV_{g^E}(x')\, q_{t-s}(x-x')\gamma_{0/2}(t-s,x,x')k(s,x',y)\\
&\quad + \int_0^t ds \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2,x}\Big)q_{t-s}(x-x')\gamma_{0/2}(t-s,x,x')k(s,x',y)\\
&= \lim_{s\to t}\int_{E^m} dV_{g^E}(x')\, q_{t-s}(x-x')\gamma_{0/2}(t-s,x,x')k(s,x',y)\\
&= \gamma_{0/2}(0,0)k(t,x,y) = k(t,x,y)
\end{aligned}$$

である. よって言えた.

■

そこで $q_t\Psi_{i/2}$を $(\star)$ の言い換えに注意して次のように定義する

$$(\dagger)\begin{cases}
q_t(x-y)\Psi_{0/2}(t,x,y) := q_t(x-y)\gamma_{0/2}(t,x-y)\\
q_t(x-y)\Psi_{i/2}(t,x,y) := -\Big(q_t\Psi_{0/2}\# \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1/2}(q_t\Psi_{i_2})\Big)(t,x,y)\\
= \sum_{\sum i_l = i}^{i_1,\cdots,i_k>0}(-1)^k\Big(q_t\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{i_1/2}(q_t\gamma_{0/2})\#\cdots\#\mathbb{D}_{i_k/2}(q_t\gamma_{0/2})\Big)(t,x,y) \quad (i>0)
\end{cases}$$

するとこのように定義された$\Psi_{i/2}(t,x,0)$ 達は条件 $(\star)$ を満たす. しかし値を取るかは調べなければならない. つまり convolution の well-defined 性をチェックしなければならない. そのために補題を用意する.

Lemma 3.2.3 任意の multi index $\mathbb{C}$ に対して，有限和表示

$$x^{\mathbb{C}}q_t=\sum_{1\leqq l\leqq|\mathbb{C}|}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C},l,\mathbb{B}}$$

がある．ここで $f_{\mathbb{C},l,\mathbb{B}}$は定数である．

Proof. 帰納法で示す．$|\mathbb{C}|=0$のときは明らかに成り立つ．次に$|\mathbb{C}|\geqq 1$とし，任意のmulti index $\mathbb{C}'$ with$|\mathbb{C}'|\leqq|\mathbb{C}|$ に対して有限和表示

$$x^{\mathbb{C}'}q_t=\sum_{1\leqq l\leqq|\mathbb{C}'|}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C}',l,\mathbb{B}}$$

が得られたとする．$x^{\mathbb{C}}q_t=\displaystyle\sum_{1\leqq l\leqq|\mathbb{C}|}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C},l,\mathbb{B}}$の両辺に$\partial/\partial x_k$を作用させることにより，帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})=(\partial/\partial x_k)(x^{\mathbb{C}}q_t)&=\sum_{i=1}^{|\mathbb{C}|}\delta_{j_i,k}x_{j_1}\cdots\widehat{x_{j_i}}\cdots x_{j_{|\mathbb{C}|}}q_t+x^{\mathbb{C}}(\partial/\partial x_k)(q_t)\\
&=\sum_{i=1}^{|\mathbb{C}|}\delta_{j_i,k}\sum_{1\leqq l\leqq|\mathbb{C}|-1}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C}',l,\mathbb{B}}-\frac{1}{2t}x^{\mathbb{C}}x_kq_t\\
(\text{右辺})=(\partial/\partial x_k)\Bigg(\sum_{1\leqq l\leqq\mathbb{C}}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C},l,\mathbb{B}}\Bigg)&=\sum_{1\leqq l\leqq|\mathbb{C}|}^{|\mathbb{B}|\leqq l}t^l(\partial/\partial x_k)\big(\partial/\partial x\big)^{\mathbb{B}}(q_t)\cdot f_{\mathbb{C},l,\mathbb{B}}
\end{aligned}$$

を得る．よって $x^{\mathbb{C}}x_kq_t$について解けば題意を得る．

■

Remark 3.2.4
(1) 具体的には次のように書ける．

$$\begin{aligned}
&x_jq_t=t\frac{\partial q_t}{\partial x_j}\cdot(-2)\\
&x_{j_1}x_{j_2}q_t=tq_t\cdot 2\delta_{j_1j_2}+t^2\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}\cdot 4\\
&x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}q_t=t^2\Big(\frac{\partial q_t}{\partial x_{j_1}}\cdot(-4\delta_{j_2j_3})+\frac{\partial q_t}{\partial x_{j_2}}\cdot(-4\delta_{j_3j_1})+\frac{\partial q_t}{\partial x_{j_3}}\cdot(-4\delta_{j_1j_2})\Big)+t^3\frac{\partial^3 q_t}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\partial x_{j_3}}\cdot(-8)\\
&x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}q_t=t^2q_t\cdot\Big(4\delta_{j_1j_4}\delta_{j_2j_3}+4\delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}+4\delta_{j_1j_3}\delta_{j_4j_2}\Big)\\
&+t^3\Big(\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_1}x_{j_4}}\cdot 8\delta_{j_2j_3}+\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_1}x_{j_2}}\cdot 8\delta_{j_3j_4}+\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_1}x_{j_3}}\cdot 8\delta_{j_4j_2}+\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_2}\partial x_{j_3}}\cdot 8\delta_{j_1j_4}+\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_3}\partial x_{j_4}}\cdot 8\delta_{j_1j_2}\\
&+\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_4}\partial x_{j_2}}\cdot 8\delta_{j_1j_3}\Big)+t^4\frac{\partial^4 q_t}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\partial x_{j_3}\partial x_{j_4}}\cdot 16
\end{aligned}$$

