氏　　　　　名	石原　　海
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第 731 号
学位授与年月日	平成 21 年 3 月 24 日
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	On Heegaard splittings and band surgeries （ヘガード分解とバンド手術について）
論 文 審 査 委 員	委員長　　准 教 授　　下川　航也
	委　員　　教　　授　　酒井　文雄
	委　員　　教　　授　　長瀬　正義
	委　員　　教　　授　　水谷　忠良

論文の内容の要旨

3 次元多様体とは，局所的には 3 次元ユークリッド空間に同相な位相空間のことである．3 次元多様体の分類問題に関して，最も基礎となるべきものが，Poincaré によって 1904 年に提起されたポアンカレ予想である．その後，Thurston によって 3 次元多様体論に双曲幾何学が導入され，ポアンカレ予想を含む幾何化予想が提起された．2004 年，Perelman によって 100 年間未解決であったポアンカレ予想が肯定的に解決された．しかし，3 次元多様体の特徴付け及び応用に関しては，多くの問題が残されている．その 3 次元多様体研究の大きな柱としてヘガード分解とデーン手術がある．

ヘガード分解とは, 3 次元多様体上の閉曲面による 2 つの compression body への分解のことである．また，分解を与えている閉曲面をヘガード曲面という．任意の向き付け可能で連結なコンパクト 3 次元多様体がヘガード分解を持つことが知られており, 3 次元多様体を研究する道具としてヘガード分解が研究されている．

デーン手術とは，絡み目の正則近傍を取り除き，貼り合わせ方を変えて埋め戻して，新たな多様体を構成する作業をいう．Lickorish と Wallace によって独立に，任意の向き付け可能で連結な閉 3 次元多様体が，3 次元球面内のある絡み目におけるデーン手術によって得られることが示された．この事実によりデーン手術は 3 次元多様体論と結び目理論を密接に結び付けている．絡み目の外部空間に関するヘガード曲面は，その絡み目でデーン手術して得られる多様体のヘガード曲面にもなっている．バンド手術とは，ある絡み目に付いているバンドを使って別の絡み目を構成する作業のことであるが，2 つの意味でデーン手術と密接に関連している．1 つ目に，ある結び目とデーン手術のスロープとのバンド手術は，デーン手術で得られた多様体上の双対結び目を横断する動きになっている．また 2 つ目に，2 つの絡み目を結ぶバンド手術は，分岐被覆をとることで，それぞれの絡み目で分岐する分岐被覆空間を結ぶデーン手術に対応する．

本論文はヘガード分解とバンド手術という 2 つの柱で研究をまとめたものである．ヘガード曲面の種数が g，2 つの compression body のマイナス境界の種数がそれぞれ m,n のとき，そのヘガード分解のタイプを (g;m,n) と定義した．ただし，compression body のマイナス境界が空集合の場合，つまり handlebody の場合，種数は 0 とした．タイプ (g;m,n) のヘガード分解を持つ多様体は stabilization によってタイプ (g+1;m,n) のヘガード分解も持つし，絡み目の外部空間，つまり境界がトーラスからなる多様体について考えれば,

boundary stabilization によってタイプ $(g+1;m+1,n-1)$ のヘガード分解も持つ $(n \geqq 1)$．ここでは特に 2 成分絡み目の外部空間について考え，それぞれのタイプのヘガード分解を持つ，または持たないものが無限個存在することを示す．またタイプ $(2;2,0)$ のヘガード分解を持つ絡み目の外部空間がタイプ $(2;1,1)$ のヘガード分解を持つための必要条件についても述べる．

トンネル数1の絡み目はunknotting tunnelと呼ばれる一本の弧で定義され，その外部空間は種数2のヘガード曲面を持っており，最も単純な絡み目である．2 橋絡み目やトーラス結び目は全てトンネル数 1 であり，最も単純とはいえ，トンネル数 1 が大きなクラスであることを示している．2 橋絡み目やトーラス結び目の unknotting tunnel については既に分類がされている．Cho-McCulough はトンネル数 1 の絡み目 (特に結び目) と unknotting tunnel の組をトンネルと呼び，それらが有理数の列と付随するデータによって完全にパラメトライズされることを示している．さらに 2 橋結び目やトーラス結び目に対応するトンネルに関して実際にパラメータを求めている．本論文では，与えられたトンネルからそのパラメータを求めるアルゴリズムを示す．これにより与えられた 2 つのトンネルが同値かどうか完全に判定できる．また Cho と McCulough の結果によって，トンネルのパラメータを使って対応する結び目もしくは絡み目の橋指数の評価をすることが出来る．

2 成分絡み目に関するバンド手術で自明な結び目が生成されるものを考察した．L をある結び目 K とそのメリディアンからなる絡み目とする．K が自明結び目でなく，L に関して自明な結び目を生成するバンド手術が存在することと，K の結び目解消数が 1 であることが同値であることを示す．さらに K がトーラス結び目の場合のバンドを決定する．これは上で述べた 1 つ目の意味でデーン手術と関連しており，ザイフェルト手術の研究に応用がある．これは茂手木公彦氏との共同研究である．

