氏　　　　　名	ALWALEED KAMEL ABDEL-AL IBRAHIM
博士の専攻分野の名称	博士（学術）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第 780 号
学位授与年月日	平成 22 年 3 月 24 日
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	Geometry of 2-Weierstrass points on certain plane curves （ある種の平面曲線における 2-ワイエルシュトラス点の幾何）
論 文 審 査 委 員	委員長　　教　　授　　酒井　文雄
	委　員　　教　　授　　小嶋　久祉
	委　員　　教　　授　　福井　敏純
	委　員　　准 教 授　　下川　航也

論文の内容の要旨

We study the 2-Weierstrass points on quartic curves. If the curve has a cyclic covering structure over $P^1(\mathbb{C})$, then the computation of 2-Weierstrass points is relatively easy (see Chapter 3). We deal with a 1-parameter family of smooth quartic curves without cyclic covering structures over $P^1(\mathbb{C})$. Let C_a be the smooth plane quartic defined by the equation:

$$C_a : F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + a\,(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) = 0, \quad a \neq 1, \pm 2.$$

We call these quartics *Kuribayashi quartics*. In this dissertation, we give the geometric classification of the 2-Weierstrass points on Kuribayashi quartics.

Let C be a smooth plane quartic curve, let P be a point on C. It is well known that 1-Weierstrass points on C are nothing but flexes and divided into ordinary flex and hyperflex (on a smooth plane quartic C, a flex P is called a hyperflex if the contact order with the tangent line T_P at P is equal to four, i.e., $I_P(C, T_P)=4$). In analogy with tangent lines and flexes of plane curves, one can consider osculating conics and sextactic points.

Fact. Let P be a non-flex point on a smooth plane curve C of degree $d \geq 3$. Then there is an unique irreducible conic D_P with $I_P(C, D_P) \geq 5$. Such a unique irreducible conic D_P is called the osculating conic of C at P.

Definition. A non-flex point P on a smooth plane curve C is said to be a sextactic point if the osculating conic D_P meets C at P with contact order at least six.

We say that, a sextactic point P is i-sextactic, if $i = I_P(C, D_P)-5$, where D_P is the osculating conic of C at P.

Geometrically, a 2-Weierstrass point on a smooth plane quartic curve is either a flex or a sextactic point. Kuribayashi and Sekita observed that C_a isomorphic to $C_{a'}$ if and only if

$$a' = a, \text{ if } a \neq \left(-3 \pm 3i\sqrt{7}\right)/2 \text{ and } a', \bar{a} \quad \text{if } a = \left(-3 \pm 3i\sqrt{7}\right)/2$$

The order of the automorphisms group $Aut(C_a)$ of C_a is either 24, 96 or 168. Moreover, $|Aut(C_a)| = 168$ if and only if a = $(-3\pm3\imath\sqrt{7})/2$ and $|Aut(C_a)| = 96$ if and only if a = 0. .If $|Aut(C_a)| \neq 24$, then there is a subgroup of $Aut(C_a)$ whose order is 24.

Definition. Define the projective transformation group G to be the group generated by the following three elements of order two

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

The group G is isomorphic to the symmetric group S_4. Indeed, the group G acts on the set of four points

$$\{ O_1 = [-1:1:1], O_2 = [1:-1:1], O_3 = [-1:-1:1], O_4 = [1:1:1] \},$$

as the permutations $\sigma \to (12)$, $\tau \to (13)$, $\rho \to (14)$. It turns out that the group G also acts on C_a. Thus we can regard $G \subseteq Aut(C_a)$.

The group G acts on 1-Weierstrass points and on 2-Weierstrass points on Kuribayashi curves C_a. So we can discuss the structure of G-orbits of the 2-Weierstrass points on C_a.

We denote by $X(C_a)$ the set of the points $P \in C_a$ with $|G_P| > 1$ where G_P denote the stabilizer subgroup of P in G. We also write $X_i(C_a) = \{P \in C_a \ / \ |G_P| = i\}$. In our case, we can prove *that* $X(C_a) = X_2(C_a) \cup X_3(C_a)$. It turns out that any point $P \in X_2(C_a)$ must be a 2-Weierstrass point. We remark that

$$|Orb_G(P)| = \begin{cases} 8 & if \ \ P \in X_3(C_a), \\ 12 & if \ \ P \in X_2(C_a) \\ 24 & otherwise \end{cases}$$

The main result is stated as follows:

Theorem. The G-orbits of the 2-Weierstrass points on Kuribayashi curves C_a are classified as follows. We divide the set of 2-Weierstrass points on C_a into the subset of flexes and the subset of sextactic points.

a	ordinary flexes	hyperflexes
$a = 0,3$		1 orbit of 12 points
otherwise	1 orbit of 24 points	

Table 1: G-orbit of flexes

a	1-sextactic	2-sextactic	3-sextactic
$a = 0,3$	2 orbits of 12 points 1 orbit of 24 points		
$a = 14$	3 orbits of 12 points 1 orbit of 24 points		1 orbit of 8 points
$P(a) = 0$	2 orbits of 12 points 1 orbit. of 24 points		1 orbit of 24 points
$Q(a) = 0$	3 orbits of 12 points	1 orbit of 12 points	
otherwise	3 orbits of 12 points 2 orbits of 24 points		