(2) 帰納的に次が言える

$|\mathbb{C}|$ が奇数 $\Rightarrow x^{\mathbb{C}}q_t(x)$ には奇数階の微分項のみが現れる．

$|\mathbb{C}|$ が偶数 $\Rightarrow x^{\mathbb{C}}q_t(x)$ には偶数階の微分項のみが現れる．

(3)$\mathbb{D}_{i/2}$の有限和表示，$\gamma_{0/2}(t,x) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l/2} x^\alpha \gamma_{0/2,2l/2,\alpha}$ 及び Lemma 3.1.9 により $q_t\gamma_{0/2}$と $\mathbb{D}_{i/2}(q_t\gamma_{0/2})$ は

$$\sum_{0\leqq l}^{|\mathbb{B}|\leqq l} t^l (\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x)) \cdot f(R(P^0))$$

という形で表せる．ここで $f(R(P^0))$ は $R(P^0)$，$dx(P^0)\wedge$，$dx(P^0)\vee$ による多項式である．

これより convolution の well-defined 性が言える．

Proposition 3.2.5 任意の multi index $\mathbb{I} = (i_1, \cdots, i_{|\mathbb{I}|})$ with $i_1, \cdots, i_{|\mathbb{I}|} > 0$ に対して，有限和表示

$$\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0) = \sum_{1\leqq l}^{|\mathbb{B}|\leqq l} t^l (\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x)) \cdot f_{\mathbb{I},l,\mathbb{B}}(R(P^0))$$

がある．ここで $f_{\mathbb{I},l,\mathbb{C}}(R(P^0))$ は $R(P^0)$，$dx(P^0)\wedge$，$dx(P^0)\vee$ による多項式である．

Proof. 帰納法で示す．$|\mathbb{I}| = 1$ のとき，Remark 3.1.10 より

$$q_t(x)\gamma_{0/2}(t,x,0) = \sum_{0\leqq l_0}^{|\mathbb{B}_0|\leqq l_0} t^{l_0}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}_0}(q_t(x)) \cdot f_0(R(P^0))$$

$$\mathbb{D}_{i/2}(q_t\gamma_{0/2}))(t,x,0) = \sum_{0\leqq l_1}^{|\mathbb{B}_1|\leqq l_1} t^{l_1}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}_1}(q_t(x)) \cdot f_1(R(P^0))$$

とする．すると

$$\begin{aligned}
&((q_t\gamma_{0/2})\#\mathbb{D}_{i/2}(q_t\gamma_{0/2}))(t,x,0)\\
&= \sum \int_0^t ds \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\,(t-s)^{l_0}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}_0}(q_{(t-s)}(x-x'))s^{l_1}(\partial/\partial x')^{\mathbb{B}_1}(q_s(x')) \cdot f_0(R(P^0)) \wedge f_1(R(P^0))\\
&= \sum t^l \int_0^t ds\, s^{l_1+l_0-l} \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\,(\partial/\partial x')^{\mathbb{B}}(q_{(t-s)}(x-x'))q_s(x') \cdot f_2(R(P^0))\\
&= \sum t^l \int_0^t ds\, s^{l_1+l_0-l} \int_{E^m} dV_{g^E}(x')\,(-\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_{(t-s)}(x-x'))q_s(x') \cdot f_2(R(P^0))\\
&= \sum t^l \int_0^t ds\, s^{l_1+l_0-l}(-\partial/\partial x)^{\mathbb{B}} \int_{E^m} dV_{g^E}(x')q_{(t-s)}(x-x')q_s(x') \cdot f_2(R(P^0))\\
&= \sum t^l \int_0^t ds\, s^{l_1+l_0-l}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}} \int_{E^m} dV_{g^E}(x')q_{(t-s)}(x-x')q_s(x') \cdot f_3(R(P^0))\\
&= \sum t^l \Big(\int_0^t ds\, s^{l_1+l_0-l}\Big)(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x)) \cdot f_3(R(P^0))
\end{aligned}$$

である．そして $l_0 \geqq l$ より $l_1+l_0-l \geqq 0$ であるから，s に関して積分ができる．つまり convolution は well-defined である．故に

$$((q_t\gamma_{0/2})\#\mathbb{D}_{i/2}(q_t\gamma_{0/2}))(t,x,0) = \sum t^{l_0+l_1+1}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x)) \cdot \frac{1}{l_1+l_0-l+1} f_3(R(P^0))$$

である．さらに $|\mathbb{B}_0| \leqq l_0$，$|\mathbb{B}_1| \leqq l_1$ より $|\mathbb{B}| \leqq l_0 + l_1$ である．よって $|\mathbb{I}| = 1$ のときは言えた．

次に $|\mathbb{I}| \geqq 2$ とし，有限和表示

$$\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0) = \sum_{1\leqq l}^{|\mathbb{B}|\leqq l} t^l (\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x)) \cdot f_{\mathbb{I},l,\mathbb{B}}(R(P^0))$$

があると仮定する．すると，$\mathbb{D}_{i/2}(q_t\gamma_{0/2})(t,x,0)=\sum_{0\leqq l}^{|\mathbb{B}|\leqq l} t^l(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x))\cdot f_{i,l,\mathbb{B}}(R(P^0))\,(i>0)$ に対して，同様の議論により

$$
\begin{aligned}
&\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#(\mathbb{D}_{i/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0)\\
&=\bigg(\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)\#\Big(\mathbb{D}_{i/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\Big)\bigg)(t,x,0)\\
&=\int_0^t ds\int_{E^m} dV_{g^E}(x')\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t-s,x-x')\Big(\mathbb{D}_{i/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\Big)(s,x')\\
&=\sum\int_0^t ds\int_{E^m} dV_{g^E}(x')(t-s)^{l_1}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}_1}(q_{(t-s)}(x-x'))\cdot f_{\mathbb{I},l,\mathbb{B}_1}(R(P^0))s^{l_2}(\partial/\partial x')^{\mathbb{B}_2}(q_s(x'))\cdot f_{i,l,\mathbb{B}_2}(R(P^0))\\
&=\sum t^l\int_0^t ds\, s^{l_1+l_2-l}\int_{E^m} dV_{g^E}(x')(\partial/\partial x')^{\mathbb{B}}(q_{(t-s)}(x-x'))q_s(x')\cdot f_1(R(P^0))\\
&=\sum t^l\int_0^t ds\, s^{l_1+l_2-l}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}\int_{E^m} dV_{g^E}(x')q_{(t-s)}(x-x')q_s(x')\cdot f_2(R(P^0))\\
&=\sum t^l\Big(\int_0^t ds\, s^{l_1+l_2-l}\Big)(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x))\cdot f_2(R(P^0))\\
&=\sum t^{l_1+l_2+1}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x))\cdot\frac{1}{l_1+l_2-l+1}f_2(R(P^0))\quad(|\mathbb{B}|\leqq l_1+l_2)
\end{aligned}
$$

