| | |
|---|---|
| 氏　　　　　名 | 王　楠 |
| 博士の専攻分野の名称 | 博士（理学） |
| 学 位 記 号 番 号 | 博理工甲第 947 号 |
| 学位授与年月日 | 平成 26 年 3 月 24 日 |
| 学位授与の条件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当 |
| 学 位 論 文 題 目 | Hyperelliptic and trigonal curves among cyclic coverings of the projective line<br>（射影直線の巡回被覆の中の超楕円曲線とトリゴナル曲線） |
| 論 文 審 査 委 員 | 委員長　　准 教 授　　岸本　　崇 |
| | 委　員　　名誉教授　　酒井　文雄 |
| | 委　員　　教　　授　　小嶋　久祉 |
| | 委　員　　教　　授　　長瀬　正義 |
| | 委　員　　准 教 授　　海老原　円 |

## 論文の内容の要旨

Let $V$ be a $d$-cyclic covering of the complex projective line $\mathbb{P}^1$ with $n$ branch points. In this thesis, we give necessary and sufficient conditions for (1) whether $V$ is hyperelliptic for arbitrary $n$ and $d$ ; (2) whether $V$ is trigonal for $n = 3$ and arbitrary $d$.

A $d$-cyclic covering of $\mathbb{P}^1$ with $n$ branch points can be given by a equation

$$V : y^d = (x-\lambda_1)^{a_1}(x-\lambda_2)^{a_2} \ldots (x-\lambda_2)^{a_n}, \qquad (1)$$
$$a_i \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d),\ a_1 + \ldots + a_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d).$$

For our problem, only the cases where $V$ is irreducible and non-rational need to be considered, so we always assume that $n \geq 3$ and $\gcd(d, a_1, \ldots, a_n) = 1$.

**Theorem A**. *when $n = 3$, the curve $V$ given in* (1) *is hyperelliptic if and only if $d \geq 3$ and $V$ is birational to one of the following curves:*

(H1) $y^d = x(x-1)$;

(H2) $y^d = x(x-1)^{\frac{d-2}{2}}$ (*$d$ is even and $d \geq 6$*),

*Only three of these curves are elliptic: $y^3 = x(x-1)$, $y^4 = x(x-1)$ and $y^6 = x(x-1)^2$.*

**Theorem B.** *when $n = 4$, the curve $V$ given in* (1) *is hyperelliptic if and only if $d \geq 3$ and $V$ is birational to one of the following curves:*

(H3) $y^d = x(x-1)(x-\lambda)^{d-1}$,

(H4) $y^d = x(x-1)^{\frac{d}{2}}(x-\lambda)^{\frac{d}{2}}$ (*$d$ is even and $d \geq 4$*)

(H5) $y^d = x^2(x-1)^{\frac{d}{2}}(x-\lambda)^{\frac{d}{2}}$ ($d \equiv 2$ (mod 4) *and $d \geq 6$*),

*where $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Only one of these curves is elliptic: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.*

**Theorem C**. *when* $n \geq 5$, *the curve V given in* (1) *is hyperelliptic if and only if* $d \geq 3$ *and V is birational to one of the following curves:*

(H6) $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_3)\dots(x-\lambda_{n-1})$ (*n is even*),

(H7) $y^d = x(x-1)^{\frac{d}{2}}(x-\lambda_3)^{\frac{d}{2}}\dots(x-\lambda_{n-1})^{\frac{d}{2}}$ ($d \geq 4$),

(H8) $y^d = x^2(x-1)^{\frac{d}{2}}(x-\lambda_3)^{\frac{d}{2}}\dots(x-\lambda_{n-1})^{\frac{d}{2}}$ (*n is even*, $d \equiv 2 \pmod 4$, $d \geq 6$),

*where the parameters* $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *are mutually distinct with each other. None of these curves is elliptic.*

**Theorem D**. *when* $n = 3$, *the curve V given in* (1) *is trigonal if and only if* $d \geq 3$ *and V is birational to one of the following curves:*

(T1) $y^d = x(x-1)^2$;

(T2) $y^d = x(x-1)^{(d-3)/3}$ ($d \equiv 0 \pmod 3$ *and* $d \geq 12$);

(T3) $y^d = x(x-1)^{d/3}$ ($d \equiv \pmod 3$, $d \not\equiv 0 \pmod 9$ *and* $d \geq 12$).