2 橋結び目 $b(4mn-1,2m)$ から $(2,2k)$ トーラス絡み目へのバンド手術を特徴付ける．この研究には 2 つの応用がある．1 つは，上で述べた 2 つ目の意味で，レンズ空間のある対称性を持った結び目に沿ったデーン手術でレンズ空間を生成するものに特徴付けを与えることが出来る．もう 1 つは，DNA に働く部位特異的組み換えのトポロジカルな特徴付けを与える．これは下川航也氏，Isabel Darcy 氏，Ram Medikonduri 氏との共同研究である．

論文の審査結果の要旨

当論文審査会は、当該論文発表会を平成 21 年 2 月 10 日に公開で開催し、質疑応答を行い、論文内容の審査を行った。その結果、本論文を博士（理学）の学位論文として合格と判定した。以下に審査結果の要約を記す。

本論文では、3 次元多様体と結び目のトポロジーが研究されている。その中で、3 次元多様体の Heegaard 分解、結び目、絡み目のバンド手術の問題が扱われている。Heegaard 分解に関しては、境界を持つ 3 次元多様体の Heegaard 分解に関し type と呼ばれる概念を導入し、その基礎的研究を行った。また、トンネル数 1 の結び目や絡み目の補空間の Heegaard 分解に関しパラメータ付けを与えるアルゴリズムを与えた。結び目、絡み目のバンド手術に関しては、2 成分絡み目から自明結び目が得られる場合、種数 1 の 2 橋結び目からトーラス結び目が得られる場合の研究を行った。バンド手術の結果は、結び目の Dehn 手術の研究、DNA に働く部位特異的酵素の研究に応用がある。これらの結果は、3 次元多様体論、結び目理論に多くの貢献をしており、さらに実際に応用があるという点で重要である。

3 次元多様体とは、局所的に 3 次元ユークリッド空間と同じ構造を持つ空間である。3 次元多様体の分類は、例えば宇宙の形の研究等に応用されている。結び目は 3 次元空間内の閉じた紐である。紐の本数が複数の場合には絡み目と呼ばれる。自然界では、環状 DNA が結び目や絡み目を生成することが知られている。任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体は 3 次元球面から結び目や絡み目を用いて Dehn 手術と呼ばれる操作で構成できることが知られている。その為、3 次元多様体のトポロジーの研究は結び目のトポロジーの研究と密接に関係している。最近の 3 次元多様体幾何学化予想の肯定的解決により、3 次元多様体には良い幾何構造が入り、扱いが幾分平易になったが、その多様な構造は未だに分からない点が多い。例えば、3 次元多様体を構成する方法として挙げられるデーン手術や Heegaard 分解を具体的に与えられても、その多様体を決定することは難しい場合が多い。この論文の結果は、ある種の Heegaard 分解やデーン手術の特徴付けを与えている点でこの観点からも有意義である。

本論文では、まず境界をもつ多様体を 2 つの compression body へ分ける Heegaard 分解に関し、type (g;m,n) という概念を導入した。これは、分解する Heegaard 曲面の種数を g とし、それ以外の compression body の境界の曲面の種数が m と n であるということである。ある多様体が 2 つの type の分解を持つ様子を考え、研究を行った。特に 2 成分絡み目に関し、その外部空間がある種の type の分解を持つための条件や持たないための条件を与え、それぞれの場合に関し具体的な例を与えた。

次に、トンネル数 1 の結び目、絡み目のトンネルのパラメータを得るためのアルゴリズムを得た。これはトンネル数 1 の結び目、絡み目の外部空間とその Heegaard 分解のパラメータ付けを得るアルゴリズムに対応する。この結果により、結び目や絡み目が実際に与えられたとき、そのパラメータ付けが与えることが可能となる。

結び目、絡み目のバンド手術、および、それを拡張したタングル手術とは、結び目、絡み目の局所変形の 1 つである。これにより、多様な結び目、絡み目を作ることが出来る。DNA 結び目や絡み目においては、それに作用する酵素によりバンド手術が行われ、DNA 結び目や絡み目のトポロジーが変わることが知られ

ている。また、この手術は2重分岐被覆を考えることによりDehn手術に対応することが知られている。

この論文では、まず2成分絡み目からバンド手術で自明な結び目が得られる場合の研究を行い、そのバンド手術は結び目解消操作と関係があるということを示した。その結果は結び目のDehn手術でSeifert多様体が得られる場合の研究に応用されている。

さらに種数1の2橋結び目からトーラス絡み目がバンド手術で得られる場合の特徴付けを行った。この研究は、大腸菌のDNAに作用するXerという部位特異的組み換え酵素が行う反応のトポロジー的な特徴付けに応用がある。また、対応するDehn手術に関する結果はある種のレンズ空間内の結び目のDehn手術でレンズ空間が得られるものの特徴付けに対応する。

以上の成果は、既に国際会議、研究集会で発表されている。さらに、3編の論文として3誌の査読付きのジャーナルに投稿され、1編は既に出版され、2編は受理され出版予定である。以上を総合的に審査した結果、当学位論文審査会は全員一致で博士（理学）に十分値する論文であると認め、合格と判定した。