である．以上より言えた．

■

Remark 3.2.6 Proposition 3.1.11 より

$$
\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0)=\sum t^{l_1+l_2+1}(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x))\cdot\frac{1}{l_1+l_2-l+1}f_2(R(P^0))
$$

である．$(\partial/\partial x)^{\mathbb{B}}(q_t(x))$ からは t に関して最小で $t^{-|\mathbb{B}|}$の負冪が出てくるが，$|\mathbb{B}_0|\leqq l_0$，$|\mathbb{B}_1|\leqq l_1$より $|\mathbb{B}|\leqq l_0+l_1$である．よって

$$
\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_{|\mathbb{I}|}/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0)=q_t(x)\sum_{1\leqq l}t^l x^{\mathbb{C}}\cdot f_{\mathbb{I},l,\mathbb{C}}(R(P^0))
$$

と表せる．つまり，(†) で定義された$\Psi_{i/2}(t,x,0)$ 達は well-definedであり，$i>0$ ならば$\Psi_{i/2}(t,x,0)$ は t に関して正の order のみが現れる多項式である．

$\Psi_{i/2}(t,x,0)$ 達の well-defined 性が言えたので次の計算は意味を持つ．

Proposition 3.2.7 (†) で定義された$\Psi_{i/2}(t,x,0)$ 達は ($\star$) を満たす．

Proof. $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2,x}\Big)q_t\Psi_{0/2}(t,x,0)=0$，$\Psi_{0/2}(0,0,0)=\Psi_{0/2}(0,0)=0$ は成り立つ．$i>0$ に対しては Lemma 3.1.8 より

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{D}_{0/2,x}\Big)(q_t\Psi_{i/2})(t,x,0)+\sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2})(t,x,0)\\
&=-\sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2})(t,x,0)+\sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i}\mathbb{D}_{i_1}(q_t\Psi_{i_2})(t,x,0)=0
\end{aligned}
$$

である. さらに$\Psi_{i/2}$には t の正の冪のみ現れる. よって t に関して 0 次の係数については$\Psi_{i/2,0/2}(0) = 0$ である. よって言えた.

■

以上をまとめる.

Theorem 3.2.8 Theorem 2.3.2 で得られた$\gamma_{i/2}$は次で与えられる

$$q_t(x)\gamma_{0/2}(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \det{}^{1/2}\Big(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{4t}\Big\langle x\Big|\frac{tR(P^0)}{2}\coth(\frac{tR(P^0)}{2})\Big|x\Big\rangle\Big)$$

$$\begin{aligned} q_t(x)\gamma_{i/2}(t,x) &= -\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\# \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i} \mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{i_2/2})\Big)(t,x,0) \\ &= \sum_{\sum i_l = i}^{i_1,\cdots,i_k>0} (-1)^k \Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_k/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)(t,x,0) \quad (i>0) \end{aligned}$$

以上より, Main theorem を述べる.

Theorem 3.2.9 (Main Theorem, [9]) $l > p/2$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} K_{\ell,[p]}(P^0) = (4\pi)^{m/2} &\sum_{\sum i_j = 2\ell-p}^{i_1,\ldots,i_k>0} (-1)^k \\ &\times \big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\cdots\#\,\mathbb{D}_{i_k/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[p]}(1,0,0), \end{aligned}$$

$K_{\ell,[p]}(P^0)$ はこの公式により, 初等的な微積分の知識のみを用いてどこまでも計算することができる.

Proof.

$$\begin{aligned} K_{\ell,[p]}(P^0) = \gamma_{\ell-p/2,[p]}(1,0) &= -\frac{1}{q_1(0)}\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#\sum_{i_1+i_2=2\ell-p}^{i_2<2\ell-p}\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{i_2/2})\Big)_{[p]}(1,0,0), \\ &= (4\pi)^{m/2}\sum_{\sum i_j=2\ell-p}^{i_1,\cdots,i_k>0}(-1)^k\Big((q_\bullet\gamma_{0/2})\#(\mathbb{D}_{i_1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\#\cdots\#(\mathbb{D}_{i_k/2}(q_\bullet\gamma_{0/2}))\Big)_{[p]}(1,0,0). \end{aligned}$$

■

4 Some computations

4.1 $K_0(P^0)$, $K_1(P^0)$, $K_2(P^0)$

Main Theorem を使った熱核の漸近展開係数の計算を紹介する.

Corollary 4.1.1 ([9])

$$K_0(P^0) = 1, \tag{3}$$

$$K_1(P^0) = -\frac{\sum R_{jiji}}{12} = -\frac{s_M(P^0)}{12}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} K_2(P^0) = \det{}^{1/2}\Big(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\Big)_{[4]} &- \frac{5\sum R_{jijikk}}{24} - \frac{\sum R_{jijkik}}{3} \\ &+ \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432} + \frac{\sum R_{jkik}R_{jk'ik'}}{12} + \frac{2\sum R_{jkik'}\big(R_{jkik'} + R_{jk'ik}\big)}{27}. \end{aligned} \tag{5}$$

Proof. (3) $K_0(P^0) = K_{0,[0]}(P^0) = \gamma_{0/2,[0]}(1,0) = \det^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right)_{[0]} = 1$ である,
(4) $K_{1,[2]}(P^0) = \gamma_{0/2,[2]}(1,0) = \det^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right)_{[2]} = 0$ に注意すると,

$$K_1(P^0) = K_{1,[0]}(P^0) + K_{1,[1]}(P^0),$$

である. そして, Theorem 3.2.9 より,

$$K_{1,[0]}(P^0) = -(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0) + (4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0)$$
$$K_{1,[1]}(P^0) = -(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[1]}(1,0,0)$$

である. また, §§3.1 より次が言える.