In general, it is difficult to determine the birational equivalence relation of curves. But in this thesis, we well show that the conditions "*V* is birational to one of the following curves" in our theorems can be determined by an easy calculation.

# 論文の審査結果の要旨

射影代数曲線 $C$ のゴナリティ Gon($C$) は種数に次ぐ重要な不変量である．ゴナリティは $C$ 上の定数でない有理関数の最小次数，あるいは $C$ の非特異モデル $\tilde{C}$ から射影直線 $\mathbf{P}^1$ への定数でない正則写像の最小次数として定義される．ゴナリティが小さい曲線は構造が比較的簡単で，詳しい研究結果が知られている．例えば，超楕円曲線はゴナリティ２の曲線であり，ゴナリティ３の曲線はトリゴナル曲線と呼ばれている．与えられた平面 $d$ 次曲線 $C$ のゴナリティを決定するという問題は，一般には非常に難しい問題である．非特異曲線の場合に，Gon($C$) = $d$ - 1 となることは，古典的には既知であった（マックスネーター）ようであるが，現代的な証明は難波誠氏による（1979 年）．特異点の最大重複度が $\nu$ のとき，上からの評価 Gon($C$) $d$ - $\nu$ があり，等号になる判定法がいくつか知られているが，その有効な範囲は限定的である．

本学位論文の主結果は $\mathbf{P}^1$ の巡回被覆曲線について，

(i) 超楕円曲線および楕円曲線

(ii) トリゴナル曲線（3 点分岐の場合）

を分類し，双有理同型を込めて記述したことである． $d$ 次巡回被覆曲線は

$$y^d = \prod_{i=1}(x - a)^{a_i}$$

の形に表される曲線であり，歴史的にも重要な曲線である．ここで，条件

$$(1) \quad 0 < a_i < d, \qquad (2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \pmod{d}$$

を仮定することができる．射影直線 $\mathbf{P}^1$ の被覆と考えたとき，$x = a_i$ が分岐点であり，分岐点の個数が $n$ である．このとき，巡回群 $\mathbf{Z}_d$ が作用し，その商空間が $\mathbf{P}^1$ になっている．もし，ゴナリティを与える写像が，$\mathbf{Z}_d$ の部分群による商写像であれば，指数 $\{a_i\}$ について，

- 二つを除いて，$a_i = d=2$　（超楕円曲，楕円曲線の場合）
- 二つを除いて，$a_i$ は $d=3$ の倍数　（トリゴナル曲線の場合）

となることは容易に分かる．このようにならない場合の考察が本学位論文の主要な成果である．証明に用いられる主要なテクニックは下記の事実である．曲線の種数を $g$ で表す．

**命題 1.** 超楕円曲線 $C$ 上の有理関数について下記が成立する．
(1) $C$ 上の有理関数の次数 $r \leq g$ なら，$r$ は偶数である．
(2) 位数 2 の有理関数は一次変換を除いてただ一つである．

**命題 2.** トリゴナル $C$ 上の有理関数について下記が成立する．
(1) $C$ 上の有理関数の次数 $r \leq (g + 1)/2$ なら，$r$ は 3 の倍数である．
(2) $g \geq 5$ なら，位数 3 の有理関数は一次変換を除いてただ一つである．

主結果は下記のように述べられる．

**定理 1.** $d$ 次巡回被覆曲線で超楕円曲線になるものは，上記の自明なものを除けば，下記の曲線に $d$ 次被覆曲線として双有理同型である ($d \geq 3$).

(1) $y^d = x(x - 1)$

(2) $y^d = x(x - 1)(x - \lambda)^{d-1}$

**定理 2.** 分岐点が 3 点の $d$ 次巡回被覆曲線でトリゴナル曲線になるものは，上記の自明なものを除けば，下記の曲線に $d$ 次被覆曲線として双有理同型である.

$$y^d = x(x - 1)^2$$

本学位論文の結果の内, 超楕円曲線の分類については, 3 点分岐の場合が Arch. Math.101, 479 - 484 (2013) に公表され，4 点以上の分岐点がある場合の結果も同雑誌に受理され，掲載されることが決定している．トリゴナル曲線の分類問題については，最近新しい手法を開発し，4 点以上の分岐点の場合も込めて，すべての場合の分類が完成したようである（プレプリント）.

以上見てきたように，本論文の内容は代数幾何のこの分野における最新の結果を含んだ優れた研究として高く評価することができる．よって，当審査委員会は本論文が博士（学術）の学位授与に相応しい研究内容を持つものと認定した.