Table 2: G-orbit of sextactic points

Here we set

$$P(a) = a^3+68a^2-91a+98,$$

$$Q(a) = 33a^4-186a^3+205a^2+364a+196.$$

Corollary. The numbers of 2-Weierstrass points on C_a with respect to their types are given in the following table.

a	ordinary flex	hyperflex	1-sextactic	2-sextactic	3-sextactic
$a = 0,3$	0	12	48	0	0
$a = 14$	24	0	60	0	8
$P(a) = 0$	24	0	48	0	12
$Q(a) = 0$	24	0	36	24	0
otherwise	24	0	84	0	0

Table 3: Number of 2-Weierstrass points

論文の審査結果の要旨

射影代数曲線（コンパクト・リーマン面）上のワイエルシュトラス点は曲線の特別な点であり，重要な不変量である．ワイエルシュトラス点の概念は高次ワイエルシュトラス点に拡張されており，それらも曲線の特殊な点であり，興味深い研究対象である．本学位論文のテーマは種数 3 の平面曲線の 2-ワイエルシュトラス点である．まず，巡回被覆構造を持つ場合を考察し，次の場合に，2-ワイエルシュトラス点の分類結果を得ている．

（ⅰ）$y^4 = x(x-1)(x-a)$
（ⅱ）$y^6 = x^3(x-1)^2(x-a)^2$
（ⅲ）$y^4 = x^2(x-1)(x-a)$
（ⅳ）$y^6 = x^3(x-1)^3(x-a)$

本学位論文の主結果は巡回被覆構造を持たない，次の栗林曲線とよばれる 4 次曲線

$$C_a := x^4 + y^4 + z^4 + a\,(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) = 0, \quad (a \neq 1, \pm 2).$$

における 2- ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的な研究である.

対称群 S_4 が栗林曲線 C_a に自己同型として作用し，その結果，2- ワイエルシュトラス点の集合にも作用している.

定義　次の行列で生成された射影変換群を G とする.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

この群 G は対称群 S_4 と同型であり，栗林曲線 C_a にも作用している．このとき，$C_a \cong C_{a'}$ となるのは，$a = (-3\pm 3\sqrt{-7})/2$ となるときを除いて，$a = a'$ であるときに限ることが証明されている（栗田－関田）.

一般に，非特異 4 次曲線上の 2-ワイエルシュトラス点は変曲点かセクスタクティック点と呼ばれる点であることが知られている.

定義　平面曲線 C の非特異点でない点 P は，P で接触位数 m が 6 以上の既約 2 次曲線 D が存在するとき，**セクスタクティック点**とよばれる．さらに，$i = m - 6$ とするとき，P を i-セクスタクティック点ということにする.

さて，群 G の点 P における固定群を G_P で表すとき，$X(C_a) = \{P \in C_a \,||G_P| > 1\}$ とおく．さらに，$X_i(C_a) = \{P \in C_a \,/\, ||G_P| = i\}$. とおく．計算により，$X(C_a) = X_2(C_a) \cup X_3(C_a)$ が成立することがわかる．Duma の定理により，点 $P \in X_2(C_a)$ は 2-ワイエルシュトラス点である．各軌道に含まれる点の個数については下記のようになる.

$$|\mathrm{Orb}(P)| = \begin{cases} 8 & \text{if } P \in X_3(C_a), \\ 12 & \text{if } P \in X_2(C_a), \\ 24 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

さて，曲線 C_a の 2-ワイエルシュトラス点とその種類は 2 重微分形式の基底により定義されるロンスキアン形式 Ω の零点とその重複度によって計算することができる.

本学位論文の主結果は次の定理である.

定理. 栗林曲線 C_a 上の 2-ワイエルシュトラス点の G- 軌道は下記のように分類される．2-ワイエルシュトラス点は変曲点とセクスタクティック点に分かれる.

a	通常変曲点	ハイパー変曲点
0,3		1 orb. of 12 pts
その他の場合	1 orb. of 24 pts	

表１　変曲点の G- 軌道

a	1- セクスタクティック点	2- セクスタクティック点	3- セクスタクティック点
0,3	2 orb. of 12 pts 1 orb. of 24 pts		
14	3 orb. of 12 pts 1 orb. of 24 pts		1 orb. of 8 pts
P(a) = 0	2 orb. of 12 pts 1 orb. of 24 pts		1 orb. of 24 pts
Q(a) = 0	3 orb. of 12 pts	1 orb. of 12 pts	
その他の場合	3 orb. of 12 pts 2 orb. of 24 pts		

表２　セクスタクティック点の G- 軌道

ここで，　$P(a) = a^3+68\,a^2-91a+98$, $Q(a) = 33a^4-186a^3+205a^2+364a+196$ である.

巡回被覆でない栗林曲線上の 2-ワイエルシュトラス点の計算にはいろいろ困難があり，上記の定理の証明にはいくつかの新しい方法が用いられている．それらの方法は今後他の曲線の研究にも役立つものである．本学位論文の結果の巡回被覆の場合については，Saitama Math.J. 26 (2009).49-65 に，栗林曲線の場合は Saitama Math.J. 26 (2009).67-82 に公表されている.

以上見てきたように，本論文の内容は代数幾何のこの分野における最新の結果を含んだ優れた研究として高く評価することができる．よって，当審査委員会は本論文が博士（学術）の学位授与に相応しい研究内容を持つものと認定した.