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{1/2} = &-\sum\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1\ell kj_2}}{12}dx_\ell\wedge dx_k\wedge,\ \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum x_{j_1'}\frac{R_{jj_1'\ell'k'}}{8}dx_{\ell'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big]_+,\\
\mathbb{D}_{2/2} = &-\sum\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1\ell kj_2}}{12}dx_\ell\wedge dx_k\wedge,\ \sum x_{j_1'}x_{j_2'}\frac{R_{jj_1'\ell'k'j_2'}}{12}dx_{\ell'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big]_+\\
&-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1ij_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum x_{j_1}\frac{-R_{jj_1\ell k}}{4}dx_\ell\wedge dx_k\vee\\
&+\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kj_2j_3}}{32} + \sum\frac{R_{jj_1ij_2}R_{ij_3\ell k}}{48}\\
&+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ij_2kj_3}}{48}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge,\ \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum x_{j_1'}\frac{R_{jj_1'\ell'k'}}{8}dx_{\ell'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big]_+\\
&+\sum x_{j_1'}\frac{R_{jij_1'i}}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum x_{j_1}\frac{R_{jj_1\ell k}}{8}dx_\ell\wedge dx_k\wedge\Big) + \sum\frac{R_{jiji}}{4},
\end{aligned}$$

ここで, $[P,Q]_+ = P\cdot Q + Q\cdot P$ とおいている. すると, $\mathbb{D}_{1/2}$ に現れる微分形式の degree に注意すると

$$\begin{aligned}
&(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[1]}(1,0,0) = 0,\\
&(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0) = 0,
\end{aligned}$$

である. したがって, $x_{j_1}x_{j_2}q_t = 2t\delta_{j_1j_2}q_t + (2t)^2\frac{\partial^2 q_t}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}q_t$ に注意すると

$$\begin{aligned}
K_1(P^0) &= K_{1,[0]}(P^0) + K_{1,[1]}(P^0)\\
&= -(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= -(4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\#\Big(-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1ij_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big]_+ + \sum x_{j_1'}\frac{R_{jij_1'i}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= -(4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\#\Big(-\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1ij_2}}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum x_{j_2}\frac{2R_{jij_2i}}{3}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= -(4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\#\Big(\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1jj_2}}{6t} - \sum x_jx_{j_2}\frac{2R_{jij_2i}}{6t} + \sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= (4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\#\Big(\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1jj_2}}{6t} - \sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= (4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\#\Big(t\sum\frac{2R_{jj_1jj_2}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}} + \frac{\sum R_{jiji}}{12}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0),\\
&= (4\pi)^{m/2}\sum\frac{2R_{jj_1jj_2}}{3}\int_0^1 ds\, s\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\Big)q_1(x)\Big|_{x=0} + (4\pi)^{m/2}\sum\frac{R_{jiji}}{12}q_1(0),
\end{aligned}$$

$$= (4\pi)^{m/2}\sum\frac{2R_{jj_1jj_2}}{3}\frac{1}{2}\cdot\frac{-\delta_{j_1j_2}}{2}q_1(0)+(4\pi)^{m/2}\sum\frac{R_{jiji}}{12}q_1(0),$$
$$= -\sum\frac{R_{jiji}}{6}+\sum\frac{R_{jiji}}{12},$$
$$= -\frac{\sum R_{jiji}}{12},$$

よって (4) が言えた.

(5) $K_2(P^0)=K_{2,[0]}(P^0)+K_{2,[1]}(P^0)+K_{2,[2]}(P^0)+K_{2,[3]}(P^0)+K_{2,[4]}(P^0)$ である. まず,

$$K_{2,[4]}(P^0)=\gamma_{0/2,[4]}(1,0)=\det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right)_{[4]}$$

である. 次に $\mathbb{D}_{1/2}$ と form の degree を考慮すると,

$$K_{2,[3]}(P^0)=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[3]}(1,0,0)=0$$
$$\begin{aligned}K_{2,[1]}(P^0)&=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[1]}(1,0,0)\\&\quad+(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[1]}(1,0,0)\\&\quad+(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[1]}(1,0,0)=0\end{aligned}$$

である. 次に $K_{2,[2]}(P^0)$ を考える. 同様に $\mathbb{D}_{1/2}$ と form の degree を考慮すると,

$$\begin{aligned}K_{2,[2]}(P^0)&=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{1/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[2]}(1,0,0)-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[2]}(1,0,0)\\
&=-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[2]}(1,0,0)\\
&=-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\Big(-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1ij_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i},\ \sum x_{j_1'}\frac{R_{jj_1'\ell'k'}}{8}dx_{\ell'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big]_+\\
&\quad-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}\frac{-R_{jj_1\ell k}}{4}dx_\ell\wedge dx_k\vee,\ \sum x_{j_1'}\frac{R_{jj_1'\ell'k'}}{8}dx_{\ell'}\wedge dx_{k'}\wedge\Big]_+\\
&\quad-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kj_2j_3}}{32}+\sum\frac{R_{jj_1ij_2}R_{ij_3\ell k}}{48}+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ij_2kj_3}}{48}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big]_+\\
&\quad+\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jij_1i}}{2}\frac{R_{jj_2\ell k}}{8}dx_\ell\wedge dx_k\wedge\Big)(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[2]}(1,0,0)\\
&=-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\Big(-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\frac{R_{jj_1ij_2}R_{jj_3\ell k}}{24}dx_\ell\wedge dx_k\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&\quad-\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{jj_1ij_2}R_{ji\ell k}}{48}dx_\ell\wedge dx_k\wedge\\
&\quad-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kj_2j_3}}{16}+\sum\frac{R_{ij_2jj_3}R_{ij_1\ell k}}{24}+\sum\frac{-R_{ij_2\ell j_3}R_{jj_1ki}}{48}\\
&\quad+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ij_2kj_3}}{48}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&\quad-\sum x_{j_1}x_{j_2}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kjj_2}}{16}+\sum\frac{R_{ij_1jj_2}R_{ij_1\ell k}}{48}+\sum\frac{R_{ij_2\ell jk}R_{jjj_1}}{48}\\
&\quad+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ijkj_2}}{48}+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ij_2kj}}{48}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\\
&\quad-\sum x_{j_1j_2}\frac{R_{jiij_1}R_{ij_2\ell k}}{16}dx_\ell\wedge dx_k\wedge\Big)q_\bullet\gamma_{0/2}\big)_{[2]}(1,0,0)\\
&=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\#\Big\{\sum x_{j_1}x_{j_2}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kjj_2}}{16}+\sum\frac{R_{jiij_1}R_{ij_2\ell k}}{12}+\sum\frac{-R_{ij_1\ell i}R_{jj_2ki}}{48}\\
&\quad+\sum\frac{R_{jj_1\ell i}R_{ij_2kj}}{24}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\Big\}q_\bullet\big)_{[2]}(1,0,0)\\
&=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\#\Big\{\sum x_{j_1}x_{j_2}\Big(\frac{R_{jj_1\ell kjj_2}}{16}+\sum\frac{R_{jiij_1}R_{ij_2\ell k}}{12}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\Big\}q_\bullet\big)_{[2]}(1,0,0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (4\pi)^{m/2}\sum\Big(\sum \frac{R_{jj_1\ell kjj_2}}{16}+\sum\frac{R_{jiij_1}R_{ij_2\ell k}}{12}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\int_0^1 ds\Big((2s)^2\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}q_1(x)+2s\delta_{j_1j_2}q_t(x)\Big)\Big|_{x=0}\\
&=\sum\Big(\sum \frac{R_{jj_1\ell kjj_2}}{16}+\sum\frac{R_{jiij_1}R_{ij_2\ell k}}{12}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\int_0^1 ds\Big((2s)^2\frac{-\delta_{j_1j_2}}{2}+2s\delta_{j_1j_2}\Big)\\
&=\sum\Big(\sum \frac{R_{ji\ell kji}}{48}+\sum\frac{-R_{j_2jj_2i}R_{ji\ell k}}{36}\Big)dx_\ell\wedge dx_k\wedge=0
\end{aligned}
$$

である. 次に $K_{2,[0]}(P^0)$ を考える. 同様に $\mathbb{D}_{1/2}$ と form の degree を考慮すると,

$$
\begin{aligned}
K_{2,[0]}(P^0)&=(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0)\\
&\qquad\qquad -(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{4/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0),
\end{aligned}
$$

である. まず, $(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0)$ から計算する.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{D}_{2/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\big)_{[0]},\\
&=\Big(-\sum_j\Big[\sum x_{j_1}x_{j_2}\frac{R_{ij_1jj_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]_+ +\sum x_{j_1}\frac{-R_{jiij_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_t,\\
&=\Big(-\sum_j\Big[\sum \frac{R_{ij_1jj_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot x_{j_1}x_{j_2},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]_+ +\sum_j\Big[\sum\frac{R_{ij_1ji}}{6}x_{j_1},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]_+\\
&+\sum\frac{-R_{jiij_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_{j_1}-\sum\frac{-R_{jiij}}{2}+\sum\frac{R_{jiji}}{4}\Big)q_t,\\
&=\Big(-\sum\frac{R_{ij_1jj_2}}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_{j_1}x_{j_2}+\sum\frac{R_{ijjj_2}}{6}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot x_{j_2}\\
&+\sum\frac{R_{ij_1ji}}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_{j_1}-\frac{R_{ijji}}{6}+\sum\frac{-R_{jiij_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_{j_1}+\sum\frac{-R_{jiji}}{4}\Big)q_t\\
&=\Big(-\sum\frac{R_{ij_1jj_2}}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_{j_1}x_{j_2}-\sum\frac{R_{jiji}}{12}\Big)q_t\\
&=\Big(-2t\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}-\sum\frac{R_{jiji}}{12}\Big)q_t
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\#\,\mathbb{D}_{2/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0),\\
&=\int_0^1ds_1\int_0^{s_1}ds_2\Big(2(s_1-s_2)\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+\frac{\sum R_{jiji}}{12}\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\Big(2s_2\sum\frac{R_{j_3i'j_4i'}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}}+\frac{\sum R_{jiji}}{12}\Big)q_1(x)\Big|_{x=0},\\
&=\int_0^1ds_1\int_0^{s_1}ds_2\Big\{4(s_1-s_2)s_2\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{R_{j_3i'j_4i'}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+2s_1\frac{\sum R_{j'i'j'i'}}{12}\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+\big(\frac{\sum R_{jiji}}{12}\big)^2\Big\}q_1(x)\Big|_{x=0},\\
&=\Big\{\frac{1}{6}\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{R_{j_3i'j_4i'}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{2}{3}\frac{\sum R_{j'i'j'i'}}{12}\sum\frac{R_{j_1ij_2i}}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+\big(\frac{\sum R_{jiji}}{12}\big)^2\Big\}q_1(x)\Big|_{x=0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \frac{R_{j_1 i j_2 i}}{3}\frac{R_{j_3 i' j_4 i'}}{3}\frac{1}{4}(\delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}+\delta_{j_1j_3}\delta_{j_2j_4}+\delta_{j_1j_4}\delta_{j_2j_3}) + \frac{\sum R_{j'i'j'i'}}{54}\sum R_{j_1ij_2i}\frac{-\delta_{j_1j_2}}{2} + \Big(\frac{\sum R_{jiji}}{12}\Big)^2 \\
&= \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{216} + 2\sum\frac{R_{j_1ij_2i}R_{j_1i'j_2i'}}{216} - \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{108} + \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{144} \\
&= \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432} + \sum\frac{R_{j_1j_3j_2j_3}R_{j_1j_4j_2j_4}}{108},
\end{aligned}
$$

である. 次に $-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{4/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0)$ を計算する. $\mathbb{D}_{1/2}$, $\mathbb{D}_{2/2}$ と同様に $\mathbb{D}_{4/2}$ を計算すると, 次式を得る.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{4/2} = &-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{R_{i_1j_1i_2j_2j_3j_4}}{20}+\frac{R_{jj_1i_1j_2}R_{jj_3i_2j_4}}{10}\Big)\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \\
&-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\Big(\frac{3R_{i_2jj_1jj_2j_3}}{20}+\frac{R_{i_2j_1jj_2jj_3}}{20}+\frac{3R_{kji_2j_1}R_{kj_2jj_3}}{360} \\
&+\frac{17R_{kj_1i_2j}R_{kj_2jj_3}}{90}+\frac{-29R_{kj_1i_2j_2}R_{kjj_3j}}{180}\Big)\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}+\frac{1}{8}\sum x_{j_1}x_{j_2}R_{jijij_1j_2}.
\end{aligned}
$$

故に,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{4/2}q_t(x) = &-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{R_{i_1j_1i_2j_2j_3j_4}}{20}+\frac{R_{jj_1i_1j_2}R_{jj_3i_2j_4}}{10}\Big)\frac{-\delta_{i_1i_2}}{2t}q_t(x) \\
&-\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\Big(\frac{3R_{i_2jj_1jj_2j_3}}{20}+\frac{R_{i_2j_1jj_2jj_3}}{20}+\frac{3R_{kji_2j_1}R_{kj_2jj_3}}{360} \\
&+\frac{17R_{kj_1i_2j}R_{kj_2jj_3}}{90}+\frac{-29R_{kj_1i_2j_2}R_{kjj_3j}}{180}\Big)\frac{-x_{i_2}}{2t}q_t(x) \\
&+\frac{1}{8}\sum x_{j_1}x_{j_2}R_{jijij_1j_2}q_t(x) \\
&= \frac{1}{2t}\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{20}+\frac{R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{10}\Big)q_t(x) \\
&+\frac{1}{2t}\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{3R_{jj_1jj_2j_3j_4}}{20}++\frac{-17R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{90}\Big)q_t(x) \\
&+\frac{1}{8}\sum x_{j_1}x_{j_2}R_{jijij_1j_2}q_t(x) \\
&= \frac{1}{2t}\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{5}+\frac{-4R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{45}\Big)q_t(x) \\
&+\frac{1}{8}\sum x_{j_1}x_{j_2}R_{jijij_1j_2}q_t(x)
\end{aligned}
$$

である. したがって,

$$
\begin{aligned}
&-(4\pi)^{m/2}\big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\mathbb{D}_{4/2}(q_\bullet\gamma_{0/2})\big)_{[0]}(1,0,0) \\
&= -(4\pi)^{m/2}\Big(q_\bullet\gamma_{0/2}\#\,\Big(\frac{1}{2t}\sum x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{5}+\frac{-4R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{45}\Big) \\
&+\frac{1}{8}\sum x_{j_1}x_{j_2}R_{jijij_1j_2}\Big)q_\bullet\Big)_{[0]}(1,0,0) \\
&= -(4\pi)^{m/2}\int_0^1 ds\Big\{\frac{1}{2s}\Big(\sum\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{5}+\frac{-4R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{45}\Big)\Big((2s)^4\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}} \\
&+(2s)^3\sum\delta_{j_aj_b}\frac{\partial}{\partial x_{j_c}}\frac{\partial}{\partial x_{j_d}}+(2s)^2\sum\delta_{j_aj_b}\delta_{j_cj_d}\Big)q_1(x) \\
&+\frac{1}{8}\sum R_{jijij_1j_2}\Big((2s)^2\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+2s\delta_{j_1j_2}\Big)q_1(x)\Big\}\Big|_{x=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(4\pi)^{m/2}\int_0^1 ds\Big\{\Big(\sum\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{5}+\frac{-4R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{45}\Big)\Big((2s)^3\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}}\\
&+(2s)^2\sum\delta_{j_aj_b}\frac{\partial}{\partial x_{j_c}}\frac{\partial}{\partial x_{j_d}}+2s\sum\delta_{j_aj_b}\delta_{j_cj_d}\Big)q_1(x)\\
&+\frac{1}{8}\sum R_{jijij_1j_2}\Big((2s)^2\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+2s\delta_{j_1j_2}\Big)q_1(x)\Big\}\Big|_{x=0}\\
&= -(4\pi)^{m/2}\Big\{\Big(\sum\Big(\frac{R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{5}+\frac{-4R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{45}\Big)\Big(2\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_3}}\frac{\partial}{\partial x_{j_4}}\\
&+\frac{4}{3}\sum\delta_{j_aj_b}\frac{\partial}{\partial x_{j_c}}\frac{\partial}{\partial x_{j_d}}+\sum\delta_{j_aj_b}\delta_{j_cj_d}\Big)q_1(x)+\frac{1}{8}\sum R_{jijij_1j_2}\Big(\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}}+\delta_{j_1j_2}\Big)q_1(x)\Big\}\Big|_{x=0}\\
&=\sum\Big(\frac{-R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{6}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{27}\Big)\sum\delta_{j_aj_b}\delta_{j_cj_d}+\frac{-\sum R_{jijikk}}{24}\\
&=\sum\Big(\frac{-R_{ij_1ij_2j_3j_4}}{6}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_3ij_4}}{27}\Big)(\delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}+\delta_{j_1j_3}\delta_{j_2j_4}+\delta_{j_1j_4}\delta_{j_2j_3})+\frac{-\sum R_{jijikk}}{24}\\
&=\sum\Big(\frac{-R_{ij_1ij_1j_3j_3}}{6}+\frac{2R_{jj_1ij_1}R_{jj_3ij_3}}{27}\Big)+\sum\Big(\frac{-R_{ij_1ij_2j_1j_2}}{6}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_1ij_2}}{27}\Big)\\
&+\sum\Big(\frac{-R_{ij_1ij_2j_2j_1}}{6}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_2ij_1}}{27}\Big)+\frac{-\sum R_{jijikk}}{24}\\
&=\frac{2R_{jj_1ij_1}R_{jj_2ij_2}}{27}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_1ij_2}}{27}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{ij_1jj_2}}{27}+\frac{-R_{ij_1ij_2j_1j_2}}{3}+\frac{-5\sum R_{jijikk}}{24}
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
K_{2,[0]}(P^0) &= \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432}+\sum\frac{R_{j_1j_3j_2j_3}R_{j_1j_4j_2j_4}}{108}\\
&+\frac{2R_{jj_1ij_1}R_{jj_2ij_2}}{27}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_1ij_2}}{27}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{ij_1jj_2}}{27}+\frac{-R_{ij_1ij_2j_1j_2}}{3}+\frac{-5\sum R_{jijikk}}{24}\\
&=\frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432}+\frac{-5\sum R_{jijikk}}{24}+\frac{-R_{ij_1ij_2j_1j_2}}{3}\\
&+\frac{R_{jj_1ij_1}R_{jj_2ij_2}}{12}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{jj_1ij_2}}{27}+\frac{2R_{jj_1ij_2}R_{ij_1jj_2}}{27}
\end{aligned}
$$

以上より,

$$
\begin{aligned}
K_2(P^0) &= \det{}^{1/2}\Big(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\Big)_{[4]}-\frac{5\sum R_{jijikk}}{24}-\frac{\sum R_{jijkik}}{3}\\
&+\frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432}+\frac{\sum R_{jkik}R_{jk'ik'}}{12}+\frac{2\sum R_{jkik'}\big(R_{jkik'}+R_{jk'ik}\big)}{27}.
\end{aligned}
$$

■

このように, 計算は初等的な微分積分の知識のみを用いて熱核の漸近展開係数を明確表示を与えることができる. よって, Mathematica などを用いてどの項までも機械計算できる.

5 Appendix

5.1 Index Theorem for the Dirac Operator

最後に Appendix として Dirac operator Index theorem の Getzler 氏による証明を紹介する. いくつか定義と補題を用意する.

Definiton 5.1.1 (Index of the Dirac Operator)
$D_+ := D|_{\Gamma(\not{S}^+)} : \Gamma(\not{S}^+) \to \Gamma(\not{S}^-)$ とおく. このとき D_+の解析的指数を次で定義する：

$$\mathrm{ind}(D_+) := \dim \mathrm{Ker} D_+ - \dim \mathrm{CoKer} D_+$$

Remark 5.1.2
(1)$\mathrm{ind}(D_+)$ は D_+を Fredholm 作用素とみたときの解析的指数である.
(2)$D_- := D|_{\Gamma(\not{S}^-)} : \Gamma(\not{S}^-) \to \Gamma(\not{S}^+)$ とおく. D が formal self-adjoint であることからベクトル空間として次は同型である：

$$\mathrm{CoKer} D_+ \cong \mathrm{Ker} D_=$$

特に $\dim \mathrm{CoKer} D_+ = \dim \mathrm{Ker} D_-$である. よって

$$\mathrm{ind}(D_+) = \dim \mathrm{Ker} D_+ - \dim \mathrm{Ker} D_-$$

である.

Definiton 5.1.3 (Super trace) $f \in \mathrm{End}(\not{S}_P)\,(P \in M)$ に対し

$$Str(f) := \begin{cases} Tr(f : \not{S}_P^+ \to \not{S}_P^+) - Tr(f : \not{S}_P^- \to \not{S}_P^-) & (f \in \mathrm{End}^0(\not{S}_P)) \\ 0 & (f \in \mathrm{End}^1(\not{S}_P)) \end{cases}$$

とする. これを super trace と呼ぶ. ここで

$$\mathrm{End}^0(\not{S}_P) := \{\, f \in \mathrm{End}(\not{S}_P) \,|\, f(\not{S}_P^\pm) \subset \not{S}_P^\pm \,\}\ (\text{複合同順})$$
$$\mathrm{End}^1(\not{S}_P) := \{\, f \in \mathrm{End}(\not{S}_P) \,|\, f(\not{S}_P^\pm) \subset \not{S}_P^\mp \,\}\ (\text{複合同順})$$

である.

Lemma 5.1.4 (McKean-Singer) 任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{ind}(D_+) = \int_M dV_g(P) Str(e^{-tD^2} : \not{S}_P \to \not{S}_P)$$

Proof. $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し, $H_\lambda := \{\, \phi \in \Gamma(\not{S}) \,|\, D^2\phi = \lambda\phi \,\}$ とおく. すると次の直和分解を得る：

$$H_\lambda = H_\lambda^+ \oplus H_\lambda^-, \qquad H_\lambda^\pm := \{\, \phi \in \Gamma(\not{S}^\pm) \,|\, D_\mp D_\pm \phi = \lambda\phi \,\}\ (\text{複合同順})$$

すると

$$\int_M dV_g(P) Str(e^{-tD^2} : \not{S}_P \to \not{S}_P) = \sum_\lambda e^{-t\lambda} (\dim H_\lambda^+ - \dim H_\lambda^-)$$

である. ここで$\lambda \neq 0$ に対して次の写像の合成を考える：

$$H_\lambda^+ \xrightarrow{\frac{1}{\lambda} D_+} H_\lambda^- \xrightarrow{D_-} H_\lambda^+$$

すると $D_- \circ \frac{1}{\lambda} D_+ = id_{H_\lambda^+}$である. よってベクトル空間として次の同型を得る：

$$H_\lambda^+ \cong H_\lambda^-$$

特に $\dim H_\lambda^+ = \dim H_\lambda^-$である. 以上より

$$\int_M dV_g(P) Str(e^{-tD^2}\colon \$_P \to \$_P) = \dim H_0^+ - \dim H_0^- = \mathrm{ind}(D_+)$$

■

Remark 5.1.5 $\mathrm{ind}(D_+)$ は t に依存しないので次が言える：

$$\mathrm{ind}(D_+) = \lim_{t\downarrow 0} \int_M dV_g(P) Str(e^{-tD^2}\colon \$_P \to \$_P)$$

しかし熱核の漸近展開を考えると t に関して負のオーダーが現れる. よって容易に極限操作が出来ない. ここが指数定理の証明において 1 番の難所である.

Lemma 5.1.6 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{|\alpha|})$ とおく. このとき次が成り立つ：

$$Str(r_m(e^\alpha)) = Str(r_m(e^{\alpha_1}) \circ \cdots \circ r_m(e^{\alpha_{|\alpha|}})) = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq (1, \cdots, m)) \\ \dfrac{1}{(\sqrt{-1})^{m/2}} 2^{m/2} & (\alpha = (1, \cdots, m)) \end{cases}$$

Proof. まず $|\alpha|$ が奇数のときは $r_m \in \mathrm{End}^1(\$)$ より $Str(r_m(e^\alpha)) = 0$ である. 以下 $|\alpha|$ が偶数のときを考える.
$\alpha \neq (1, \cdots, m = 2n)$ のとき, $m \notin \alpha$としても一般性を失わない. $|\alpha|$ が偶数であることから次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} \$^+ & \xrightarrow{r_m(e^\alpha)} & \$^+ \\ {\scriptstyle r_m(e^m)}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle r_m(e^m)} \\ \$^- & \xrightarrow[r_m(e^\alpha)]{} & \$^- \end{array}$$

よって $Tr(r_m(e^\alpha) : \$^+ \to \$^+) = Tr(r_m(e^m)^{-1} \circ r_m(e^\alpha) \circ r_m(e^m) : \$^+ \to \$^+) = Tr(r_m(e^\alpha) : \$^- \to \$^-)$ である. 故に $Str(r_m(e^\alpha)) = 0$ がわかる。
そして$\alpha = (1, \cdots, m = 2n)$ のとき

$$\begin{aligned} Tr(r_m(e^{(1,\cdots,m)}) : \$^\pm \to \$^\pm) &= (\sqrt{-1})^{-n}\, Tr(r_m(\omega_{\mathbb{C}}) : \$^\pm \to \$^\pm) \\ &= \pm(\sqrt{-1})^{-n} \dim \$^\pm = \pm(\sqrt{-1})^{-n} 2^{n-1} \end{aligned}$$

である. よって

$$Str(r_m(e^{(1,\cdots,m)})) = Tr(r_m(e^{(1,\cdots,m)}) : \$^+ \to \$^+) - Tr(r_m(e^{(1,\cdots,m)}) : \$^- \to \$^-) = \frac{1}{(\sqrt{-1})^{m/2}} 2^{m/2}$$

■

以上より有名な Atiyah-Singer の指数定理が証明できる.

Theorem 5.1.7 (Atiyah-Singer)

$$\mathrm{ind}(D_+) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}} \int_M \det{}^{1/2}\left(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)}\right)$$

Proof. 固定した $P^0 \in M$ において

$$\lim_{t\downarrow 0} Str(e^{-tD^2}\colon \mathcal{S}_{P^0} \to \mathcal{S}_{P^0})$$

を計算する.

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} Str(e^{-tD^2}\colon \mathcal{S}_{P^0} \to \mathcal{S}_{P^0}) &= \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} Str(K_{m/2}(0)) \\ &\overset{\text{Lemma 5.1.6}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} Str(r_m(e^{(1,\cdots,m)}))K_{m/2,(1,\cdots,m)}(0) \\ &\overset{\text{Lemma 5.1.6}}{=} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}} K_{m/2,(1,\cdots,m)}(0) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}} \det{}^{1/2}\left(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)}\right)\end{aligned}$$

以上より

$$\mathrm{ind}(D_+) \overset{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \lim_{t\downarrow 0}\int_M dV_g(P^0) Str(e^{-tD^2}\colon \mathcal{S}_{P^0} \to \mathcal{S}_{P^0})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}}\int_M \det{}^{1/2}\left(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)}\right)$$

■

Remark 5.1.8

$\det{}^{1/2}\left(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)}\right)$ は Pontrjagin 類の多項式として書き表せる topological な量であり, $\hat{A}$-genus と呼ばれ $\hat{A}(M)$ と書く. この表記を用いて指数定理は

$$\mathrm{ind}(D_+) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}}\int_M \hat{A}(M)$$

と表される.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math. **19**(1973), 279-330.

[2] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Springer Verlag, 1992.

[3] E. Getzler, A short proof of the Atiyah-Singer index theorem, Topology **25**(1986), 111-117.

[4] E. Getzler, Pseudodiffrential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, Communication Math. Physics **92**(1983), 163-178.

[5] R. Imai, M. Nagase, The second term in the asymptotics of the Kohn-Rossi heat kernel on contact Riemannian manifolds, preprint.

[6] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton Univ. Press, 1989.

[7] M. Nagase, The heat equation for the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.

[8] M. Nagase, A formula for the heat kernel coefficients on the Riemannian manifolds, Tohoku Math. J. **72**(2020),261-282.

[9] M. Nagase, T. Shirakawa, A formula for the heat kernel coefficients of the Dirac Laplacians on spin manifolds, Tsukuba J. Math.**45**, No.1(2021), 69-81.